

《中国工程物理研究院科技丛书》第043号

近可积无穷维动力系统

郭柏灵　高平　陈瀚林　著

国防工業出版社

图书在版编目(CIP)数据

近可积无穷维动力系统/郭柏灵等著.—北京:国防工业出版社,2004.6

(中国工程物理研究院科技丛书)

ISBN 7-118-03482-7

Ⅰ.近... Ⅱ.郭... Ⅲ.动力系统(数学)-研究 Ⅳ.0175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 035944 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 20¾ 543 千字

2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月北京第 1 次印刷

印数:1—3000 册 定价:45.00 元

《中国工程物理研究院科技丛书》出版说明

中国工程物理研究院建院 40 多年来,坚持理论研究、科学实验和工程设计密切结合的科研方向,完成了国家下达的各项国际科研任务。通过完成任务,在许多专业学科领域里,不论在基础理论方面,还是在实验测试技术和工程应用技术方面,都有重要发展和创新,积累了丰富的知识经验,造就了一大批优秀科技人才。

为了扩大科技交流与合作,促进我院事业的继承与发展,系统地总结我院 40 多年来各个专业领域里集体积累起来的经验,吸收国内外最新科技成果,形成一套系列科技丛书,无疑是一件十分有意义的事情。

这套丛书将部分地反映中国工程物理研究院科技工作的成果,内容涉及本院过去开设过 20 几个主要学科。现在和今后开设的新学科,也将编著出书,续入本丛书中。

这套丛书将在今后几年里陆续编辑出版。我院早些年零散编著出版的专业书籍,经编委会审定后,也纳入本丛书系列。

谨以这套丛书献给 40 多年来为我国国防现代化而献身的人们!

《中国工程物理研究院科技丛书》
编审委员会
1999 年 6 月 4 日修改

《中国工程物理研究院科技丛书》
第五届编审委员会名单

《中国工程物理研究院科技丛书》
已 出 版 书 目

012 炸药热分析
楚士晋编著 科学出版社 1994年12月
013 脉冲辐射场诊断技术
刘庆兆主编 科学出版社 1994年12月
014 放射性核素活度的测量方法和技术
古当长编著 科学出版社 1994年12月
015 二维非定常流和激波
王继海编著 科学出版社 1994年12月
016 抛物型方程差分方法引论
李德元 陈光南著 科学出版社 1995年12月
017 特种结构分析
刘新民 韦日演主编 国防工业出版社 1995年12月
018 理论爆轰物理
孙锦山 朱建士著 国防工业出版社 1995年12月
019 可靠性维修性可用性评估手册
潘吉安编著 国防工业出版社 1995年12月
020 脉冲辐射场测量数据处理与误差分析
陈元金编著 国防工业出版社 1997年01月
021 近代成像技术与图像处理
吴世法著 国防工业出版社 1997年03月
022 一维流体力学差分方法
水鸿寿著 国防工业出版社 1998年02月
023 抗辐射电子学 辐射效应及加固原理
赖祖武等著 国防工业出版社 1998年07月
024 金属的环境氢脆及其试验技术
周德惠 谭云编著 国防工业出版社 1998年12月
025 试验核物理测量中的粒子分辨
段绍节编著 国防工业出版社 1999年06月
026 实验物态方程导引(第二版)
经福谦著 科学出版社 1999年09月

027 无穷维动力系统
郭柏灵著 国防工业出版社 2000年01月
028 真空吸取器设计及应用技术
单景德编著 国防工业出版社 2000年01月
029 再入飞行器天线
金显盛编著 国防工业出版社 2000年03月
030 应用爆轰物理
孙承纬著 国防工业出版社 2000年12月
031 混沌的控制、同步与利用
陈式刚等著 国防工业出版社 2000年12月
032 激光干涉测速技术
胡绍楼著 国防工业出版社 2000年12月
033 空气炮理论与实验技术
王金贵著 国防工业出版社 2000年12月
034 一维不定常流与激波
李维新著 国防工业出版社 2000年12月
035 X射线与超紫外辐射源及其计量技术
孙景文编著 国防工业出版社 2001年03月
036 含能材料热谱集
董海山等编著 国防工业出版社 2001年03月
037 材料中的氦及氚渗透
王佩璇 宋家树著 国防工业出版社 2002年04月
038 高温等离子体X射线谱学
孙景文编著 国防工业出版社 2003年01月
039 激光核聚变靶物理基础
张钧 常铁强著 国防工业出版社 2004年06月
040 复杂系统可靠性工程
金碧辉主编 国防工业出版社 2004年06月
041 核材料γ特征谱的测量和分析技术
田东风 伍钧编著 国防工业出版社 2004年06月

042　高能激光系统

苏毅　万敏编著　　　国防工业出版社　2004 年 06 月

043　近可积无穷维动力系统

郭柏灵等著　　　国防工业出版社　2004 年 06 月

前　　言

20 世纪 90 年代以来，以 D. W. Mclanughlin 为首的一批著名数学家对近可积无穷维动力系统进行了一系列深入细致的研究，并于 1996 年取得理论上的突破，提出了扰动非线性 Schrödinger 方程同宿轨道的不变性。为了证明这一点，他们首先进行了详尽的数据计算，并对有限维截断情况进行了深入的分析，利用奇异摄动理论，整体可积孤立子理论，Fenichel 纤维理论，无穷维 Melnikov 函数以及偏微分方程的时空设计，得到了这一重要理论成果，并在空间离散情况下，利用 Conley-Moser 条件或 Silrikov 定理证明 Smale 马蹄的存在性。这是从理论上对无穷维动力系统理论研究的进一步深入和重大进展，也可以说是开拓了一个新的研究领域，它将有助于开展具扰动 Hamilton 系统混沌的研究。我们对这些重大结果和有关文章在讨论班上作了长期的报告和讨论，并在此基础上取得一些新的成果。本书的写作意图，旨在让读者在了解近可积系统物理背景的基础上，用比较明了的深入浅出的方法和尽量少的篇幅，来介绍以 D. W. Mclanughlin 为首的数学家研究近可积动力系统的主要典型方法以及所得到的最新结果，其中包括我们自己的研究成果，以便让读者从浩瀚冗长的文献中解脱出来，在阅读本书的基础上，可直接地较快地开展这方面的研究工作。

由于作者水平所限，书中一定有一些不当和错误之处，敬请读者提出，批评指正。

我们对常谦顺，井竹君教授的认真审阅以及参加讨论班成员的共同努力表示衷心感谢！

郭柏灵

2003 年春节前夕

目　录

第一章　近可积动力系统的混沌现象

这一章主要考察近可积动力系统如何从孤立子状态过渡到混沌状态，采取了微扰分析的方法，并为以后某些章节数值计算中出现的混沌现象做一些粗略的分析。

1.1　孤立子扰动理论的直接方法

考察当扰动项趋于零时，具有孤立子解的某些近可积系统。

(a) 非线性场论模型

$$u_{tt} - u_{xx} - Au + Bu^3 = \varepsilon R(u) \tag{1.1.1}$$

(b) Zakharov 方程组

$$\begin{cases} i\Psi_t + \Psi_{xx} + \eta\Psi = \varepsilon R_1(\Psi, u) \\ \eta_{tt} - \eta_{xx} = 2(|\Psi|^2)_{xx} + \varepsilon R_2(\Psi, u) \end{cases} \tag{1.1.2}$$

它描写高频波和低频波的相互作用，这里 $\Psi(x,t)$ 表示高频场的复包络，$\eta(x,t)$ 为低频场；

(c) 双重 Sine-Gordon 方程(以下简称 SG 方程)

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin\varphi + h\sin\frac{\varphi}{2} = \varepsilon R(\varphi)$$

再考察如下一阶偏微分方程组

$$M(\varphi, \varphi_t, \nabla\varphi, \tau, \rho, \varepsilon) = 0 \tag{1.1.3}$$

其中 φ 为向量函数，$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N)$，$\varepsilon \ll 1$，$\tau = \varepsilon t$，$\rho = \varepsilon x$。

我们研究方程组(1.1.3)特殊定常解的发展，当 $\varepsilon = 0$ 时具有

形式

$$\varphi = \varphi^{(0)}(\xi, A), \quad \xi = kx - \omega t \tag{1.1.4}$$

其中 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为任意常向量，且

$$\varphi^{(0)}(\xi, A) = \varphi_{\pm}^{(0)}, \quad \xi \to \pm \infty$$

小参数方法的主要思想是寻找形式的渐近级数解

$$\varphi(x, t) = \varphi^0(\xi, A, \rho, \tau) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n \varphi^{(n)}(\xi, \rho, \tau) \tag{1.1.5}$$

这里 N 是展开的阶数，$\varphi^{(n)}$ 为慢变元 ρ 和 τ 的函数。

类似于非线性扰动理论中的 Bogolubov-Krylov 方法，将展开式(1.1.5)代入初值方程组(1.1.3)，再比较 ε 的同阶项，可得到修正项 $\varphi^{(n)}$ 满足的线性方程组

$$\mathrm{L}\varphi^{(n)} = H^{(n)}, \quad \mathrm{L} = \frac{\partial M^{(0)}}{\partial \varphi_\xi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\partial M^{(0)}}{\partial \varphi}$$

$$M^{(0)} = M(\varepsilon = 0, \varphi = \varphi^{(0)})$$

$$H^{(1)} = -\frac{\partial M}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial M}{\partial \varphi_\tau}\varphi_\tau^{(0)} - \frac{\partial M}{\partial \nabla\varphi}\nabla_\rho \varphi^{(0)} \tag{1.1.6}$$

从式(1.1.6)得出解 $\varphi^{(n)}$ 具有形式

$$\varphi^{(n)} = Y(C^{(n)} + \int_0^\xi \mathrm{d}\xi Y H^{(n)}) \tag{1.1.7}$$

其中 $C^{(n)} = \mathrm{const}$，Y 是齐次方程组

$$\mathrm{L}Y = 0, \qquad Y^+ = Y^{-1}[\partial M / \partial \varphi_\xi]^{-1} \tag{1.1.8}$$

的解。注意到 Y_i 能从已知的 $\varphi^{(0)}$ 在初始方程组中通过变元 ξ 和 A 得到

$$Y_1 = \varphi_\xi^{(0)}, \; Y_i = \varphi_{A_i}^{(0)}, \; i = 1, 2, 3, \cdots, m+1 \tag{1.1.9}$$

展开式(1.1.5)的存在性必须加上边界条件，这个级数的项可由计算式(1.1.7)得到。在式(1.1.7)中含有指数增加项 Y_i，因此为了得到有界解有两个途径：

(1) 当函数 $Y^+ H^{(n)}$ 是奇的，解 $\varphi^{(n)}$ 是有界的，仅当常数 $C_\alpha^{(n)}$ 满足关系

$$C_\alpha^{(n)} = \int_0^\infty \mathrm{d}\xi Y_\alpha^+ H^{(n)} \tag{1.1.10}$$

其中 $Y^+ = Y^{-1}[\frac{\partial M}{\partial \varphi_\xi}]^{-1}$；

(2) 当函数 $Y^+ H^{(n)}$ 是偶的，必须满足条件

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\xi Y_\alpha^+ H^{(n)} = 0 \tag{1.1.11}$$

和解式(1.1.9)相近的，$\varphi^{(n)}$ 的长期性增长当 $\xi \to \pm 0$ 为有限的是排除以下条件

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} Y_i^+ H^{(n)} = 0, \quad i = l+1, l+2, \cdots, m+1 \tag{1.1.12}$$

现给出一个例子，说明我们的方法。考虑 Klein-Gorden 系统

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - F(\varphi) = \varepsilon R(\varphi) \tag{1.1.13}$$

其中 $F(\cdot)$ 为 φ 的任意非线性函数，至少具有一对零点，$R(\cdot)$ 为非线性算子，当 $\xi \to \pm\infty$，$R(\varphi^{(0)}) \to 0$。式(1.1.13)当 $\varepsilon = 0$ 时具有孤立子解

$$\varphi^{(0)} = \varphi[(1 - v^2)^{-1/2}\xi], \quad \xi = x - vt \tag{1.1.14}$$

应用展开式(1.1.5)，可找到线性算子 L

$$\mathrm{L} = (v^2 - 1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - F'(\varphi^{(0)}) \tag{1.1.15}$$

$\mathrm{L}y = 0$ 存在解，它当 $\xi \to \pm\infty$ 时衰减，记为 $y_1 = \varphi_\xi^{(0)}$。我们比较系数，得到同阶的解具有形式

$$\varphi^{(n)} = y_1(C_1^{(n)} + \int_0^\xi \mathrm{d}\xi' y_2 H^{(n)}) + y_2(C_2^{(n)} + \int_0^\xi \mathrm{d}\xi' y_2 H^{(n)}) \tag{1.1.16}$$

其中

$$y_2 = \varphi_\xi^{(0)}\int_0^\xi d\xi'[\varphi_{\xi'}^{(0)}]^{-2}$$

为了保证 $\varphi^{(n)}$ 的有界性,充分必要条件是满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\varphi_\xi^{(0)}H^{(n)} = 0 \tag{1.1.17}$$

对 $n=1, H^{(1)} = \varphi_\xi^{(0)}\frac{dv}{dt} + 2v\varphi_{\xi t}^{(0)} + \varepsilon R(\varphi^{(0)})$,将此代入式(1.1.17),可得孤立子速度满足方程

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = -\frac{\varepsilon}{\langle\varphi_z^2\rangle}\int dz\varphi_z R(\varphi^{(0)})$$

$$z = \frac{\xi}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \langle\varphi_z^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz\varphi_z^2 \tag{1.1.18}$$

1.2 基于反散射变换的微扰理论

先考虑扰动 Sine-Gorden 方程单孤立子的发展

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u), \varepsilon \ll 1 \tag{1.2.1}$$

应用反散射变换,式(1.2.1)在 $\varepsilon = 0$ 的 Lax 对为

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}i\{[\lambda - (\frac{1}{4\lambda})\cos u]\sigma_3 - (\sigma_2/4\lambda)\sin u + \frac{1}{2}\sigma_1(u_x - u_t)\} \tag{1.2.2}$$

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}i\{[\lambda + (\frac{1}{4\lambda})\cos u]\sigma_3 + (\sigma_2/4\lambda)\sin u + \frac{1}{2}\sigma_1(u_x - u_t)\} \tag{1.2.3}$$

其中 σ_k 为 Pauli 矩阵,λ 为谱参数,Jost 参数 $a(\lambda)$,$b(\lambda)$和算子的离散谱 λ_n,b_n 为散射数据,它们对时间 t 的依赖关系为

$$\begin{cases} a(\lambda,t) = a(\lambda,0), & b(\lambda,t) = b(\lambda,0)\exp[-2i\omega(\lambda)t] \\ \lambda_n(t) = \lambda_0(t), & b_n(\lambda,t) = b_n(\lambda_n,0)\exp(-2i\omega t) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

从这些资料可确定位势 $u(x,t)$。当 $\varepsilon \neq 0$ 时,能建立扰动理论,利用式(1.2.1)可得到散射数据的导数

$$\frac{d}{dt}a(\lambda,t) = -\frac{1}{4}i\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} dxR(u)W(\psi,\sigma_1\varphi) \tag{1.2.5}$$

$$\frac{d}{dt}b(\lambda,t) = -2i\omega(\lambda)b(\lambda,t) - \frac{1}{4}i\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} dxR(u)W(\psi,\sigma_1\varphi) \tag{1.2.6}$$

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = \frac{\frac{1}{4}i\varepsilon}{a'(\lambda_n)}\int_{-\infty}^{\infty} dxR(u)W(\psi(\lambda_n),\sigma_1\varphi(\lambda_n)) \tag{1.2.7}$$

$$\frac{db_n}{dt} = -2i\omega(\lambda_n)b_n - \frac{\frac{1}{4}i\varepsilon}{a'(\lambda_n)}\int_{-\infty}^{\infty} dxR(u)W(\sigma_1\varphi(\lambda_n),\varphi_n' - b_n\psi_n') \tag{1.2.8}$$

其中 $W(\psi,\varphi)$为 Wronski 行列式,ψ 和 φ 为 Jost 函数。在单孤立子的情况(kink 或 antikink),$\sigma = \pm 1$

$$u_s(z) = 4\arctan h\exp\sigma z, z = (x-\xi)/\sqrt{1-v^2}$$

$$\lambda = i\nu, C_1 = b_1/a'(i\nu) = -2\sigma\nu\exp(\xi/\sqrt{1-v^2})$$

Jost 函数具有形式

$$\psi_s = e^{ik(\lambda)x}\begin{pmatrix}\lambda + i\nu\tanh z \\ \sigma\nu\operatorname{sech} z\end{pmatrix}(\lambda + i\nu)^{-1}$$

$$\varphi_s = e^{-ik(\lambda)x}\begin{pmatrix}-\sigma\nu\operatorname{sech} z \\ \lambda - i\nu\tanh z\end{pmatrix}(\lambda + i\nu)^{-1} \tag{1.2.9}$$

其中 $a_s = (\lambda - i\nu)/(\lambda + i\nu)$,$b_s(\lambda) = 0$。在绝热近似下,我们得到孤立子参数的方程

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\varepsilon}{4}\sigma(1-v^2)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty} dzR(u_s(z))\operatorname{sech} z \tag{1.2.10}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = v - \frac{1}{4}\varepsilon\sigma(1 - v^2)\int_{-\infty}^{\infty} dz R(u_s(z))\mathrm{sech} z \quad (1.2.11)$$

现考虑"呼吸子"情况，此时"呼吸子"解为

$$\varphi_B(x) = -4\arctan\left(\frac{\nu\cos\varphi}{\eta\cosh z}\right) \quad (1.2.12)$$

$$\varphi = \theta(z) - (\eta/\nu)vz, \quad z = \nu(x - x_0)/(|\xi|\sqrt{1 - v^2})$$

$$v = \frac{1 - 4|\xi|^2}{1 + 4|\xi|^2}, \quad \xi = \eta + i\nu, \quad \eta, \nu > 0$$

$$\frac{dx_0}{dt} = v, \quad \frac{d\theta}{dt} = (\eta/|\xi|)(1 - v^2)^{1/2} \quad (1.2.13)$$

呼吸子的参数方程为

$$\frac{d\nu}{dt} = \varepsilon(1 - v^2)^{1/2}(4\cos\nu)^{-1}I_1 \quad (1.2.14)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\varepsilon(1 - v^2)^{3/2}(4\cos\nu)^{-1}I_2 \quad (1.2.15)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos\nu(1 - v^2)^{1/2} - \varepsilon(1 - v^2)^{1/2}[v\cot\nu I_3 + \cos^2\nu(1 - v^2)I_4] - I_3(4\sin\nu\cos^2\nu)^{-1} \quad (1.2.16)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = v + \varepsilon(1 - v^2)(I_3 - v\tan\nu I_4)(2\sin\nu)^{-2} \quad (1.2.17)$$

其中

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh z\sin\Phi}{\cosh^2 z + A^2}R(\varphi_B(z))dz$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh z\sin\Phi}{\cosh^2 z + A^2}R(\varphi(z))dz$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\cosh z\sin\Phi}{\cosh^2 z + A^2}R(\varphi_B(z))dz$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\sinh z\cos\Phi}{\cosh^2 z + A^2}R(\varphi(z))dz$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh z\cos\Phi}{\cosh^2 z + A^2}R(\varphi_B(z))dz, A = \tan\nu\cos\varphi$$

$$\Phi = \frac{\mathrm{Re}\lambda}{|\lambda|}\frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} + \Phi_0$$

一个 kink 解的 Jost 函数为

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{e^{ikx}}{\lambda + i\nu}\begin{pmatrix} -\sigma\nu\mathrm{sech} z \\ \lambda - i\tanh z \end{pmatrix} \\ \psi = \dfrac{e^{ikx}}{\lambda + i\nu}\begin{pmatrix} \lambda + i\nu\tanh z \\ \sigma\nu\mathrm{sech} z \end{pmatrix} \end{cases} \quad k = \frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{4\lambda}) \quad (1.2.18)$$

考虑多维情况

$$\varphi_{tt} - \varphi_{rr} + \sin\varphi = (\frac{2}{r})\varphi_r + \varepsilon R(\varphi) \quad (1.2.19)$$

$$v = 0, \rho(0) = \rho_0, 当\ \rho_0 \gg 1\ 时, \varphi_t = \rho_0 cn(\sqrt{2}t/\rho_0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

拟平面解具有形式

$$\varphi_\xi = -4\sigma\arctan\exp(-z), \sigma = \pm 1, z = (1 - v^2)^{1/2}(r - \rho) \quad (1.2.20)$$

其中 r 为径向坐标，参数满足方程

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{\rho}(1 - v^2) + a'(\rho)(1 - v^2)^2 \quad (1.2.21)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = v[1 + a(\rho)(1 - v^2)] \quad (1.2.22)$$

$$a(\rho) = \frac{\sigma}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial W(\varphi_\xi)}{\partial\varphi_\xi}\frac{z}{\cosh z}dz, \quad \frac{\partial W}{\partial\varphi} = \varepsilon R$$

其次考虑非线性 Schrödinger 方程

$$iq_t + q_{xx} + |q|^2 q = \varepsilon R(q) \quad (1.2.23)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时，具有单孤立子解

$$q_s(x,t)=2\eta\operatorname{sech}2\eta(x-x_0+4\xi t)\cdot$$
$$\exp[-2i\xi x-4i(\xi^2-\eta^2)t-i\varphi_0] \quad (1.2.24)$$

其中 η 为孤立子振幅, $v=-4\xi$ 为其速度,积分不变量为

(a) 量子数 N

$$N=\int_{-\infty}^{\infty}|q|^2\mathrm{d}x \quad (1.2.25)$$

(b) 场动量 P

$$P=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(q^*q_x-q_x^*q)\mathrm{d}x \quad (1.2.26)$$

(c) Hamilton 量 H

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}(|q_x|^2-|q|^4)\mathrm{d}x \quad (1.2.27)$$

对于单孤立子,将式(1.2.24)代入式(1.2.25)~式(1.2.27),可得

$$H=32\eta\left(\frac{1}{3}\eta^2-\xi^2\right),N=4\eta,P=8\xi\eta \quad (1.2.28)$$

单孤立子的 Jost 函数具有形式

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\ \psi^{(2)}\end{pmatrix}=\frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}}{\lambda-\xi+i\eta}\begin{pmatrix}\lambda-\xi+i\eta\tanh2\eta(x-x_0)\\ \eta\operatorname{sech}2\eta(x-x_0)\exp(-2i\xi x-i\varphi_0)\end{pmatrix} \quad (1.2.29)$$

$$\varphi(x,\lambda)=a(\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda),\quad a(\lambda)=\frac{\lambda-\xi-i\eta}{\lambda-\xi+i\eta} \quad (1.2.30)$$

$$\tilde{\psi}=\begin{pmatrix}-\psi^{(2)*}\\ \Psi^{(1)*}\end{pmatrix} \quad (1.2.31)$$

角作用量为

$$n(\lambda)=(1/\pi)\ln\frac{1}{|a(\lambda)|^2}$$
$$\varphi(\lambda)=\arg b(x),\quad N_k=2\lambda_k \quad (1.2.32)$$

$$\phi_k=\ln\frac{1}{b_k},\quad k=1,2,3,\cdots,N \quad (1.2.33)$$

由绝热方程可得

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\operatorname{Re}^{i\theta}\operatorname{sech}z\sqrt{a_n}bz \quad (1.2.34)$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\operatorname{Re}^{-i\theta}\operatorname{sech}z \quad (1.2.35)$$

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}=-4\xi+\frac{\varepsilon}{4\eta^2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}zRe^{-i\theta}z\operatorname{sech}z \quad (1.2.36)$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}=2\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+4(\xi^2-\eta^2)-\frac{\varepsilon}{2\eta}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\operatorname{sech}z(1-z\tanh z)\operatorname{Re}^{-i\theta} \quad (1.2.37)$$

$$\theta=(\xi/\eta)z+\delta$$

角动量取形式

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\operatorname{Im}\left(\frac{b(\lambda)}{\mathrm{d}(\lambda)}\{\varepsilon[\psi^{(2)*}(x,\lambda)]^2R(x)-\varepsilon^*[\psi^{(1)*}(x,\lambda)]^2R^*(x)\}\right) \quad (1.2.38)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=4\lambda^2+\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}(\lambda)}{b(\lambda)}\{\varepsilon^*[\psi^{(2)}(x,\lambda)]^2R^*(x)-\varepsilon[\psi^{(1)}(x,\lambda)]^2R(x)\}-2\varepsilon\psi^{(1)}(x,\lambda)\psi^{(2)*}(x,\lambda)R(x)\right) \quad (1.2.39)$$

1.3 在各种外力下 Sine－Gorden 方程孤立子的变化

1.3.1 SG 方程孤立子的运动

考虑如下 SG 方程

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi=f_0\cos\omega t \quad (1.3.1)$$

当 $f_0=0$ 时具有“扭结”(kink)孤立子解

$$\varphi_s = 4\arctan\{\exp[(x - vt)/\sqrt{1 - v^2}]\} \tag{1.3.2}$$

令

$$\varphi = \Phi + u(t) \tag{1.3.3}$$

其中 $\Phi(x,t)$为 x,t 的慢变函数,$u(t)$满足方程

$$u_{tt} + \sin u = f_0\cos\omega t \tag{1.3.4}$$

则 Φ 满足方程

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \sin\Phi = \frac{1}{2}u^2(t)\sin\Phi + u(1 - \cos\Phi) \tag{1.3.5}$$

考虑几种情况:

(1) 远离共振,$\omega \ll 1$。则得到 $u(t)$满足如下方程:

$$u_{tt} + u = f_0\sin\omega t, \quad u = \frac{f_0}{1 - \omega^2}\cos\omega t \tag{1.3.6}$$

且 $\varepsilon R = \frac{f_0}{1 - \omega^2}\cos\omega t(1 - \cos\Phi)$。代入扰动理论的绝热方程,能发现 Φ 孤立子运动像古典质点,具有一个调和模,强度为 $\tilde{f} = f_0/(1 - \omega^2)$。

(2) 靠近共振,$\omega = 1 + \Omega$。可得 $u \sim (f_0/2\Omega)\cos\omega t$。利用展开式的后面几项可得

$$u_{tt} + u - u^3/6 + \cdots = f_0\cos\omega t$$

此时,在感应和外场之间产生一个非线性共振。可用标准方法计算共振条件

$$a^2(\Omega + \frac{1}{16}a^2)^2 = f_0^2 \tag{1.3.7}$$

a 为振动振幅。

(3) 靠近共振,它们交叠在一起。对于方程(1.3.6),Hamilton 量等于

$$H_0 = \frac{1}{2}\dot{u}(t)^2 - \cos u \tag{1.3.8}$$

其中 $\dot{u}(t) = 2\text{cn}(t,k)$,$\text{cn}(x)$为 Jacobi 椭圆余弦函数,$k = (1 + H_0)/2$,当非线性共振的宽度 $\Delta w \geqslant$ 它们之间的距离 $\delta\omega$ 时,混沌将发生,此时在条件

$$8\pi\theta_0^2\exp(-\pi\theta_0/2) \geqslant 1 \tag{1.3.9}$$

满足时,$u(t)$变为随机函数,其中 $\theta_0 = (\frac{1}{r})\Omega/\omega_0$,$r$ 为整数。

为了分析 f_0 增加和阻尼值 ≈ 1 的问题,必须进行数值计算。计算表明由 kink 和呼吸子组成的状态,当 $f_0 > 0.9$ 时,随机运动产生,瞬时混沌 $\varphi(t)$产生,由此我们可以研究

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 + \Gamma u_t = f_0\cos\omega t, \quad f_0 \ll 1 \tag{1.3.10}$$

孤立子的运动。利用扰动理论,可得孤立子速度满足

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{3\varphi(t)}{\langle\Phi_z^2\rangle}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\Phi^2(z)\mathrm{sech}^2 z \tag{1.3.11}$$

其中 $\varphi(t)$满足方程

$$\varphi_{tt} - \varphi + \varphi^3 + \Gamma\varphi_t = f_0\cos\omega t$$

1.3.2 二波包 SG 孤立子的运动

考虑方程

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin\varphi + \alpha\varphi_t = -\varepsilon\sin(k_1 t - \omega_1 x)\varphi_{xx} \tag{1.3.12}$$

应用扰动理论可得孤立子运动速度 v 和中心位置 $\xi(t)$满足方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4}\varepsilon(1 - v^2)^{3/2}\frac{\omega_1^2\cos(k_1 t - \omega_1\xi)}{\sinh\pi\omega(1 - \frac{v^2}{2})^{1/2}/2} \tag{1.3.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = v + \frac{1}{4}\varepsilon(1 - v^2)^{3/2}\frac{\omega_1^2\cos(k_1 t - \omega_1\xi)/v}{\sinh\pi\omega(1 - \frac{v^2}{2})^{1/2}/2} \tag{1.3.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \varepsilon A\cos(k_1 t - \omega_1\xi)$$

$$A = -(\omega_1^2/4)\sinh\pi\frac{\omega}{2} \tag{1.3.15}$$

当 $\alpha \approx \alpha^*$ 时

$$\alpha^* = \left|\frac{\pi\omega_0^2[\operatorname{arccosh}(\omega\pi) - \operatorname{arcsinh}(\omega_0\pi)]}{A_r(1+\pi\omega/2)}\right|$$

混沌将会发生，其中 A_r 为行波的振幅。

用类似的方法考虑 SG 孤立子散落在混沌区的问题，作为一个例子，考虑 SG 孤立子散落在周期外力和具周期非均匀介质的情况

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + (1+\varepsilon\cos ux)\sin\omega t = f\sin\Omega t - \Gamma\varphi_t \tag{1.3.16}$$

计算可知

$$\varphi_s(x,t) = 4\arctan\{\exp[\pm(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]\} \tag{1.3.17}$$

满足方程

$$\varphi_{stt} - \varphi_{sxx} + \sin\varphi_s = f(1-\cos\varphi_s)\sin\Omega t - \varepsilon\cos ux\sin\varphi_s - \Gamma\varphi_t \tag{1.3.18}$$

可得孤立子速度 v 和质量中心位置 ζ 满足方程($\Omega^2<1$)

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt} = -(1-v^2)^{3/2}\left(\dfrac{\Gamma v}{\sqrt{1-v^2}} + \dfrac{\pi\varepsilon\omega^2\sin u\zeta}{4\sinh(\pi\omega/2)} - \dfrac{\pi}{8}f\sin\Omega t\right)\\ \dfrac{d\zeta}{dt} = v + \pi v(1-v^2)\varepsilon\omega\dfrac{4-\pi\omega\coth(\pi\omega/2)}{8\sinh(\pi\omega/2)}\cos u\zeta\\ \omega = k\sqrt{1-v^2}\end{cases} \tag{1.3.19}$$

这个方程组能用 Melnikov 方法进行分析，Melnikov 函数 $M(t_0)$ 等于

$$M(t_0) = 8\left(\frac{a}{u^3}\right)^{1/2} + \frac{\pi^2 f\sin\Omega t_0}{au\cosh(\pi\Omega/2\sqrt{au})}$$

$$a = \frac{\pi\varepsilon u^2}{\sinh(\pi u/2)} \tag{1.3.20}$$

当 $(16\Gamma\sqrt{au}/\pi^2 f)\cosh(\pi\Omega/2\sqrt{au}) < 1$ 时，$M(t_0)$ 变号，孤立子速度将变为时间 t 的随机函数。

1.3.3 含外力 SG 方程中三维 bubble 的随机动力学

球对称的 SG 方程为

$$\varphi_{tt} - \varphi_{rr} + \sin\varphi = (D/r)\varphi_r + \varepsilon R(\varphi) \tag{1.3.21}$$

其中 r 为球坐标，$D+1$ 为空间维数。令 $\varepsilon R(\varphi) = -\varepsilon(t)\sin\varphi$，$\varepsilon(t) = \varepsilon\sin\omega t$。当 $D=2$，$\varepsilon=0$ 时，可得 kink 解

$$\varphi_s(x,t) = 4\arctan\exp[(r-\rho)/\sqrt{1-v^2}] \tag{1.3.22}$$

具初始条件 $v=0$，$\rho(0)=\rho_0$，$\rho_0 \gg 1$。利用能量守恒可得到以下三维解：

$$\begin{cases}\rho(t) = \rho_0\operatorname{cn}(\sqrt{2}t/\rho_0, 1/\sqrt{2})\\ v^2 = 1-\rho^4/\rho_0^4 = \sqrt{2}\operatorname{sn}(\sqrt{2}t/\rho_0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})\cdot\\ \qquad\operatorname{cn}(\sqrt{2}t/\rho_0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})\end{cases} \tag{1.3.23}$$

其中 $\operatorname{cn}(z,1/\sqrt{2})$，$\operatorname{sn}(z,1/\sqrt{2})$ 表示具有模 $1/\sqrt{2}$ 的 Jacobi 椭圆函数。依扰动理论重写具 kink 参数满足的方程

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{2}{\rho}(1-v^2)\\ \dfrac{d\rho}{dt} = v + \dfrac{1}{8}\varepsilon v(1-v^2)^{1/2}\sin\omega t\end{cases} \tag{1.3.24}$$

自由 Hamilton 量为

$$H_0 = \ln(\rho^2\cosh p),\ p = \operatorname{arctanh} v \tag{1.3.25}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，系统可写成 Hamilton 形式

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial\rho},\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial p} \tag{1.3.26}$$

引入作用变量

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q$$

$$I(H_0) = \exp(-\frac{H_0}{2})F(\varphi,\frac{1}{\sqrt{2}})/$$

$$\sqrt{2}\pi - \mathrm{arctanhexp}(H_0)/2\pi \qquad (1.3.27)$$

其中 $F(\varphi,1/\sqrt{2})$ 为第二类椭圆积分。再考虑大的初始能量情况，$H_0\gg1$，从式(1.3.27)得

$$\begin{cases} I(H_0) \approx \frac{1}{2}A\exp(H_0) \\ A = F(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})/\sqrt{2}\pi = K(\frac{1}{\sqrt{2}})/\sqrt{2}\pi \\ H_0 = 2\ln(I/A), \quad \omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I} = \frac{2}{I} \end{cases} \qquad (1.3.28)$$

其中 $\omega(I)$ 为圆频率。

现回到初始方程组(1.3.24)，整个 Hamilton 形式为

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 \qquad (1.3.29)$$

扰动 Hamilton 量为

$$\varepsilon H_1 = -\frac{1}{8}\mathrm{sech}p\sin\omega t \qquad (1.3.30)$$

H_1 为变元 I 的函数，因

$$\mathrm{sech}p = \mathrm{cn}\left(\sqrt{2}\frac{t}{\rho_0},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \rho_0 = \frac{I}{A} \qquad (1.3.31)$$

则

$$H_1(I) = -\frac{1}{8}\mathrm{cn}^2\left(\frac{A\theta}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad (1.3.32)$$

以下的分析将扰动 Hamilton 量作 F 氏展开，利用公式

$$\mathrm{cn}^2(u,k) = \frac{E(k) - k_1^2K(k)}{k^2K(k)} + \frac{2\pi^2}{k^2K(k)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos 2nx$$

$$q = \exp[-\pi K'(k)/K(k)], u = 2K(k)x/\pi$$

可得

$$H_1(I) = -\left[\frac{1}{8}\alpha(1/\sqrt{2}) + \frac{\pi^2}{2K^2(1/\sqrt{2})}\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos(n\theta/2)\sin\kappa t\right] \qquad (1.3.33)$$

在条件

$$\frac{1}{2}n\omega(I) = \kappa, \quad \omega(I) = 2\kappa/n \qquad (1.3.34)$$

下，非线性共振发生。对 $n=1$ 我们有第一个非线性共振 $\kappa = \omega(I_0)/2$，I_0 为对应于共振频率作用量的值。定义共振之间距离 $\delta\omega$

$$\delta\omega = \omega_n - \omega_{n+1} = \frac{2\kappa}{n(n+1)} \approx \frac{2\kappa}{n^2} = \frac{2}{\kappa I_0^2} \qquad (1.3.35)$$

经计算，非线性共振局部域

$$\Delta\omega = 4\left|\varepsilon H_n\frac{\mathrm{d}\omega(I_0)}{\mathrm{d}I}\right|^{1/2} = \frac{4}{K^2(1/\sqrt{2})}\sqrt{\frac{\varepsilon\kappa}{I_0^3}}\exp(-\alpha\kappa/2I_0),$$

$$\alpha = \frac{\pi K'(\frac{1}{\sqrt{2}})}{K(1/\sqrt{2})} \qquad (1.3.36)$$

应用 Chirikov 法则，可找到 kink 运动的动力学行为随机条件

$$I_0^4 \gtrsim \frac{K^4(1/\sqrt{2})\exp(\alpha\beta)}{4\varepsilon\beta^3}, \quad \beta = \kappa/I_0 \qquad (1.3.37)$$

1.3.4 类似于 Fermi-Pasta-Ulam 问题 SG 孤立子

研究具有两个 δ 位势墙的 SG 孤立子动力系统，其中之一在空间周期振荡，波方程具有形式

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = -\varepsilon[\delta(x-L) + \delta(x+L+a\sin\omega t)]\sin\varphi,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad a \ll 1, \quad a \ll L, \quad a > \varepsilon \qquad (1.3.38)$$

孤立子速度 v 和孤立子中心位置 $\zeta(t)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\varepsilon\{(1-v^2)\mathrm{sech}^2[(\zeta - L)/\sqrt{1-v^2}]\cdot$$

$$\tanh[(\zeta - L)/\sqrt{1-v^2}] +$$

$$(1-v^2)\mathrm{sech}^2[(\zeta + L + a\sin\omega t)/\sqrt{1-v^2}]\cdot$$

$$\tanh[(\zeta + L + a\sin\omega t)/\sqrt{1-v^2}]\} \qquad (1.3.39)$$

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = v - \frac{1}{2}\varepsilon\zeta v\{\mathrm{sech}^2[(\zeta + L + a\sin\omega t)/\sqrt{1-v^2}]\cdot$$

$$\tanh[(\zeta + L + a\sin\omega t)/\sqrt{1-v^2}]\} \qquad (1.3.40)$$

为简化计,设孤立子速度足够小,$v^2 \ll 1$,则对孤立子中心位置有

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{H - 2\varepsilon(\alpha y + 1)/(y+\alpha)^2} \qquad (1.3.41)$$

其中 $\cosh^2\zeta = y$,$\cosh 2L = \alpha$。现研究在靠近分界面上孤立子的性态,这个分界面定义为

$$y_0 = \alpha - 2/\alpha, \quad H_s = \varepsilon\alpha^2/2(\alpha^2 - 1) \qquad (1.3.42)$$

其中 H_s 为在分界面上整个 Hamilton 量的值,从式(1.3.41)可得

$$\sqrt{H_s}(t - t_0) = -x + \frac{\alpha + y_0}{2\sqrt{y_0^2 - 1}}\cdot$$

$$\ln\left(\frac{y_0 - 1 + \sqrt{y_0 - 1}\tanh x}{y_0 - 1 - \sqrt{y_0 - 1}\tanh x}\right) \qquad (1.3.43)$$

为了研究这个问题的混沌状态,用 Melnikov 方法是方便的,Melnikov 函数 $M(t_0)$为

$$M(t_0) = \cos(\omega t_0 + \omega L + \varphi)\varepsilon a\pi\omega/\sinh(\pi\omega/2) \qquad (1.3.44)$$

1.3.5 外场作用下的呼吸子混沌动力学

考虑如下扰动 SG 方程

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = f(t) - \alpha\varphi_t \qquad (1.3.45)$$

其中 $\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0$ 为磁场流量,Φ_0 为磁流量子,$\Phi_0 = hc/2e$,f 为流密度,α 为系数,正比于结导率。当 $f = \alpha = 0$ 时,呼吸子可表为

$$\varphi_B = -4\arctan\{\sinh[r(t)/2]/\cosh x\} \qquad (1.3.46)$$

其中 $r(t)$为孤立子与反孤立子之间距离。设 $r(t) \gg 1$,用拟质点方法,可得呼吸子振荡的如下方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -8\exp(-r) + \frac{1}{2}\pi f(t) - \alpha\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad (1.3.47)$$

当 $\alpha = f = 0$ 时,振荡的能量等于

$$E = \frac{1}{2}p^2 + U(r), \quad U(r) = -8\exp(-|r|), p \equiv \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

当 $E < 0$ 时,存在一对孤立子-反孤立子的有界态,而当 $E > 0$ 时为自由态,呼吸子振荡可用如下公式描述:

$$r(t) = \ln[(8/E)\cos^2(\sqrt{\frac{1}{2}|E|}t)] \qquad (1.3.48)$$

采用角作用量坐标 I, θ,并设 $E < 0$,从式(1.3.48)可得振荡频率

$$\omega(H_0) = \frac{\sqrt{H_0}}{8\arccos\sqrt{\frac{1}{8}H_0}}, \quad E = H_0 \qquad (1.3.49)$$

于此可找到作用量

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,\mathrm{d}r =$$

$$I_s\left[\sqrt{1 - \frac{1}{8}|H|} - \sqrt{\frac{1}{8}|H|}\arctan\left(2\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{8}|H|}/\sqrt{|H|}\right)\right] \qquad (1.3.50)$$

其中 I_s 为在分界面上的作用量,混沌发生在分界面附近。考虑区域

$$\Delta I = |I - I_0| \ll I_s, \quad I_s = 8/\pi, \quad H(I_s) = 0$$

$$H(I) \approx -2^7\pi^2(1 - I/I_s)^2$$

可知

$$\omega(I) \approx 2^8\pi^2(1 - I/I_s), \quad \theta = \omega(I)t + \theta_0 \quad (1.3.51)$$

运动方程为

$$\frac{dI}{dt} = -f_0\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega(I) + f_0\frac{\partial V}{\partial I}$$

整个 Hamilton 量作为 I,θ 的函数等于

$$H(I,\theta) = H_0(I,\theta) + f_0V(I,\theta) =$$

$$H_0(I,\theta) + f_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m\exp(im\theta + in\Omega t) \quad (1.3.52)$$

现分析系数 V_{ms} 在分界面附近的性态($I\to I_s$)。展开 V_{ms} 为级数,并估计展开系数的性态,可得 V_{ms} 具下列表达式

$$V_{ms} = (-1)^m/m, \quad m \gg 1 \quad (1.3.53)$$

考虑在周期外力作用下呼吸子的非线性共振,共振条件为

$$2m\omega(I) = \Omega \quad (1.3.54)$$

在分界面附近共振的距离为

$$\delta\omega = |\omega_{m+1} - \omega_m| = \Omega/2m^2 \approx 2\omega^2/\Omega \quad (1.3.55)$$

利用估计式(1.3.53)可得非线性共振的宽度为

$$\Delta\omega = \max|\omega(I) - \omega(I_0)| = \left|4f_0V_{ms}\frac{d\omega}{dI}\right|^{1/2} \approx \left(\frac{16}{\pi I_s}\frac{f_0\omega}{\Omega}\right)^{1/2} \quad (1.3.56)$$

当非线性共振交叠时,耦合孤立子-反孤立子系统随机振荡由 Chirikov 得到,由式(1.3.55)和式(1.3.56)可得混沌产生条件

$$2^7f_0\Omega/\pi^2I_s^2\omega^3(I) > 1 \quad (1.3.57)$$

对于任意 f_0,随着参数 K 增加,Ω 和 I 趋于分界面($\omega\to 0, I\to I_s$)。当 $\omega = \tilde{\omega}$,一个随机层形成,它使呼吸子振荡是随机的

$$\tilde{\omega} \leqslant (f_0\Omega)^{1/3}2^{7/3}/(\pi^2I_s)^{1/3} \quad (1.3.58)$$

由此可得混沌出现条件

$$K\mu \geqslant 1, \quad \mu = [1 - \exp(-\alpha)]/\alpha \quad (1.3.59)$$

当 $\alpha \gg 1$ 时,有 $K/\alpha \gg 1$。

1.3.6 在 SG 系统中具参数激发态的混沌动力学

考虑具参数扰动 Sine-Gordon 系统

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + (1 + \varepsilon_0\cos\Omega t)\sin\varphi = 0 \quad (1.3.60)$$

设初始态为单个呼吸子,当 $\varepsilon = 0$ 时,呼吸子解具有形式

$$\begin{cases} \varphi(z) = -4\arctan\left(\dfrac{\nu\cos\varphi}{\eta\cosh z}\right), \varphi = \theta(z) - (\eta/\nu)vz \\ z = \dfrac{\nu(x - x_0)}{|\zeta|\sqrt{1 - v^2}}, v = \dfrac{1 - 4|\zeta|^2}{1 + 4|\zeta|^2} \\ \dfrac{dx_0}{dt} = v, \dfrac{d\theta}{dt} = (\eta/|\zeta|)(1 - v^2)^{1/2} \\ \zeta = \eta + i\nu, \eta, \nu > 0 \end{cases} \quad (1.3.61)$$

这里 v 为呼吸子速度,$d\theta/dt$ 为呼吸子振荡频率。运用扰动理论于呼吸子,可得慢变呼吸子参数 $\gamma(t) = \arctan(\nu/\eta)$ 和 $\theta(t)$ 的运动方程

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{8\varepsilon(t)\sin\theta}{\cos\gamma(1 + A^2)^2}\left(3A + \frac{1 - A^2}{(1 + A^2)^{1/2}}\operatorname{arcsinh}A\right) \quad (1.3.62)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{8\varepsilon(t)\cos^2\theta}{\cos^3\gamma(1 + A^2)^2}\left(2 + \sin^2\gamma\sin^2\theta + \frac{A\operatorname{arcsinh}A}{(1 + A^2)^{1/2}}(\tan^2\gamma\cos^2\varphi - 2)\right) \quad (1.3.63)$$

其中 $A = \tan\gamma\cos\theta$。式(1.3.62),式(1.3.63)是 Hamilton 的,它的 Hamilton 量为

$$H(\gamma, t) = H_0 + V_{int}, H_0 = \sin\gamma$$

$$V_{int} = -\frac{8\sin\Omega t}{\sin\gamma(1+A^2)}\left(A + \frac{\operatorname{arcsinh}A}{\sqrt{1+A^2}}\right) \qquad (1.3.64)$$

呼吸子振荡频率为 $\omega(\gamma) = \mathrm{d}H_0/\mathrm{d}\gamma = \cos\gamma$，运动方程(1.3.62)和式(1.3.63)可取形式

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\theta},\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega(\gamma) + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial\gamma} \qquad (1.3.65)$$

首先展开扰动 Hamilton 量 V 为 F 氏级数

$$V(\gamma,\theta,t) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} V_m(\gamma)\exp(im\theta + i\Omega t) \qquad (1.3.66)$$

当 $M\omega(\gamma) + \Omega = 0$ 时，呼吸子产生非线性共振。

$$\Delta\gamma = \max|\gamma - \gamma_0| = 4\left|\varepsilon V_m\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\gamma}\right)^{-1}\right|^{1/2} \qquad (1.3.67)$$

$$\Delta\omega = \max|\omega - \omega_0| = \Delta\gamma\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\gamma} = 4\left|\varepsilon V_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\gamma}\right|^{1/2} \qquad (1.3.68)$$

我们寻求非线性共振宽度于两种情况：小振幅呼吸子($\gamma\to0$)和弱有界呼吸子($\gamma\to\gamma_s=\pi/2$)。

(a) 小振幅呼吸子($\gamma\to0$)。当 $m=1$，$\omega(\gamma_1)=\Omega/2$，$\gamma_1=\arccos(\Omega/2)$时共振，当 $\gamma\to0$ 时 V_m 有估计

$$V_m \approx (-1)^{m/2}\frac{1}{8}\tan^2\gamma \qquad (1.3.69)$$

可得

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_s} = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon^{1/2}\sin^{1/2}\gamma}{\pi\cos\gamma},\quad \Delta\omega = \sqrt{2}\varepsilon_0^{1/2}\sin^{3/2}\gamma/\cos\gamma$$

(b) 弱有界呼吸子($\gamma\to\pi/2$)。此时 $H_0(\gamma_s)=1, \omega(\gamma_s)=0$ 当 $m\gg1, m\ll\tan\gamma$，可得 V_m 的估计

$$V_m \approx (-1)^m/a \qquad (1.3.70)$$

从式(1.3.68)和式(1.3.70)可得

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_s} = \frac{8\varepsilon_0^{1/2}\cos^{1/2}\gamma}{\pi\sin\gamma},\quad \Delta\omega = \varepsilon_0^{1/2}\cos^{1/2}\gamma \approx 4\sqrt{\varepsilon_0\omega} \qquad (1.3.71)$$

在分界面附近，共振间的距离随 m 增加而减少，事实上

$$\delta\omega = \max|\omega_{m+1} + \omega_m| = \Omega/2n^2 \approx 2\cos^2\gamma/\Omega \qquad (1.3.72)$$

设非线性共振的宽度大于共振间的距离，此时具有随机特征，由 Chirikov 法则，条件为

$$K = (\Delta\omega/\delta\omega)^2 \gtrsim 1 \qquad (1.3.73)$$

由式(1.3.71)～式(1.3.73)可得

$$K = 4\varepsilon_0\Omega^2/\cos^3\gamma > 1 \qquad (1.3.74)$$

1.3.7 扰动的 SG 方程孤立子晶格的随机性质

考虑以下 SG 方程

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = \varepsilon[\alpha\varphi_t - \gamma(\varphi_t)^3 + A_0\sin(\omega t - kx)] \qquad (1.3.75)$$

其中 $\alpha\varphi_t$ 描述介质的非平衡态，$\gamma(\varphi_t^3)$为非线性阻尼，A_0 为低频波的振幅。当 $\varepsilon=0$ 时，式(1.3.75)具有孤立子解

$$\varphi(\xi) = 4\arctan(\pm\exp\xi/\sqrt{1-v^2}),\ \xi = x - vt \qquad (1.3.76)$$

当 $\varepsilon\ll1$ 时，可令

$$\Phi = \varphi_0 + \varphi_b,\qquad \varphi_b = \frac{A_0}{1+k^2-\omega^2}\sin\omega t$$

应用孤立子扰动理论可得孤立子的速度方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\alpha v}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{8}{3}\frac{\gamma v^2}{(1-v^2)^{3/2}} + A\sin(\omega t - kx)$$

$$A = \frac{A_0}{1+k^2-\omega^2} \qquad (1.3.77)$$

可得到孤立子在 $y = x - v_\varphi t, v = k/\omega, v^2, v_\varphi^2\ll1$ 质量中心的相对坐标方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}=[\alpha^2-3(\frac{8}{3}+\alpha)v_\varphi^2]\frac{dy}{dt}-(\frac{8}{3}\gamma+\alpha)(\frac{dy}{dt})^3-A\sin ky+$$
$$\frac{3}{2}(\frac{dy}{dt})^3\sin ky+3Av_\varphi(\frac{dy}{dt})\sin ky-(\frac{8}{3}\gamma+\alpha)v_\varphi^3-$$
$$3(\frac{8}{3}\gamma+\alpha)v_\varphi(\frac{dy}{dt})^3+\alpha v_\varphi \qquad (1.3.78)$$

我们看到孤立子在波 $A\sin ky_0=\alpha v_\varphi+O(v_\varphi^2)$作用下靠近平衡态附近振荡。

对于振荡的小振幅 $s=y-y_0$ 有方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}-[\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}(\frac{ds}{dt})^2]\frac{ds}{dt}+\frac{3}{2}kAs(\frac{ds}{dt})^2-Ak^3/6s^2+Aks\approx 0,$$
$$\tilde{\alpha}=(\frac{8}{3}\gamma+\alpha)v_\varphi^2-\alpha,\qquad \tilde{\beta}=\frac{8}{3}\gamma+\alpha>0 \qquad (1.3.79)$$

当 $\alpha<\alpha_{crit}=\frac{8}{3}\gamma v_\varphi^2/(1-v_\varphi^2)$时,振荡是阻尼的。当 $\alpha>\alpha_{crit}$时振荡是增加的,孤立子离开位置开始相互碰撞。考虑孤立子的相互作用是弱的,且 $y_{i+1}-y_i\approx L=2\pi/kl(l=1,2,3,\cdots)$,$|s_{j+1}-s_j|=|y_{i+1}-y_i|-L\ll L$,$|s_i|\ll 1$,可得第 i 个孤立子位置的方程

$$\ddot{s}_j=\tilde{\alpha}\dot{s}_j-\frac{3}{2}\Omega^2s_j\dot{s}_j^2+\frac{1}{6}k^2\Omega^2s_j^2-\Omega^2s_j+$$
$$2e^{-L}(s_{j+1}+s_{j-1}-2s_j),\qquad \Omega^2=A_k$$

引入新变元

$$\begin{pmatrix}\dot{s}_j\\ s_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\omega\\ 1\end{pmatrix}a_j(t)(\tilde{\alpha}/3\beta\Omega^2)^{1/2}e^{i\Omega t}+c.c.$$

对时间作平均可得如下方程组:

$$\frac{da_j}{dt}=a_j-(1+i\beta)|a_j|^2a_j+(1-iC)(a_{j+1}+a_{j-1}-2a_j),$$
$$\beta=k(3A+k)[4(Ak)^{1/2}(4\gamma+\frac{3}{2}\alpha)]^{-1},$$

$$C=2\exp(-2\pi l/k)\{(Ak)^{1/2}[(\frac{8}{3}\gamma+\alpha)(\omega/k)^2-\alpha]\}^{-1},$$
$$t\to 2t[\alpha-(\frac{8}{3}\gamma+\alpha)^3(\omega/k)^2]^{-1} \qquad (1.3.80)$$

我们可以分析式(1.3.80)的参数区,使之产生混沌态。

1.4 多种形式外力和阻尼下非线性 Schrödinger 方程孤立子的变化

1. 考虑如下形式的非线性 Schrödinger 方程(以下简称 NLS)

$$iq_t+q_{xx}+|q|^2q=i\mu(q+q_{xx})-i\gamma|q|^2 \qquad (1.4.1)$$

这是描写拟多种单色波的振幅方程。分析表明,解 $q=\sqrt{\frac{1}{2}\mu}\exp(i\mu t/\gamma)$对于具波数

$$k<\sqrt{2\mu(1-\mu\gamma)/\gamma(1+\mu^2)} \qquad (1.4.2)$$

的周期扰动是不稳定的,当 $\mu,\gamma\ll 1$ 时,存在定常解。一个孤立子

$$q_s=\frac{A_0\exp[iA_0^2t/2+i\nu t/4+i\nu(x-\nu t)/2]}{\cosh[A_0(x-\nu t)/2]} \qquad (1.4.3)$$

其中 $A_0=\sqrt{6/(1+4\gamma/\mu)}\ (\nu=0)$,初始波包变成为孤立子,它的运动速度减少,振幅趋于 A_0。能证明孤立子的相互作用,孤立子的周期波列为稳定的定常态。对 $\mu,\gamma>1$,数值结果表明式(1.4.1)的孤立子进入湍流态。

2. 周期位势下 NLS 孤立子的随机动力学

考虑如下 NLS

$$iq_t+\frac{1}{2}q_{xx}+|q|^2q+i\Gamma q=R_i(q,x,t) \qquad (1.4.4)$$

考虑三种特殊的扰动:

(a) $R_1=\frac{1}{2}f(x)\psi(t)q$,它对应于孤立子在非均匀介质中传播;

(b) $R_2 = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$，此时一个周期外力和耗散作用于 NLS 孤立子；

(c) $R_3 = \varepsilon_1\exp(i\omega_1 t) + \varepsilon_2\exp(i\omega_2 t)$，此时有一个或两个波作用在孤立子上。

首先研究情况(a)，$f(x) = \sin\lambda x$，它对应于在周期调制中的介质运动。先考察单个孤立子解

$$q_s(z,t) = 2q(t)\mathrm{sech}z\exp(i(\mu/\nu)z + i\delta),$$
$$z = 2\eta[x - \xi(t)] \tag{1.4.5}$$

利用孤立子的扰动理论可得

$$\begin{cases} \eta = \eta_0, \quad \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\varepsilon\pi\lambda^2}{8\eta_0\sinh(\pi\lambda/4\eta_0)}\psi(t)\cos\lambda\xi \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \mu, \quad \dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = \mu^2 - \eta_0^2 + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{1.4.6}$$

进一步选取 $\psi(t) = 1 + \varepsilon_1\sin\alpha t$，起始时振幅不改变，从式(1.4.4)可得孤立子质量中心位置方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = -a(1 + \varepsilon_1\sin\alpha t)\sin\xi,$$
$$a = \frac{\varepsilon\pi\lambda^3}{8\eta_0\sinh(\pi\lambda/4\eta_0)} \tag{1.4.7}$$

寻求 Melnikov 函数 $M(t_0)$

$$M(t_0) = -\pi\varepsilon\alpha^2\sin(\alpha t_0)/\sin k(\pi\alpha/2) \tag{1.4.8}$$

易知 $M(t_0)$具有无穷多个零点，它对应于异宿轨线相交的无限集。从式(1.4.8)可知，在分界面附近存在一个随机层，随机层的面宽度当 $\alpha \approx 0.74$ 时最大。数值计算表明，当 $\varepsilon = 0.6$，$\alpha = 2$ 时，系统是随机的，当 α 从 0 增加到 $\alpha_{cr} = 0.6$，倍周期分叉产生，随之有 Feigenbaum 法则。

当周期场和阻尼影响到孤立子时，NLS 的孤立子变成具有随机性。分析是简单的，如果选取周期场为具有周期 δ 函数的无穷序列

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2|q|^2)q + i\varepsilon q_{xx} -$$
$$i\frac{\varepsilon_0}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{1.4.9}$$

注意到 $f(t) = -\frac{\varepsilon_0}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{in\omega_0 T} = -\varepsilon_0\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$。

利用孤立子的扰动理论可得孤立子参数满足方程

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_{n+1} = \mathrm{e}^{-\Gamma}(\tilde{\eta}_n + \hat{\epsilon}_0\sin\psi_n) \\ \psi_{n+1} = \psi_n - \psi_{s0}T - K\sin\psi_n - \\ \quad 8T[(\eta_0\tilde{\eta}_n/\Gamma)(1 - \mathrm{e}^{-T})\nu_0\nu_H] \\ \tilde{\nu}_{n+1} = \tilde{\nu}_n - (\tilde{\nu}_0/\eta_0)\hat{\epsilon}_0\sin\psi_n \\ X_{n+1} = X_n - 4\nu_0 T + 4(\nu_0/\eta_0)\hat{\epsilon}_0 T\sin\psi_n - 4\tilde{\nu}T \end{cases} \tag{1.4.10}$$

这里 $\Gamma = 4\varepsilon_0 T$，$\eta = \eta_0 + \tilde{\eta}$，$\eta_0 = \sqrt{3\varepsilon_1/8\varepsilon_2}$为定常振幅，$\nu = \nu_0 + \tilde{\nu}$，$\hat{\epsilon}_0 = \frac{1}{2}\pi\varepsilon_0\mathrm{sech}(\pi\nu_0/2\eta_0)$，$\omega_{s0} = 4(\eta_0^2 + \nu_0^2)$，且

$$K = 8\eta_0\hat{\epsilon}T[(1 - \mathrm{e}^{-\Gamma})/\Gamma + (\nu_0/\eta_0)^2]$$

随机条件为 $K \gtrsim 1$，因 $\Gamma > 0$ 可得 $T \gg 1$。

混沌孤立子和长波长辐射能在具外力阻尼的 NLS 中出现，它描写在电容器中的等离子体波。考虑均匀等离子体在外力场作用下的波动方程

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = i\varepsilon\exp(i\omega t) - i\gamma q, \qquad \varepsilon, \gamma \ll 1 \tag{1.4.11}$$

在外力场中孤立子在共振区的发展，在扰动下出现辐射场和孤立子。为研究辐射的发展，应用孤立子的二阶扰动理论，当 $\omega = 1$，$\gamma = 0.1$和 0.268 时出现吸引子；当参数 ε 增加时，则存在倍周期分叉，这个序列导致混沌吸引子的出现($\varepsilon = 0.148$)。

再考虑 NLS 孤立子的发展，两个外调和波和阻尼的波动方程

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = i\varepsilon_1 e^{i\omega t} + i\varepsilon_2 e^{2i\omega t} + i\gamma q_{xx} \tag{1.4.12}$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma > 0$，扰动频率 $\omega > 0$。绝热方程描写单孤立子解在大时间($t \gtrsim \varepsilon^{-1}$)范围内的运动

$$q(x,t) = 2\eta \mathrm{sech} 2\eta \exp[i(\psi - \frac{\pi}{2})], \quad \psi_t = 4\eta^2 \tag{1.4.13}$$

将式(1.4.13)代入式(1.4.12)可得

$$\eta_t = -\frac{8}{3}\gamma\eta^3 - \frac{1}{2}\pi[\varepsilon_1 \sin(\omega t - \psi) + \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \psi)] \tag{1.4.14}$$

当 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.037$，$\gamma = 0.05$，$\omega = 1$，双周期分叉产生；当 $\varepsilon = 0.0401$，奇异吸引子产生。

考虑电场的包络方程

$$iq_z + 2q_{tt} + |q|^2 q + i\Gamma q = 0 \tag{1.4.15}$$

其中 $\alpha = \mathrm{sgn}|k_{\omega\omega}^{''}|$。设 $q_n(t, z=0) = A\sum_n \mathrm{sech}(t - nt_\tau)$，$t_\tau \gg 1$，边界条件具形式

$$q_{n+1}(t, z=0) = A\mathrm{sech}t + BG(q_n, L, t, t') \tag{1.4.16}$$

当 $A = 1.526$ 时，倍周期分叉发生；$A = 1.98$ 时，发生混沌态；$A = 2.25$ 时，奇异吸引子产生。

考虑具行波形式外力波的 NLS

$$iq_t + q_{xx} + |q|^2 q = \varepsilon^2 E_0 e^{i(2\omega_0 t - k_0 x)} \tag{1.4.17}$$

单个孤立子解为

$$q^{(0)} = \sqrt{2}\lambda\varphi^{(0)}(\zeta)e^{i(v\zeta/2+\varphi)} \tag{1.4.18}$$

其中 $\zeta = x - vt$，$\varphi = \omega t$，$\varphi^{(0)}(\zeta) = \mathrm{sech}\lambda\zeta$，$v$ 为孤立子速度，ω 为孤立子调制频率，$\sqrt{2}\lambda = \sqrt{2(\omega - v^2/2)}$ 为振幅。

1.5 KdV 扰动方程等的混沌动力学

1. 在周期非均介质中椭圆波的混沌态

考虑如下 KdV 方程

$$u_t + u_{xx} + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon F(x,t) \tag{1.4.19}$$

$\varepsilon = 0$ 时为椭圆波(cnoidal)，用来描写晶格孤立子

$$u = 3\alpha cn^2[\frac{1}{2}\sqrt{3}\alpha(1 + \sqrt{c/18\alpha^2})\xi, k]$$

$$k = 1 - (2c/9\alpha^2)^{1/2}$$

$$\xi = x - vt$$

$$k = 2\pi/L = \frac{1}{4}\pi\sqrt{3\alpha}\left(\log\frac{4}{(8c/9\alpha^3)^{1/4}}\right)^{-1}$$

展开 $u(x,t)$ 为 F 氏级数

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)e^{iknx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\theta(t)}e^{iknx} \tag{1.4.20}$$

在 k 空间的 Hamilton 量具有形式

$$H = \lim\frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(u_x^2 - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u^2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sum(ikn)^2 u_n u_{-n} - \frac{1}{6}\sum_{n_1+n_2+n_3} u_{n_1}u_{n_2}u_{n_3} - \frac{1}{2}\sum_n u_n u_{-n} \tag{1.4.21}$$

非线性波作用量等于

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint u'(c,u)\mathrm{d}u$$

Hamilton 量为

$$H = \bar{c} + kI - \frac{1}{2\pi}kv\int_{-L/2}^{L/2} u^2(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.4.22}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时，$\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega(H) = kv(H) \qquad (1.4.23)$

当 $\varepsilon \neq 0$ 时， $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \varepsilon v \sum_n (u_{-n}F_n + u_n F_{-n})$

非线性共振的距离为

$$\Omega = \omega^2/\nu, \nu = (m+1)\omega(H_{m+1})$$

共振宽度为

$$\delta\omega = \left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1}\delta H, \delta H \sim \left(\frac{\varepsilon v \omega \Phi_m a_m}{\nu \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}H}\right)^{1/2}$$

振幅 a_m 为 $\mathrm{sn}^2 z$ 在 F 氏展开式中的系数，产生混沌的条件依 Chirikov 法则，有 $K = (\delta\omega/\Omega)^2 \gg 1$，即 $\frac{\varepsilon \nu \Phi}{k^2 v^3} \gtrsim 1, \Phi \equiv \Phi(m = \nu/\omega)$。

2. Karamoto-Sivashinsky 方程

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0 \tag{1.4.24}$$

以 $u \sim \mathrm{e}^{ikx + i\sigma t}$ 代入式(1.4.24)，线性化可得色散关系

$$\sigma = \alpha k - \gamma k^4 + i\beta k^3 \tag{1.4.25}$$

我们看到调和振幅对于长波长是不稳定的，对于短波长是稳定的，最大增长率为 $k_{\max} = \sqrt{\alpha/2\gamma}$，可取 $\alpha = 10^{-2}, \beta = 0, \gamma = 5.066 \times 10^{-6}$ 或 $\beta = 4.84 \times 10^{-4}$。

当 $\beta u_{xxx} \approx uu_x \gg \alpha u_{xx} \approx \gamma u_{xxx}$，由式(1.4.24)可得扰动 KdV 方程，孤立子解

$$u = N_0 + N\mathrm{sech}^2\left[\left(\frac{N(\tau)}{12\beta}\right)^{1/2}\left(x - \int_0^t (N_0 + \frac{1}{3}N)\mathrm{d}t\right)\right] \tag{1.4.26}$$

依扰动理论，$N(\tau)$ 满足方程($\tau = \varepsilon t$)

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (4\gamma/189\beta^2)(21\alpha\beta/5\gamma - N)N^2 \tag{1.4.27}$$

$N_\infty = 21\alpha\beta/5\gamma$ 的解对应于稳定态，孤立子宽度为 $l = \sqrt{20\gamma/7\alpha}$，速度为 v。对于 $\beta = 2\times 10^{-3}$，可得 $N_\infty = 16.85, N_c = 16.64, v_T = 2.41, v_c = 2.37$。

第二章　某些数值计算结果及其分析

考虑具有阻尼的 Sine-Gordon 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon[-\alpha u_t + \Gamma\cos\omega t]$$

具周期边界条件

$$u(x + l, t) = u(x, t)$$

和扰动的非线性 Schrödinger 方程

$$-2iQ_\tau + Q_{yy} + (\frac{1}{2}QQ^* - 1)Q = i\varepsilon[\alpha Q - \beta Q_{yy} + \Gamma]$$

具周期边界条件

$$Q(y + \bar{l}, t) = Q(y, t)$$

对于具阻尼和外力的单摆方程

$$u_{tt} + \sin u = \varepsilon[-\alpha u_t + \Gamma\cos\omega t]$$

的混沌状态已经有了很多的研究。相应可积的 Sine-Gordon 方程和非线性 Schrödinger 方程可分别写成

(1) Sine-Gordon(SG)

$$\partial_t \boldsymbol{u} = J\,\mathrm{grad}H = \{\boldsymbol{u}, H\}$$

其中

$$H: \mathcal{F} \to R, H(u, v) = \int_0^l [\frac{1}{2}(v^2 + u_x^2) + 1 - \cos u]\mathrm{d}x$$

$$\{F, G\} \equiv (\mathrm{grad}F, J\,\mathrm{grad}G) = \int_0^l [\frac{\delta F}{\delta u}\frac{\delta G}{\delta v} - \frac{\delta F}{\delta v}\frac{\delta G}{\delta u}]\mathrm{d}x$$

(2) 非线性 Schrödinger(NLS)

$$-i\partial_\tau \boldsymbol{Q} = J\,\mathrm{grad}H = \{\boldsymbol{Q}, H\}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为向量,

$$H:\mathscr{T}\to R, H(Q,Q^*) = \frac{1}{2}\int_0^l [Q_y Q_y^* - \frac{(QQ^*)^2}{4} + QQ^*]\mathrm{d}x$$

$$\{F,G\} \equiv (\mathrm{grad}F, J\,\mathrm{grad}G) = \int_0^l [\frac{\delta F}{\delta Q}\frac{\delta G}{\delta Q^*} - \frac{\delta F}{\delta Q^*}\frac{\delta G}{\delta Q}]\mathrm{d}y$$

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathscr{T}$表示相空间,它是一个周期函数空间。我们将用可积系统的 Morse 理论,谱变换,连同 Melnikov 方法和奇性纤维理论等分析近可积扰动系统的动力学行为和数值计算结果。

2.1　相干结构和数值计算结果

Sine-Gordon 方程

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin u \tag{2.1.1}$$

是对相干结构的最佳理解。考虑它的孤立子解

$$u(x,t) = U(x - ct) \tag{2.1.2}$$

则有

$$(c^2 - 1)U'' = -\sin U \tag{2.1.3}$$

"有效"单摆具有能量

$$E = \frac{1}{2}(c^2 - 1)U'^2 + (1 - \cos U) \tag{2.1.4}$$

相平面图如图 2.1.1 所示。

当 $|c| > 1$,则 $-1 < E < 1$ 的行波是周期的,且当 $|E| > 1$ 时,行波为单调的。当 $|c| < 1$ 时,它具有孤立子解

$$U_\pm(x - x_0 - ct) = 4\arctan e^{\pm(x - x_0 - ct)/\sqrt{1 - c^2}} \tag{2.1.5}$$

如图 2.1.2 所示。

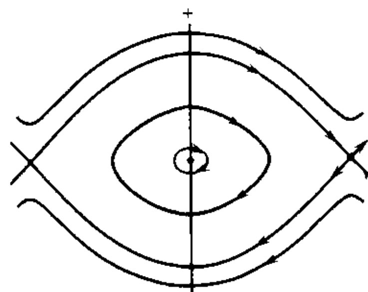


图 2.1.1　摆的相平面

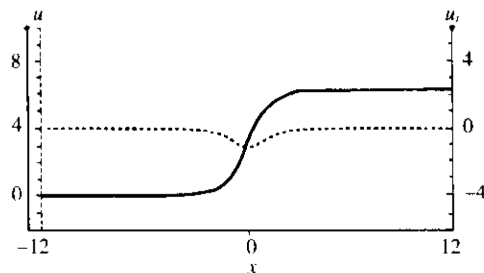


图 2.1.2　一个 kink 运动($c \equiv 0.5$)

对于定常呼吸子($c = 0$)有

$$U_b(x,t) = 4\arctan\left(\tan\nu\,\frac{\cos(t - t_0)\cos\nu}{\cosh((x - x_0)\sin\nu)}\right)$$

$$\nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.1.6}$$

如图 2.1.3 所示。

对于如下方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon[-\alpha u_t + \Gamma\cos\omega t] \tag{2.1.7}$$

具周期边界条件

$$u(x + l, t) = u(x,t) \tag{2.1.8}$$

从呼吸子

$$u(x,t) = 4\arctan\left(\tan\nu\,\frac{\cos(t - t_0)\cos\nu}{\cosh(x\sin\nu)}\right) \tag{2.1.9}$$

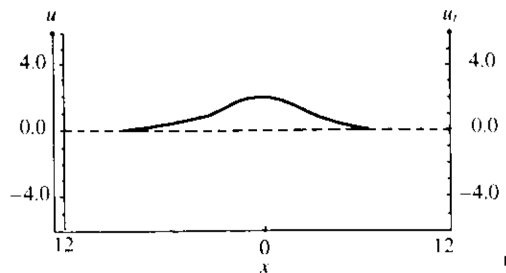


图 2.1.3 定常呼吸子

得到 $u(x,0)$, $u_t(x,0)$ 的偶初始条件,以和式 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(x+kl,t)$ 作周期延拓,数值求解式(2.1.7),对时间作二阶精度的差分,对空间作四阶中心差分,空间取 120 个点,$l=12$, $\Delta x=0.1$, $\Delta t=0.05$,在 CrayY - MP8/64 上计算,直至 $t=50000$。也可用更精确的方法计算,时间上取四阶 Runge-Kutta 方法,空间取八阶中心差分,由解线性偏微分方程组的方法计算可得 Lyapunor 指数,而在轨线 $u_{ts}(x,t)=u(x,t)+\delta\tilde{u}(x,t)$, $\alpha\delta\ll 1$ 求解关于 u 的线性方程

$$\tilde{u}_{tt}-\tilde{u}_{xx}+(\cos u)\tilde{u}=\varepsilon\alpha\tilde{u}_t \qquad (2.1.10)$$

取 $\Delta t=0.02$, $N=120$, $\Delta x=1/N$,为了减少计算的误差,可将步长缩小,例如 $\Delta x\to\Delta x/2$, $\Delta t\to\Delta t/4$,对于 Sine-Gordon 方程(2.1.1),取 $\Delta t=0.05$, $N=120$, $l=12$,算到 $t=10000$,能量

$$H=\int_0^1\left(\frac{1}{2}(u_t^2+u_x^2)+1-\cos u\right)\mathrm{d}x \qquad (2.1.11)$$

波动从约 $2\times10^{-5}\%$ 变为约 $2\times10^{-7}\%$。

先看 Sine-Gordon 方程计算结果,$l=12$, $\varepsilon\alpha=0.04$, $\omega=0.87$。综合结果如图 2.1.4 所示。

(1) $0\leqslant\varepsilon\Gamma\leqslant0.050$,波形很快丧失空间结构,变成平板,依外力的频率振动(与初值无关)(见图 2.1.5(a))。

(2) $0.050\leqslant\varepsilon\Gamma\leqslant0.0575$,波形依空间保持空间结构,依外力频

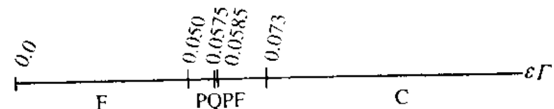


图 2.1.4 Γ 的分叉序列($l=12$, $\varepsilon\alpha=0.04$, $\omega=0.87$)
("F"表示平坦的,"P"表示周期的,QP 表示拟周期的,"C"表示混沌状态)

率依时间作周期振荡(见图 2.1.5(b))。

(3) $0.075\leqslant\varepsilon\Gamma\leqslant0.0585$,波形保持空间结构,但对时间是拟周期的(见图 2.1.5(c))。

(4) $\varepsilon\Gamma\approx0.0586$,波形保持空间结构,依时间作混沌振荡,这种混沌仅产生于参数的很小范围(见图 2.1.5(d))。

(5) $0.0586\leqslant\varepsilon\Gamma\leqslant0.073$,吸引子是平板的,波形失去空间结构,但具有慢的变化率。

(6) $0.073\leqslant\varepsilon\Gamma$,波形保持混沌,波形在两个"呼吸子型"解之间振荡,一个中心在 $x=0$,另一个中心在 $x=l/2$。

扰动 SG 方程的分叉如图 2.1.6 所示。这里曲线 AB 对应于低振幅平板波形(见图 2.1.5(a)),$\varepsilon\Gamma\in[0,\sim0.15]$;曲线 BE 对应于中振幅平板波形,它是不稳定的,在 C 点有分叉,f 周期波形具有空间结构,点 D 容易讨论;曲线 EF 为高振幅平板波形且不稳定(虽然它对空间均匀,扰动是稳定的),这些平板波形是时间周期的,具有周期性外力;曲线 CG 是低振幅具时间周期,波形具有空间结构,且永远是不稳定的。这个分叉表现出有两个状态对应于周期解,它在局部空间在 $x=0$, $x=l/2$ 处激发。GI 曲线为高振幅周期波形,具有空间结构(表现为两个状态:在 $x=0$ 或 $x=l/2$),它是稳定的,直至点 H(见图 2.1.5(b))。在 H 处存在一个 Hopf 分叉,对于拟周期波形,它是稳定的,直至点 I(见图 2.1.5(c))。这条曲线再连续到点 D 在中等振幅平板的分叉上(从点 H 到 J 到 D,时间上的第二周期变得越来越长)。最后,在点 D 上,时间上的第二周期变成无限,它对应于同宿轨道。

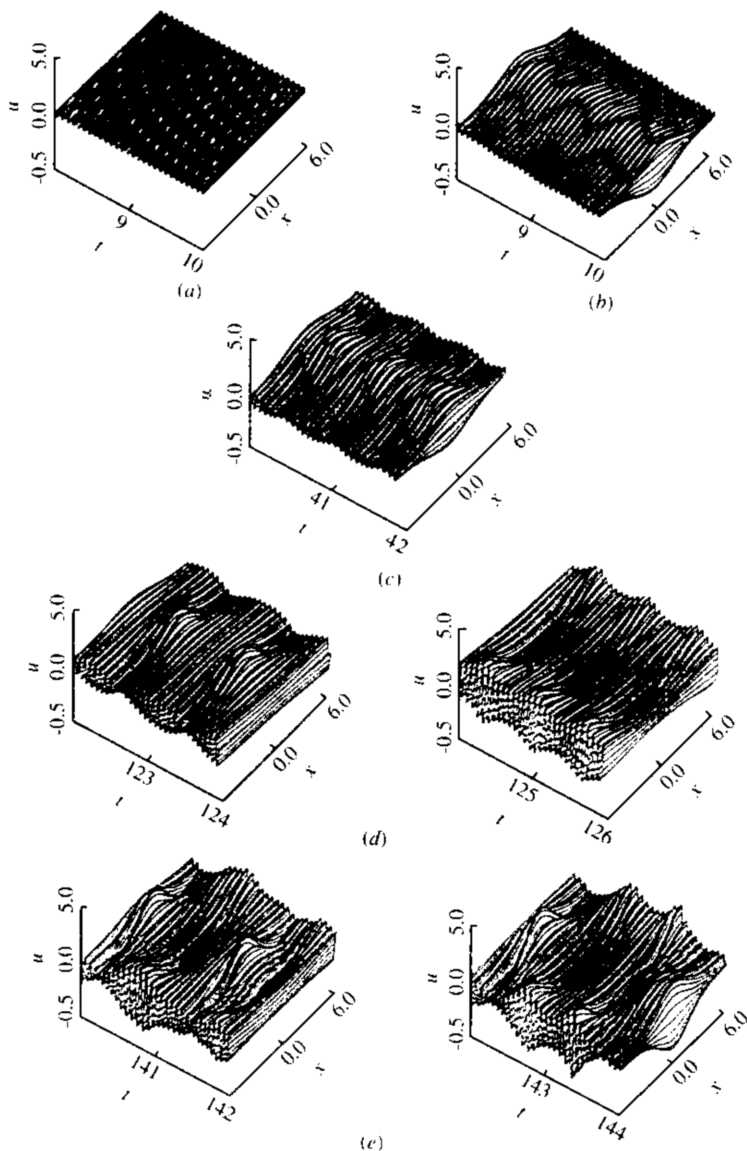


图 2.1.5　$u(x,t)$的运动

(a) $\varepsilon\Gamma = 0.050$; ($b$) $\varepsilon\Gamma = 0.057$; ($c$) $\varepsilon\Gamma = 0.058$;

(d) $\varepsilon\Gamma = 0.0586$; ($e$) $\varepsilon\Gamma = 0.080$;其他参数与图 2.1.4 相同

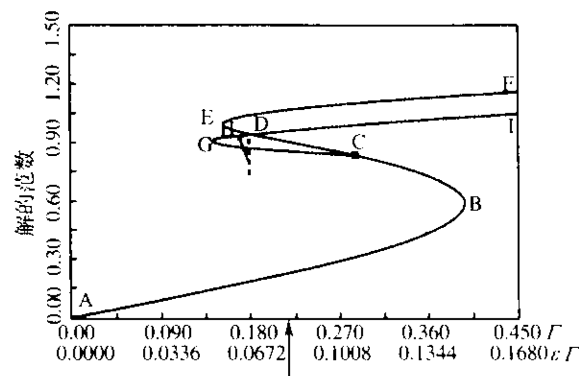


图 2.1.6　分叉图(参数与图 2.1.4 相同,当 $\varepsilon\Gamma > 0.073$ 时,产生混沌)

分叉图不能决定混沌何处开始,但作为参考点,我们将在水平轴上取值 $\varepsilon\Gamma = 0.073$ 的点上标记混沌的开始,作为 Sine-Gordon 方程数值计算的考察。

对于 Sine-Gordon 方程 $l = 24$ 的数值计算,取 $\varepsilon\alpha = 0.04$, $\omega = 0.87$,因 $l = 24$ 使得空间区域解支住一个或两个呼吸子。分叉序列如图 2.1.7 所示。

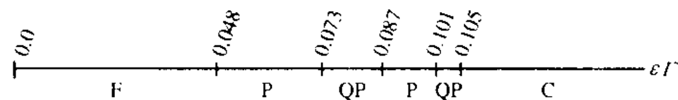


图 2.1.7　分叉序列($l = 24$, $\varepsilon\alpha = 0.04$, $\omega = 0.87$)

对于这些参数值,分叉序列要比以前更为复杂,如图 2.1.8 所示。当 $\varepsilon\Gamma$ 增加时,一般的分叉序列为:

(1) $0 < \varepsilon\Gamma \leqslant 0.048$,波形再度很快在空间上平坦,而它在外力频率上依时间振荡(见图 2.1.8(a))。

(2) $0.048 \leqslant \varepsilon\Gamma \leqslant 0.073$,波形具有一个空间结构,在时间上保持周期(见图 2.1.8(b))。

(3) $0.075 \leqslant \varepsilon\Gamma \leqslant 0.087$,波形变成时间上拟周期(见图 2.1.8($c$))。

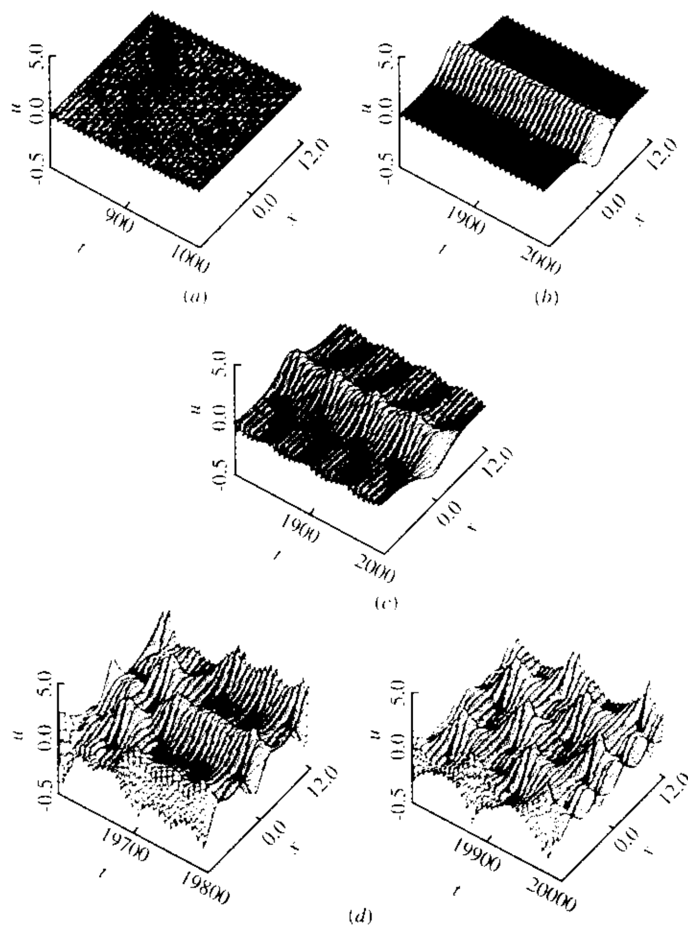


图 2.1.8　$u(x,t)$的运动

(a) $\varepsilon\Gamma=0.047$；(b) $\varepsilon\Gamma=0.070$；(c) $\varepsilon\Gamma=0.080$；

(d) $\varepsilon\Gamma=0.155$；其他参数与图 2.1.7 相同

(4) $0.088\leq\varepsilon\Gamma\leq0.101$，波形回到依时间周期。

(5) $0.101\leq\varepsilon\Gamma\leq0.105$，波形再回到拟周期。

(6) $0.105\leq\varepsilon\Gamma$，波形对一切时间为混沌态(见图 2.1.8($d$))。

我们将在以后讨论，对于 $l=24$ 的混沌比起 $l=12$ 的具有更

高维数的混沌。我们先集中于图 2.1.5(e)和图 2.1.8(d)有关波形的混沌的定性描述。注意到 $l=24$ 时的混沌似乎振荡于每周期一个呼吸子、每周期两个呼吸子、高平坦波形和高频噪声之间，粗略地说，对于这个吸引子似乎至少有两个亚稳态：①缩小的“片层”区域，实质上等同于预混沌区域的拟周期吸引子(即小的外力振幅)；②混沌爆破，当接近于混沌阈值($\varepsilon\Gamma=0.105$)时，在片层拟周期区域的时间片段变长，如同典型的时间间歇现象。

分义图 2.1.9 描述 Sine-Gordon 方程波形 $l=24$，它和 $l=12$ 分义图许多性质类似，但存在一些新的现象。事实上，所有存在

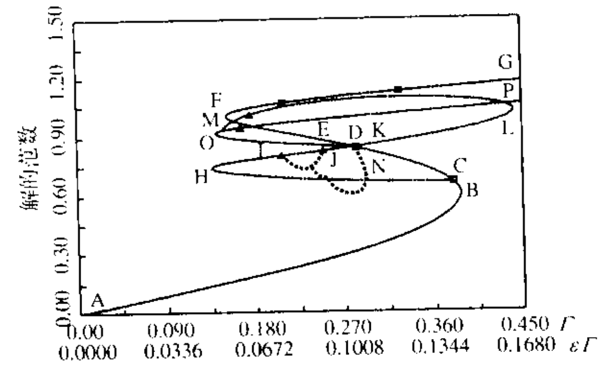


图 2.1.9　分义图(参数与图 2.1.7 相同)

于 $l=12$ 的状态均出现于由两组 $l=12$ 组成子流中，但稳定性质是不同的。新的现象出现于 $l=24$ 的系统。首先，曲线 ABCDEFG 再次表现为平坦波形，它的稳定性质如前(见图 2.1.8(a)表现为线 AB 中的一点)；其次，曲线 CHIJKLM 表示瞬时周期波形，具有空间结构。这个周期波形在 H 和 I 之间是稳定的(见图 2.1.8(b))，在点 I 和 J 之间是不稳定的，存在拟周期稳定波形连接这两点(见图 2.1.8(c))，在点 J 和 K 之间再次稳定。如前，周期波形变成不稳定，一个拟周期波形变成稳定，在点 K 和 N 之间，丧失它的稳定性，在 E 点逼近于同宿轨道。当它依曲线 KLM 连续，在周期波形中存在一个有趣的现象。曲线 CHIJKLM 实际上表现为在

$x=0, x=l/2$ 具有不同峰值的两个不同周期解。这两个不同的解在点 M 处相连，其中波形为在 $x=0, x=l/2$ 处具有峰值的双周期解，即从点 L 移动到点 M，第二个峰值增加直到点 M，它和第一个峰具有相同的尺寸，再从 M 点移动到 1 点，第一个峰值减少；再次，曲线 DOP 表示双周期波形（即空间周期为 $l/2$），它永远是不稳定的。

我们采用以下动力系统的时间序列分析：

（1）Sine-Gordon 能量的时间序列和 u 的空间平均的时间序列。

（2）$P(t)=(u(0,t),u(l/2,t))$ 相平面。

（3）Poincare 截面（用 $P(t)$，t 为外力周期的参数）。

（4）时间功率谱 $S(x,\omega)$，在 $x=0$（链的中心）

$$S(x,\omega) = \left|\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\mathrm{e}^{-2\pi i\omega t/T}\mathrm{d}t\right|^2 \qquad (2.1.12)$$

（5）Lyapunov 指数（从线性方程(2.1.10)计算）。

（6）吸引子的 Lyapunov 维数。

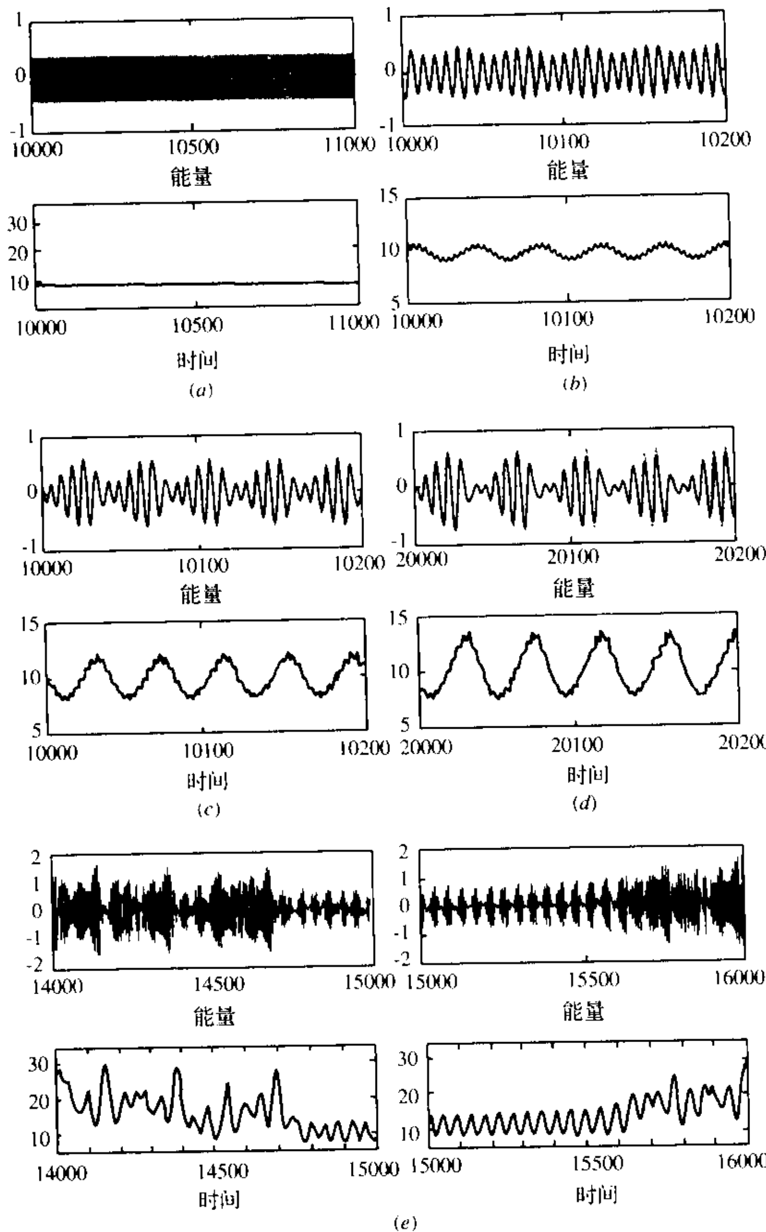
所有这些时间序列分析，可提供混沌出现的有说服力的证据。在实用上，一个极端有用的方法是先确定混沌的分叉点。我们将这些诊断用于 $l=24$ 的 Sine-Gordon 数值计算。在图 2.1.10、图 2.1.11 和图 2.1.12 中，$\varepsilon\Gamma$ 的值为 0.101(a)，0.102(b)，0.104(c)，0.105(d)，0.1055(e)，0.107(f)，0.116(g)。图 2.1.13 为对应的混沌波形图。

在时间序列图 2.1.10 中，特别要注意：

（1）拟周期情况（即 b-d），时间的调制由第二频率（低频）和这个随 $\varepsilon\Gamma$ 增加的调制的振幅增长发出信号。

（2）混沌情况（即 e-g），时间间歇特征是由于被“混沌爆破”分开的片层区域的出现造成的，我们考察在单个时间序列中的许多片层区域。

（3）片层区域的拟周期性质（见图 2.1.10）和调制振幅随时间的线性增长。



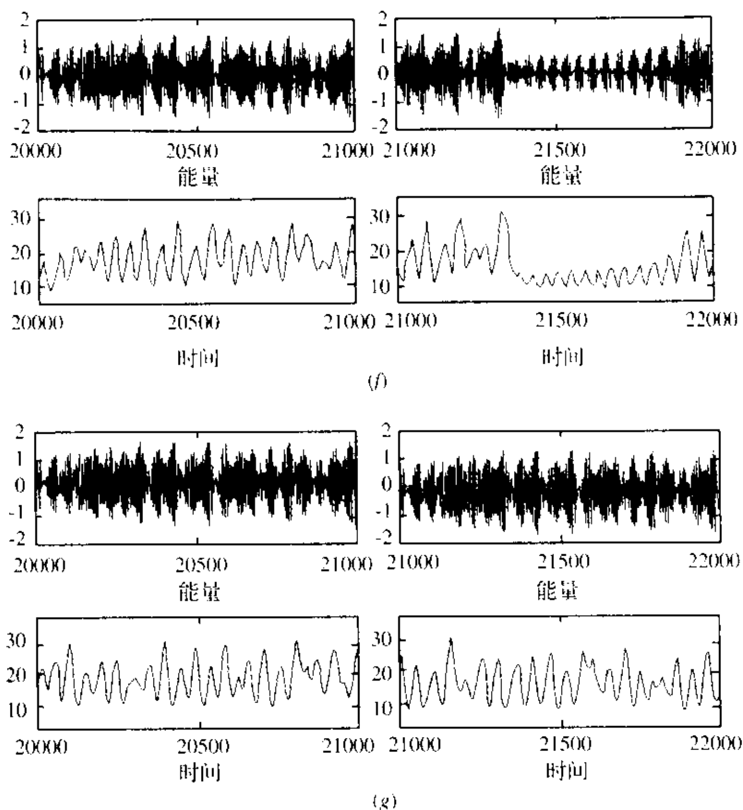


图 2.1.10　能量的时间序列($l=24, \varepsilon\alpha=0.04, \omega=0.87$)

(a) $\varepsilon\Gamma=0.101$; (b) $\varepsilon\Gamma=0.102$; (c) $\varepsilon\Gamma=0.104$;

(d) $\varepsilon\Gamma=0.105$; (e) $\varepsilon\Gamma=0.1055$; (f) $\varepsilon\Gamma=0.107$; (g) $\varepsilon\Gamma=0.116$.

(4) 在所有片层激发区域上有很相似的$\langle H\rangle$值。

对于功率谱(见图 2.1.12),特别要注意:

(1) 拟周期情况混沌区中的层流和功率谱之间的相似性。

(2) 在片层区,调制振幅在和差频率权重的贡献中随时间增加的有效性。

(3) 通过混沌爆破和比较拟周期和片层中背景噪声水平的增

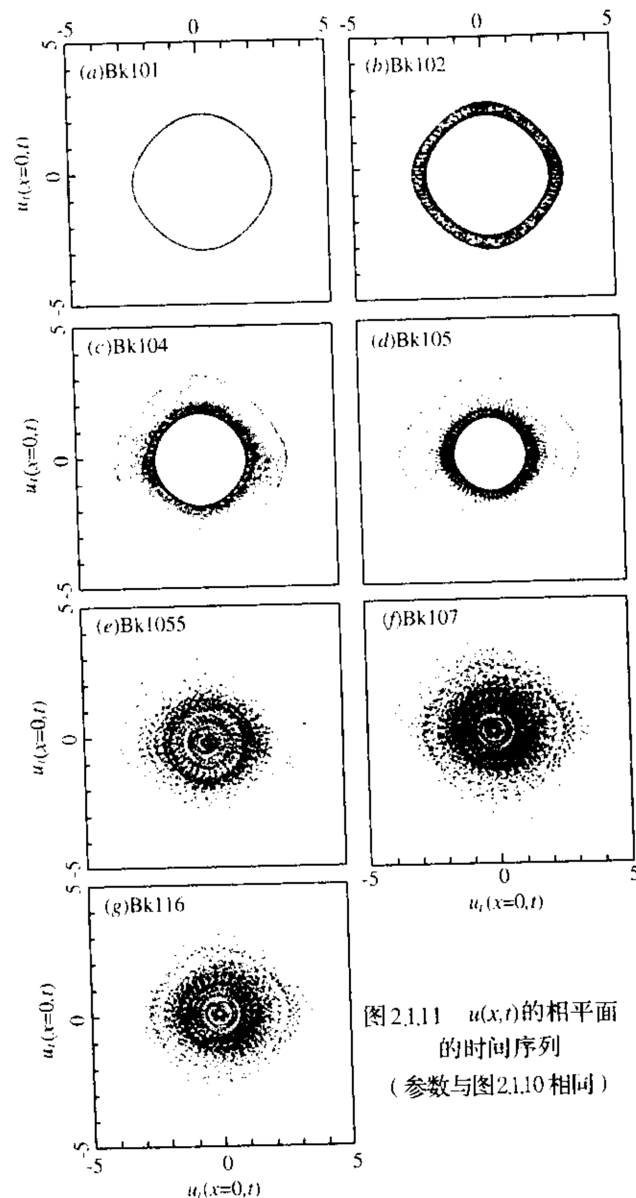


图 2.1.11　$u(x,t)$的相平面的时间序列

(参数与图 2.1.10 相同)

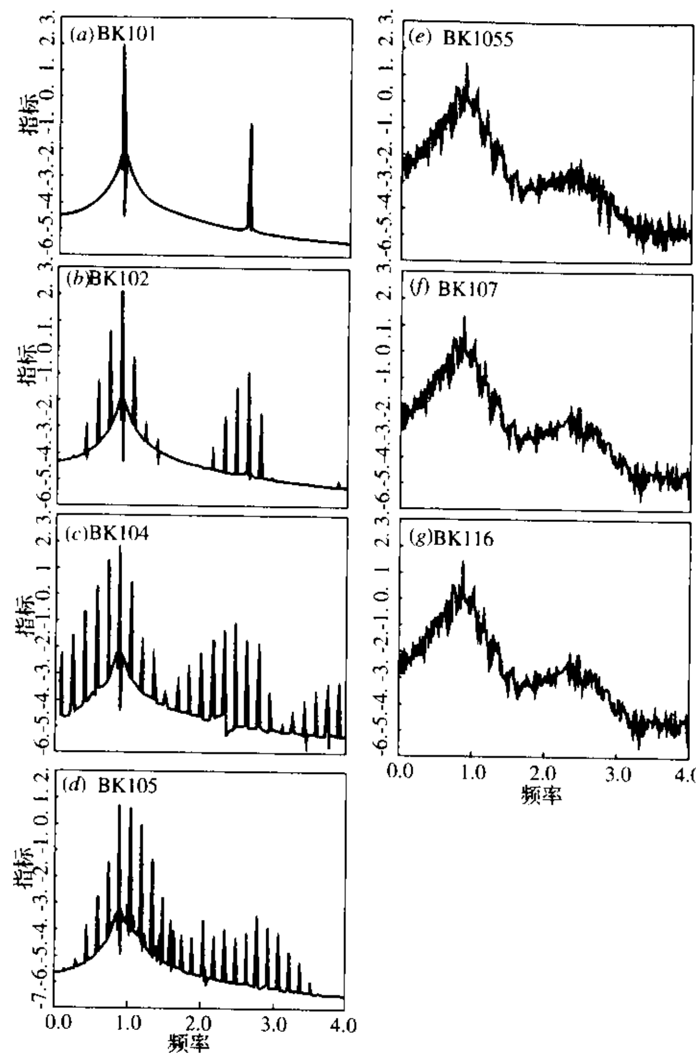


图 2.1.12　$u(x,t)$的功率谱时间序列(参数与图 2.1.10 相同)

加看到功率谱的相似性。

导致混沌吸引子的 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数的计算结果见表 2.1.1。作为最简单情况，Lyapunov 指数可以通过考虑含有流

的 n 维无穷小球所定义，即考虑一个具有半径为 ε 在 $t=0$ 时的无穷小的球，当这个球随着质点在原点的质点轨线变成一个(在 t 时刻具有主轴的)椭圆体 $\varepsilon_i(t)$(这个形状的改变由流的线性部分决定)，则 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda_i(t) = \lim_{t\to\infty}\lim_{\varepsilon_i(0)\to 0}\log_2\frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_i(0)} \tag{2.1.13}$$

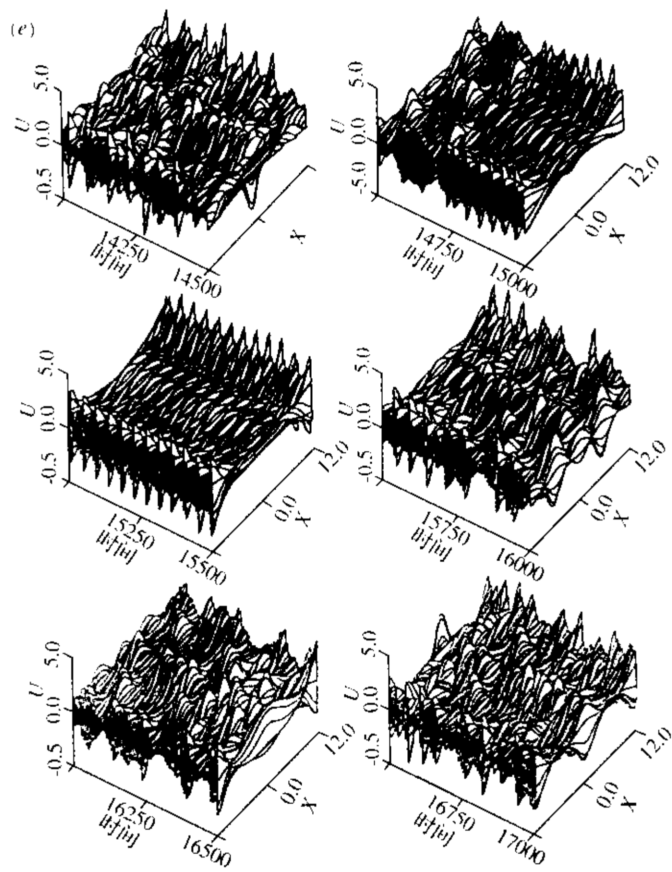


图 2.1.13(a)　波形 $u(x,t)$的时间序列(参数与图 2.1.10 相同，只图示混沌情况：(e)$\varepsilon\Gamma=0.1055$)

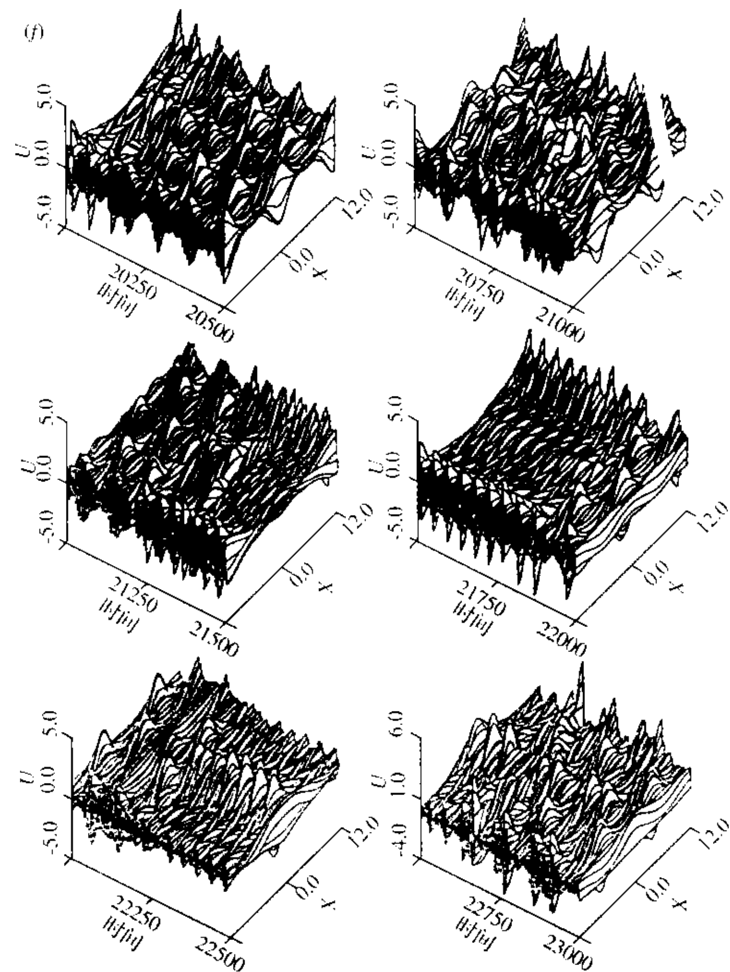


图 2.1.13(b)　波形 $u(x,t)$的时间序列(图 1.10(f)$\varepsilon\Gamma=0.107$)

因此,这些指数 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3\geqslant\cdots$测度通过吸引子的全部邻近轨线的平均扩张或收缩率。当 Lyapunov 指数为正时,认为系统是混沌的(假定存在一个有界的吸引集)。

Lyapunov 维数定义为

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{j}\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \tag{2.1.14}$$

其中 j 表示$\sum_{i=1}^{j}\lambda_i\geqslant 0$ 的最大整数。

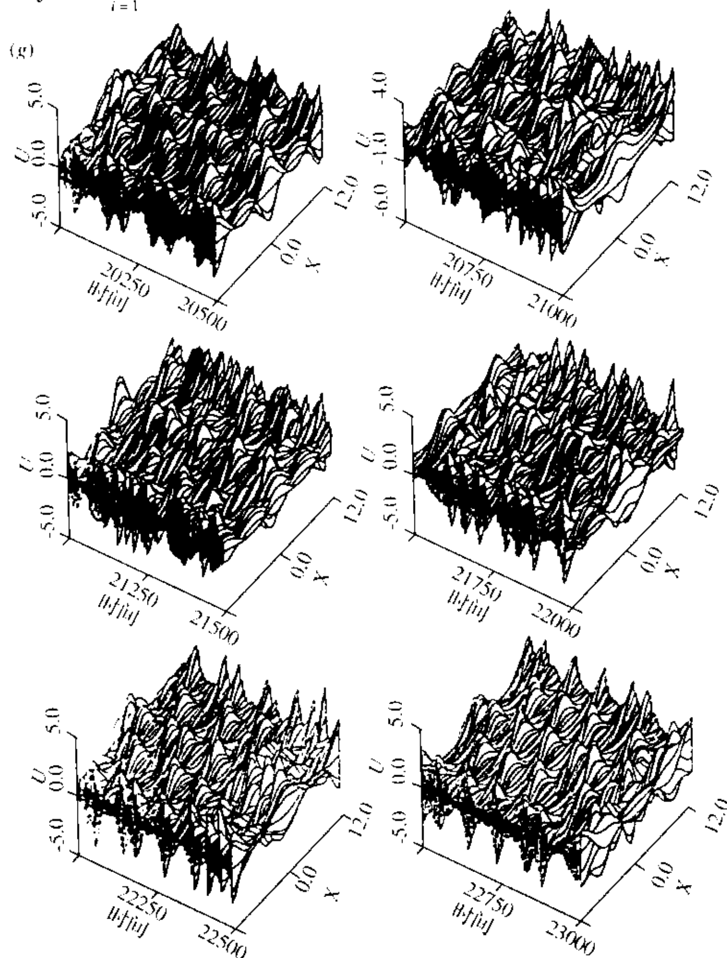


图 2.1.13(c)　波形 $u(x,t)$的时间序列
(图 2.1.10(g)$\varepsilon\Gamma=0.116$)

表 2.1.1 和表 2.1.2 的 Lyapunov 指数表明这些吸引子的低维性质。在表 2.1.1 中，表明对于 Sine-Gordon 方程 $\varepsilon\alpha=0.04$，$\omega=0.87$ 的主 Lyapunov 指数。注意到 $l=24$ 时维数从 1（周期），2（拟周期）到大约 4.5，5.5；当 $\varepsilon\Gamma=0.1055$，大约为 4.5，当 $\varepsilon\Gamma=0.116$，大约为 5.2。

表 2.1.1　S-G 方程的主 Lyapunov 指数

l	12		24	
$\varepsilon\Gamma$	0.080	0.1055	0.107	0.116
λ_1	0.024	0.024	0.028	0.030
λ_2	0.000	0.008	0.010	0.014
λ_3	−0.029	−0.005	−0.001	0.001
λ_4	−0.029	−0.014	−0.013	−0.013
λ_5		−0.028	−0.026	−0.026
λ_6		−0.028	−0.028	−0.028
维数	2.8	4.5	4.9	5.2

表 2.1.2　非线性 Schrödinger 方程的主 Lyapunov 指数

$l=$	12	24	$80/\sqrt{2}$	80	
$\tilde{\Gamma}$	0.21	0.25	0.27	0.20	0.28
λ_1	0.00	0.09	0.31	0.04	0.31
λ_2	−0.22	0.00	0.13	0.00	0.22
λ_3		−0.06	0.00	−0.08	0.11
λ_4		−0.20	−0.01		−0.00
λ_5		−0.22	−0.13		−0.02
λ_6		−0.22	−0.14		−0.10
λ_7		−0.22	−0.14		−0.14
λ_8			−0.14		−0.14
λ_9					−0.14
λ_{10}					
维数	3.0	5.3	7.3	2.5	9.7

表 2.1.2 表明 NLS 方程的主 Lyapunov 指数，$l=12$，$\varepsilon\alpha=0.04$，$\omega=0.87$。

现考虑非线性 Schrödinger 方程（NLS）的数值计算，设扰动的 NLS

$$-2iQ_\tau+Q_{yy}+\left(\frac{1}{2}QQ^*-1\right)Q=$$

$$i\tilde{\alpha}Q-\sqrt{2}\tilde{\Gamma}e^{-i\gamma} \tag{2.1.15}$$

具有周期边界条件

$$Q(y+\tilde{l},\tau)=Q(y,\tau) \tag{2.1.16}$$

和拓展为单个孤立子波形的周期初始条件

$$Q(y,0)=4e_m^{-2ie_ry}\operatorname{sech}(2e_my) \tag{2.1.17}$$

其中 $e=e_r+ie_m$ 为复数，选取实部 e_r 使得 e^{-2ie_ry} 是周期为 $\tilde{l}$ 的周期函数（通常取 $e_r=0$，$e_m=1/2$）。选取式（2.1.15）中的 $\tilde{\alpha}$ 使得波形初始时从外力得到能量。当 $\tilde{\alpha}=\tilde{\Gamma}=0$ 时，非线性 Schrödinger 方程为完全可积 Hamilton 系统。Sine-Gordon 方程在弱非线性近似下，“sech 类”NLS 孤立子表现为 Sine-Gordon 呼吸子，依赖于时间的非线性 Schrödinger 方程的解表现为 Sine-Gordon 方程的时间周期解，而非线性 Schrödinger 方程的时间周期解表现为 Sine-Gordon 方程有两个基本频率的拟周期解。Sine-Gordon 方程和非线性 Schrödinger 方程的关系我们将在后面叙述。我们再来看它们数值计算上的差异。

对于扰动的非线性 Schrödinger 方程（2.1.15），我们用差分逼近：时间上采用四阶 Runge-Kutta 方法，空间上采用八阶中心差分，时间步长取得很小，因此必须满足条件 $\Delta\tau/(\Delta y)^2<O(1)$。取 60 个空间点，且令 $\varepsilon=0.1$，使得

$$\tilde{\alpha}=\varepsilon\alpha/26,\quad \tilde{\Gamma}=\varepsilon\Gamma/1.04\sqrt{0.13}$$

$$\tilde{l}=\sqrt{26}\,l,\quad \tau=0.13t \tag{2.1.18}$$

在我们的实验中

$\tilde{\alpha}\approx0.1538$，　$\tilde{l}\approx6.12$ 或 12.24，　$\tilde{\Gamma}\approx2.678\Gamma$

整体分叉序列（随 $\tilde{\Gamma}$ 的增加）如图 2.1.14 所示。

（1）$0\leq\tilde{\Gamma}\leq0.14$，波形很快变成空间平坦，解与时间无关。

（2）$0.14\leq\tilde{\Gamma}\leq0.18$，波形变成“sech 类”，解与时间无关（见图 2.1.15（a））。

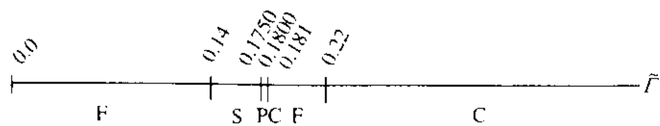


图 2.1.14 对应于图 2.1.4 的 NLS 方程分叉序列

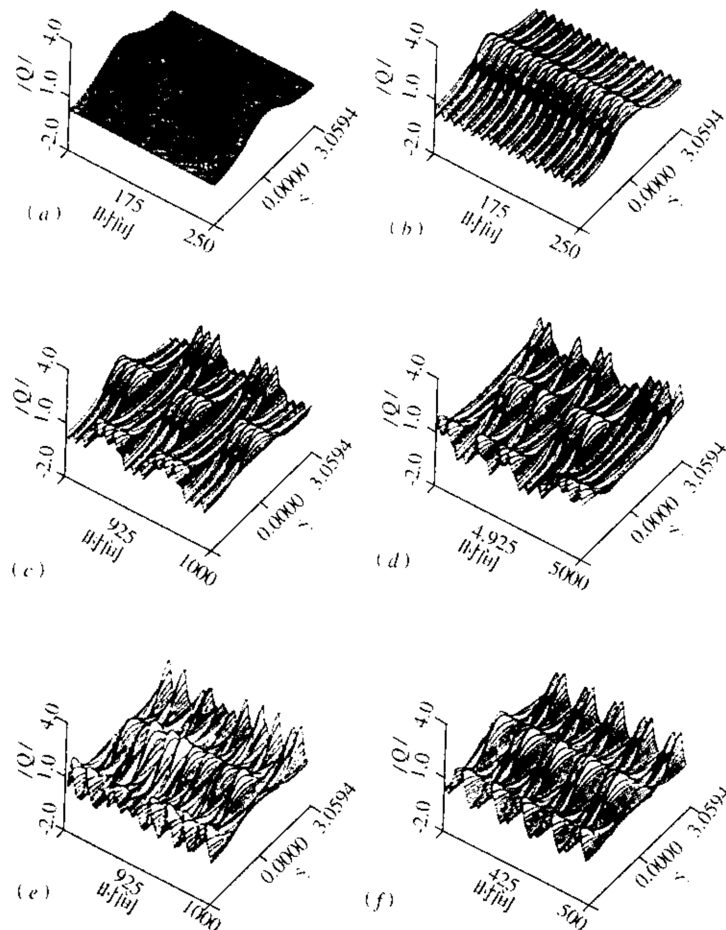


图 2.1.15 $Q(y,\tau)$的运动

(a) $\tilde{\Gamma}=0.150$; (b) $\tilde{\Gamma}=0.175$; (c) $\tilde{\Gamma}=0.179$; (d) $\tilde{\Gamma}=0.181$; (e) $\tilde{\Gamma}=0.230$; (f) $\tilde{\Gamma}=0.210$;其他参数与图 2.1.14 相同。

(3) $0.175\leq\tilde{\Gamma}\leq0.180$,波形变为周期的,在 $\tilde{\Gamma}$ 的低端点值,它在"sech 类"解附近作简单的小振动(见图 2.1.15(b))。对于 $\tilde{\Gamma}$ 的高值,它在以 $y=0$ 和 $y=\tilde{l}/2$ 为中心的"sech 类"解之间作周期振动(见图 2.1.15(c))。

(4) $\tilde{\Gamma}\approx0.181$,波形变成混沌,混沌开始在跳动的周期解上作小的振动(见图 2.1.15(d))。

(5) $0.181\leq\tilde{\Gamma}\leq0.22$,波形重回空间平坦,且与时间无关。

(6) $0.22\leq\tilde{\Gamma}$,波形对所有时间都是混沌(见图 2.1.15(e))。

(7) 无论如何,当 $0.19\leq\tilde{\Gamma}$ 时存在某些周期窗口,对 $\tilde{\Gamma}=0.21$,它在空间上是平坦的,存在另外的跳动的周期解(见图 2.1.15(f));对于 $\tilde{\Gamma}=0.27$,它属于混沌区,存在另外的跳动的周期解;$\tilde{\Gamma}=0.179$,波形的峰在三个振动周期的中心,然后在三个振动周期的边上取得;$\tilde{\Gamma}=0.210$ 存在两个振动,一个在中心,一个在边上;$\tilde{\Gamma}=0.27$,在中心处存在一个振动。

NLS 方程第二个数值结果,即 $\tilde{l}=12.24(l=24)$,分叉序列如图 2.1.16 所示。随着 $\tilde{\Gamma}$ 的增加,分叉序列如下:

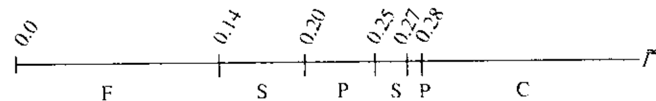


图 2.1.16 NLS 方程对应于图 2.1.7 的分叉序列

(1) $0=\tilde{\Gamma}\leq0.14$,波形很快变成空间平坦,解与时间无关。

(2) $0.14\leq\tilde{\Gamma}\leq0.20$,波形变成"sech 类",解与时间无关(见图 2.1.17(a))。

(3) $0.20\leq\tilde{\Gamma}\leq0.25$,波形变成周期,并在"sech 类"解上作小的振动(见图 2.1.17(b))。

(4) $0.25\leq\tilde{\Gamma}\leq0.27$,波形回到"sech 类",解与时间无关。

(5) $0.27\leq\tilde{\Gamma}\leq0.28$,波形回到周期解。

(6) $0.28\leq\tilde{\Gamma}$,波形对一切时间保持混沌状态(见图 2.1.17(c))。此时当 $t\approx4500$,波形逼近于不稳定呼吸子态并慢慢地回

到完全混沌态。对于 $\tilde{\Gamma}=0.20$,主 Lyapunov 指数为 0.25,0.09,0.0,-0.06,-0.20,-0.22,-0.22,-0.22,维数为 5.3(如果不用对称性,主 Lyapunov 指数为 0.23、0.11、0.04、-0.02、-0.07、-0.15、-0.20,维数为 7.6)。

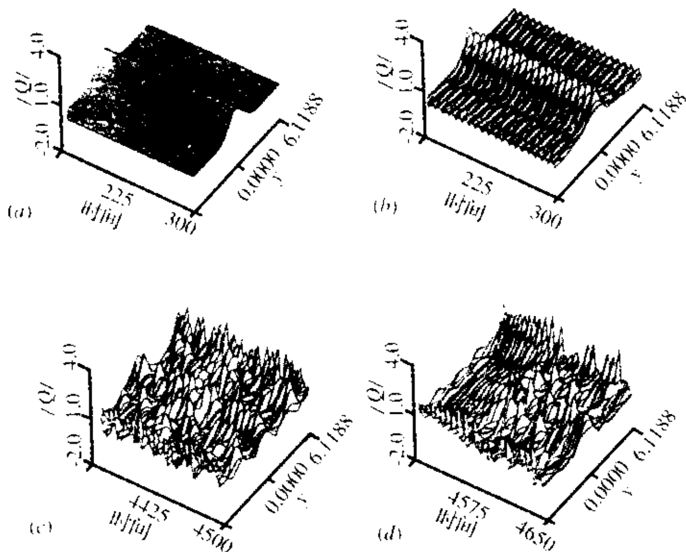


图 2.1.17 对于不同 $\tilde{\Gamma}$ 取值的 $Q(y,\tau)$

(a) $\tilde{\Gamma}=0.18$; (b) $\tilde{\Gamma}=0.24$;

(c) $\tilde{\Gamma}=0.29$;其他参数与图 2.1.16 相同

必须强调提出,第一个数值例子($l=12$)是最简单的,我们发现了混沌状态,这对于我们的理论研究是很重要的,其中混沌状态仅包含有一个局部相干结构,在某一时刻,孤立波位于中心,在另一时刻似乎在周期匣子的边上,这两个位置是在偶周期边界条件下得到的。我们相信混沌态的是孤立子在中心和边上不规则跳动的结果,而同宿轨道是在相空间区间访问混沌轨线时发现的。中心和边上孤立波的跳动通过同宿转换形成了对混沌态的最简单的描述。

现在来讨论 Fourier 模有限截断问题。对于 Sine-Gordon 方程,

采用$[-l/2,l/2]$上的正交基$\{e_0(x),e_1(x),\cdots\}$,设

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{N-1}a_k(t)e_k(x)$$

代入扰动的 Sine-Gordon 方程(2.1.7),可得 $2N$ 阶 ODE

$$\ddot{a}_k+\varepsilon\alpha\dot{a}_k=a_k\langle e_k'',e_k\rangle-\langle\sin(\sum_{k=0}^{N-1}a_ke_k),e_k\rangle-\varepsilon\Gamma\cos\omega t\langle 1,e_k\rangle \tag{2.1.19}$$

$k=0,1,\cdots,N-1$。基$\{e_k\}_{k=0,1,2\cdots}\}$可选取为 Fourier 基,在偶函数条件下,为 Cosine 基。数值上求解式(2.1.7),对某些 $\varepsilon\Gamma$ 在混沌区域得到$u(x,t)$。类似地,对于 NLS,令$\{\tilde{e}_0(x),\tilde{e}_1(x),\cdots\}$为$[-\tilde{l}/2,\tilde{l}/2]$上的正交基,$Q(y,\tau)$为

$$Q(y,\tau)\approx\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{a}_k(\tau)\tilde{e}_k(x)$$

代入扰动非线性 Schrödinger 方程(2.1.15),可得 $2N$ 阶 ODE

$$-2i\dot{\tilde{a}}_k+\tilde{a}_k\langle\tilde{e}_k'',\tilde{e}_k\rangle+\langle g(\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{a}_k\tilde{e}_k),\tilde{e}_k\rangle=i\tilde{\alpha}\tilde{a}_k-\sqrt{2}\tilde{\Gamma}\langle 1,\tilde{e}_k\rangle \tag{2.1.20}$$

其中 $g(Q)=(\frac{1}{2}|Q|^2-1)Q$。

对于时间采用四阶 Runge-Kutta 方法求解这些非线性常微分方程组(对于 Lyapunov 指数,采用四阶模式求解线性方程组)。显然,求解这两个常微分方程组比求解两个 PDE 方程组容易得多。比较 PDE 和 ODE 方程组的一个简单方法,是研究分叉序列($\varepsilon\Gamma\nearrow,\varepsilon\alpha,\omega,t$ 固定)。计算实践表明,当 $N\to\infty$ 时,ODE 方程组的分叉序列是逼近偏微分方程的相应序列。事实上,取 $N\in(3,15)$已经足够。

我们可以比较各种 ODE 方程组的分叉图。当 N 充分大,ODE 的分叉图等价于整个偏微分方程组的分叉图。$2N$ 阶 NLS ODE 分叉图如图 2.1.18 所示,$\varepsilon\alpha=0.04,\omega=0.87,l=12$。$N=2$ 和 $N>2$

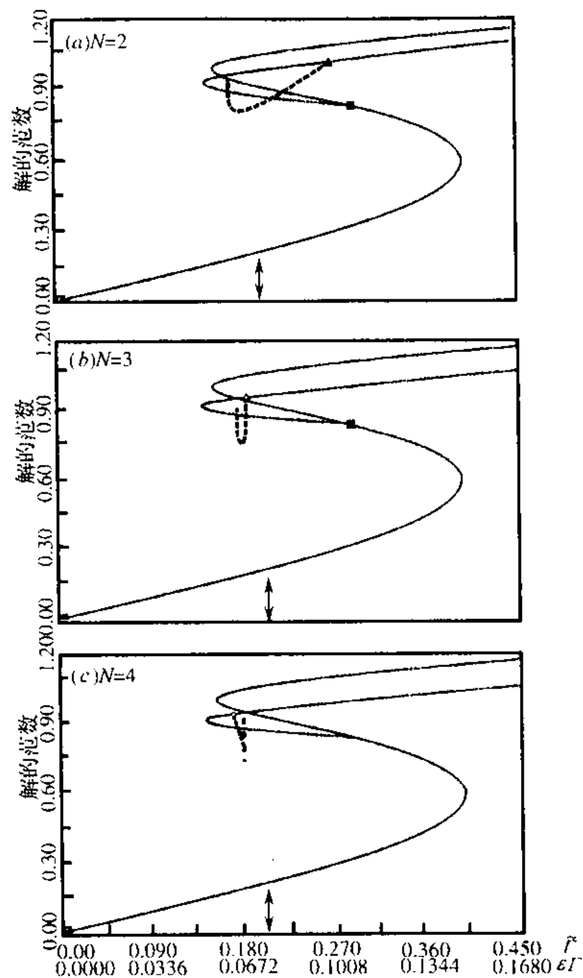


图 2.1.18　NLS 方程关于 N 的三个取值的分叉图

(a) $N=2$; (b) $N=3$; (c) $N=4$;其他参数同图 2.1.14

有本质上的差别，$N=3$ 和 $N=4$ 有小的本质差别(约 10%)，$N=4$ 和 $N=5$ 几乎一样。因此 $N=3$ 似乎对于研究 NLS 的偏微分方程的非混沌态是充分的。$N=4$ 时，NLS 偏微分方程的分叉序列和 $N=5$时，NLS 偏微分方程的分叉序列是一致的，当 $N\geqslant 7$ 时则没

有本质上的差别，$N=7$ 则已在图2.1.19中表示。

我们刚才已说明在 ODE 和偏微分方程组之间存在一种分叉序列和分叉图的收敛性，现在说明在混沌吸引子区域，这些方程组的收敛性。取 $l=12$，NLS 方程组，直接比较 $Q(y,\tau)$ 和

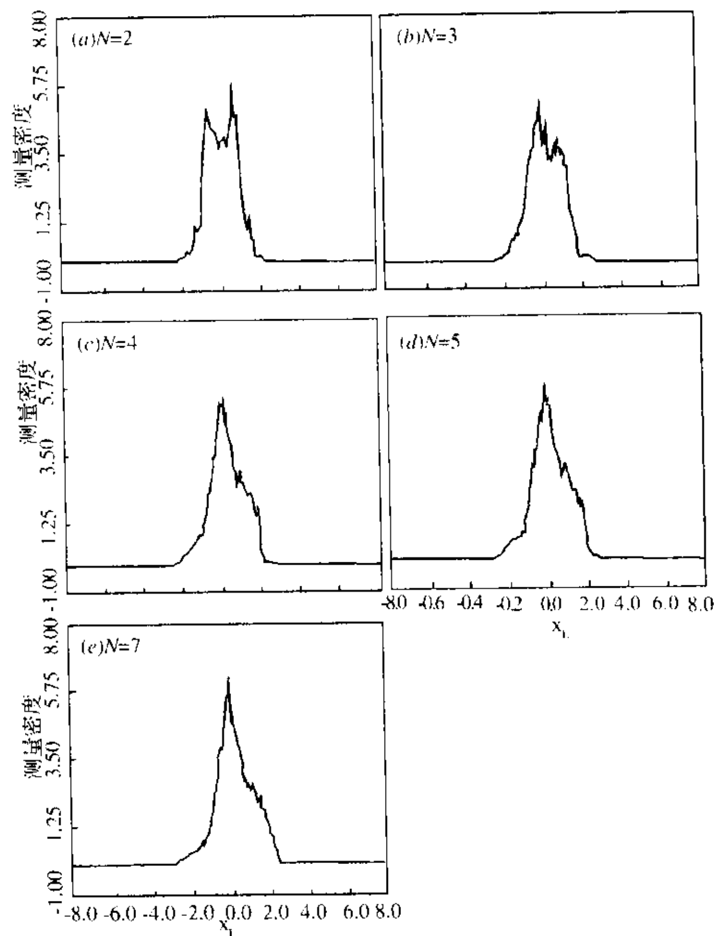


图 2.1.19　主 Lyapunov 指数的概率密度函数

(a) $N=2$; (b) $N=3$; (c) $N=4$; (d) $N=5$;

(e) $N=7$; 其他参数与图 2.1.14 相同

$\{\tilde{\alpha}_k(\tau)\}$，计算混沌吸引子的 Lyapunov 指数和吸引子的 Lyapunov 维数。这些 Lyapunov 指数是在吸引子上的整体平均。在数值上，用线性方程

$$-2i\tilde{Q}_\tau + \tilde{Q}_{yy} + (QQ^* - 1)\tilde{Q} + \frac{1}{2}Q^2\tilde{Q}^* = i\alpha\tilde{Q} \tag{2.1.21}$$

计算局部扩张和收缩率的平均是简单的，因此可得到局部 Lyapunov 指数，记为 $\{l_j(\tau)\}(1 \leqslant j \leqslant M)$，这些函数 l_j 也是混沌的，这些函数之间一个最简单的比较是用这些函数的概率密度，即

$$\theta_j(\zeta)\Delta\zeta = P\{l_j(\tau) \in [\zeta - \frac{\Delta\zeta}{2}, \zeta + \frac{\Delta\zeta}{2}]\} \tag{2.1.22}$$

它是时间 τ 的函数，l_j 位于区间$[\zeta - \Delta\zeta/2, \zeta + \Delta\zeta/2]$，$\theta_1$ 置于图 2.1.19 中，$N = 2,3,4,5$ 和 NLS 偏微分方程。

对于 Sine-Gordon 方程在大系统中的扰动，已发现以不同的途径达到混沌状态，特别是：倍周期分叉和 Rnelle-Takens。类似的倍周期状态也出现于 NLS 系统。取 $\epsilon\alpha = 0.004(\tilde{\alpha} = 0.1)$，$\omega = 0.98$，$l = 80(\tilde{l} = 16)$。

(1) $0 \leqslant \tilde{\Gamma} \leqslant 0.09$，波形急速变成空间平坦，解与时间无关。

(2) $0.09 \leqslant \epsilon\Gamma \leqslant 0.15$，波形变成“sech 类”，解与时间无关。比起系统的宽度它是很窄的，如图 2.1.20(a)所示。

(3) $0.15 \leqslant \tilde{\Gamma} \leqslant 0.20$，“sech 类”波形变成时间周期，瞬时的振动开始于“sech 类”解的小波动。因此存在和邻近“sech”小的相互作用，尺寸并很快增加(见图 2.1.20(b)和(c))。双倍周期解进入混沌状态，即波形不能以一种振动完全回到它的原有值，而是取两种振动回到原有值，再四种振动，八种振动，等等(见图 2.1.17(d))。

(4) $\tilde{\Gamma} \approx 0.20$，解是混沌的，但这种混沌仅为空间局部化“sech 类”解的小的振动(见图 2.1.20(d))。当 $\tilde{\Gamma} = 0.20$ 时，混沌的维数为 2.5(主 Lyapunov 指数为 0.04，0.0 和 -0.08)，因此这是很低维

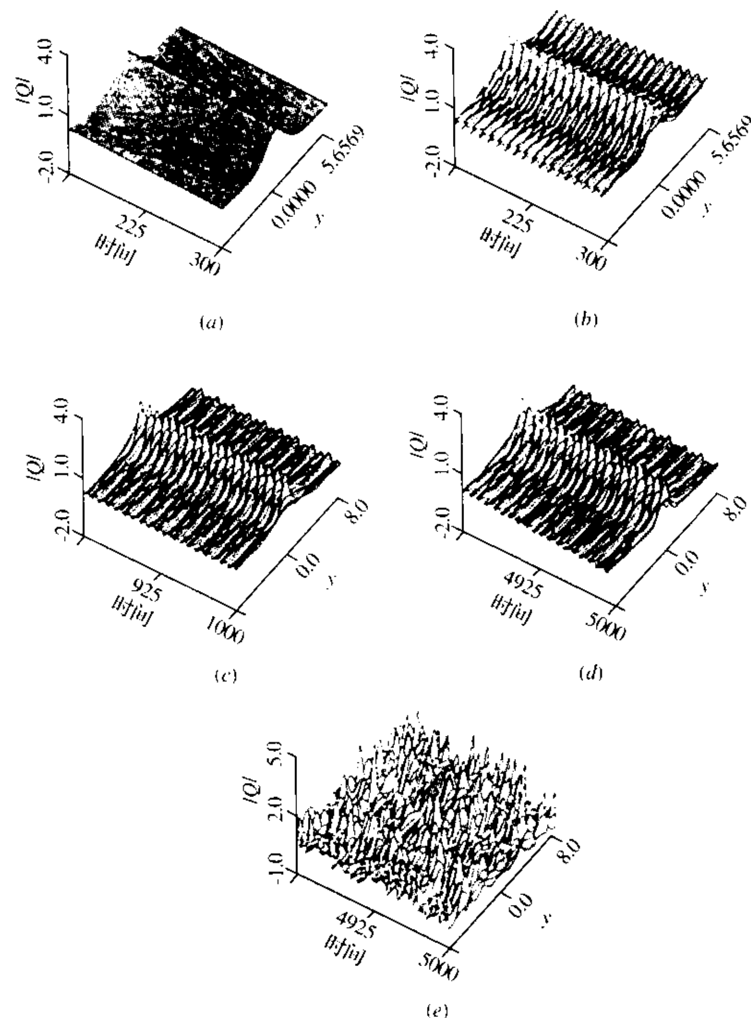


图 2.1.20 不同 $\tilde{\Gamma}$ 值的 $Q(y,\tau)(l = 80, \epsilon\alpha = 0.004, \omega = 0.98)$

(a) $\tilde{\Gamma} = 0.140$；(b) $\tilde{\Gamma} = 0.185$；(c) $\tilde{\Gamma} = 0.196$；(d) $\tilde{\Gamma} = 0.200$；(e) $\tilde{\Gamma} = 0.290$

数的混沌，相平面在图 2.1.21 中，其中两轴为点在波形中心处的实部和虚部，$\Delta t = 0.20$。

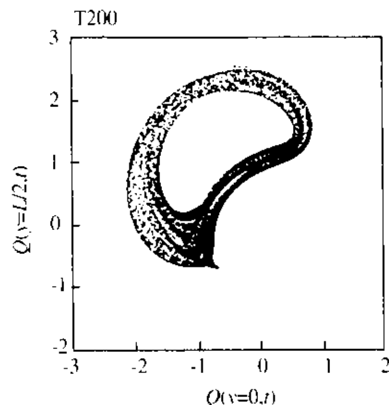


图 2.1.21 与图 2.1.20(d)有相同参数的相平面图

(5) $0.20 \le \tilde{\Gamma} \le 0.28$,波形再回到空间平坦和时间无关解。

(6) $0.28 \le \tilde{\Gamma}$,解变成很不同于(4)的混沌。首先,混沌拓展为系统的一切宽度,对 $\tilde{\Gamma} = 0.28$,混沌的维数为 9.7(主 Lyapunov 指数为 0.31,0.22,0.11,0,-0.02,-0.10,-0.138,-0.144,-0.145和-0.144)。

当此系统的尺寸为 $l = 80/\sqrt{2} \approx 56.57$($\tilde{l} \approx 11.31$),我们再次发现倍周期,它是低维混沌,如果存在,也仅在参数空间很小的窗口上。

(1) $0 \le \tilde{\Gamma} \le 0.09$,波形很快变成空间平坦,解与时间无关。

(2) $0.09 \le \varepsilon\Gamma \le 0.14$,波形变成"sech 类",解与时间无关。比起系统的宽度,它是很窄小的,见图(2.1.22(a))。

(3) $0.14 \le \tilde{\Gamma} \le 0.19$,波形变成周期的,当 $l = 80$ 时,随 $\tilde{\Gamma}$ 增加,振动增强(见图 2.1.22(b)(c))。

(4) $0.19 \le \tilde{\Gamma} \le 0.21$,波形回到空间平坦,解与时间无关。

(5) $0.21 \le \tilde{\Gamma} \le 0.26$,波形回到周期(见图 2.1.22(d))。

(6) $0.26 \le \tilde{\Gamma}$,波形对一切时间保持混沌态。混沌拓展为系统的一切宽度,在图 2.1.22(e)中我们看到 $\tilde{\Gamma} = 0.270$ 的混沌轨线,主 Lyapunov 指数为 0.31,0.13,0.0,-0.01,-0.13,-0.14,-0.14

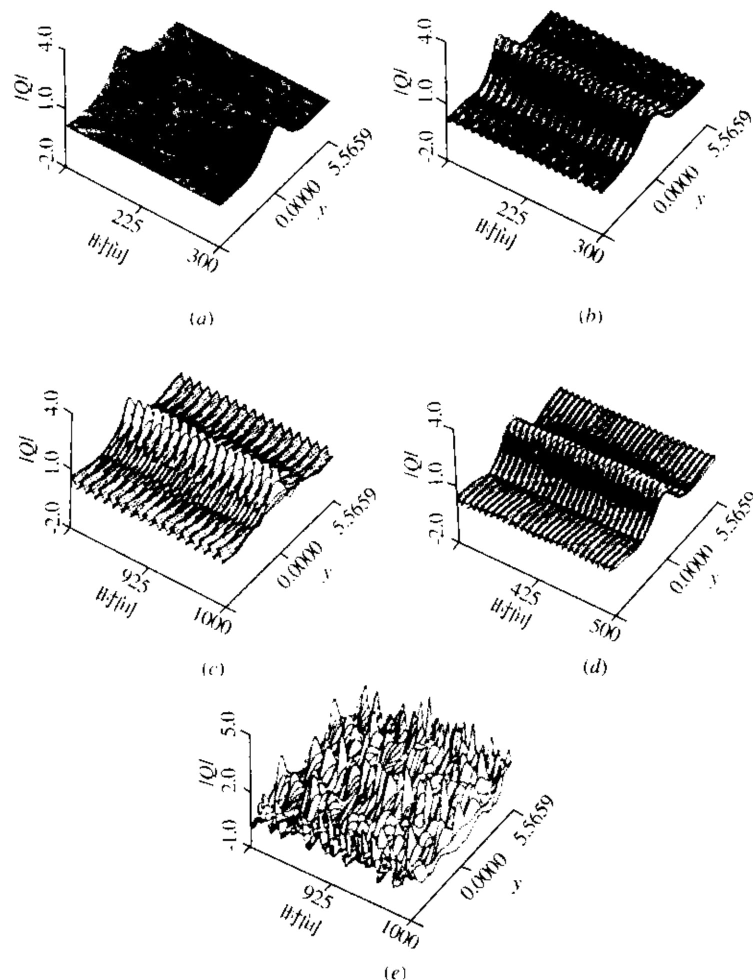


图 2.1.22 不同 $\tilde{\Gamma}$ 值的 $Q(y,\tau)$($l = 56$, $\varepsilon\alpha = 0.004$, $\omega = 0.98$)
(a) $\tilde{\Gamma} = 0.130$; (b) $\tilde{\Gamma} = 0.150$; (c) $\tilde{\Gamma} = 0.190$; (d) $\tilde{\Gamma} = 0.260$; (e) $\tilde{\Gamma} = 0.270$

和-0.14,维数为 7.3。

因此,在这两个参数区域存在着第二种途径可得到很弱的混沌,这种混沌产生于"sech 类"解中。当外力增加时,更典型的混沌将产生,它是更高维的,强大的,包含了空间结构的相互作用

2.2 基本分析

2.2.1 NLS 方程和 Sine-Gordon 方程的联系

设具阻尼外力的 Sine-Gordon 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon[-\alpha u_t + \Gamma\cos\omega t] \tag{2.2.1}$$

的解

$$u(x,t) = \varepsilon^{-1/2}[q(y,\tau)e^{i(t+\gamma)} + c.c.] + O(\varepsilon^{-3/2}) \tag{2.2.2}$$

则在误差 $O(\varepsilon^{-3/2})$范围,时间为 $O(\tau=1)$,振幅 $q(y,\tau)$满足 NLS 方程

$$-2iq_\tau + q_{yy} + \frac{1}{2}qq^*q = \tilde{i\alpha}q - \sqrt{2}\tilde{\Gamma}e^{-i(\tau/2+\gamma)} \tag{2.2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}&\alpha = 2\omega\tilde{\alpha}, \Gamma = 4\sqrt{2}\varepsilon^{-1/2}\tilde{\omega}\tilde{\Gamma}\\&\omega = 1-\varepsilon\tilde{\omega}, \tilde{\varepsilon} = 2\tilde{\omega}\varepsilon, \tau = \tilde{\varepsilon}t, y = \tilde{\varepsilon}^{1/2}x\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

振幅 q 对 y 是周期的,周期

$$\tilde{l} = \tilde{\varepsilon}^{1/2}l$$

最后,引入

$$q = Qe^{-i\tau/2}$$

可得

$$-2iQ_\tau + Q_{yy} + (\frac{1}{2}QQ^* - 1)Q = \tilde{i\alpha}Q - \sqrt{2}\tilde{\Gamma}e^{-i\gamma} \tag{2.2.5}$$

方程的不动点满足 ODE

$$Q_{yy} + (\frac{1}{2}QQ^* - 1)Q = \tilde{i\alpha}Q - \sqrt{2}\tilde{\Gamma}e^{-i\gamma} \tag{2.2.6}$$

具有 $\tilde{l}$ 周期的边界条件。

2.2.2 空间无关不动点

最简单的不动点是与空间无关的不动点,

$$Q(y) = c \tag{2.2.7}$$

其中 c 为常数,不失一般性,选取 γ 为立方方程

$$(\frac{1}{2}c^2 - 1)c = \tilde{i\alpha}c - \sqrt{2}\tilde{\Gamma}e^{-i\gamma} \tag{2.2.8}$$

的实解,这个方程具有一个或三个正实根,如图 2.2.1 所示。

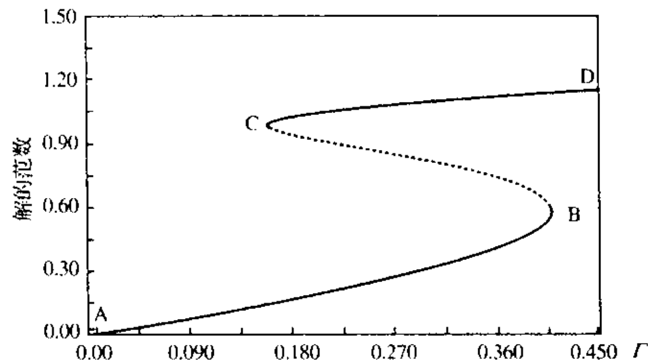


图 2.2.1　方程(2.2.8)的正实根和关于 y 无关扰动的平坦－锁定态的稳定性

关于这些与空间无关的不动点(称之为“平坦锁态”)有几点必须强调:

(1) 对于固定的 $\tilde{\Gamma}$,解不必是惟一的,显示对 $\tilde{\Gamma}$ 的滞后结构。

(2) 解在“上支”的振幅被外力频率所决定,外力的振幅起着第二角色的作用,正如扰动计算中所证实的一样。

现在研究这些空间无关不动点的稳定性。寻求非线性 Schrödinger 方程(2.2.5)的如下形式的解

$$Q(y,\tau) = c + \tilde{Q}(y,\tau), \quad |\tilde{Q}(y,\tau)| \ll 1 \tag{2.2.9}$$

保留 $\tilde{Q}(y,\tau)$的线性项得

$$-2i\tilde{Q}_\tau + \tilde{Q}_{yy} + (c^2-1)\tilde{Q} + \frac{1}{2}c^2\tilde{Q}^* = i\bar{\alpha}\tilde{Q} \quad (2.2.10)$$

线性方程中的系数容易由 F 氏分析得到。现寻求如下 F 氏模的解

$$\tilde{Q} = \hat{Q}e^{\sigma\tau+iky}, \quad k = k_n = 2\pi n/\tilde{l} \quad (2.2.11)$$

可得增长率 σ 为

$$2\sigma_\pm = -\bar{\alpha} \pm \sqrt{\bar{\alpha}^2 - g} \quad (2.2.12)$$

其中

$$g = k^4 - 2(c^2-1)k^2 + \bar{\alpha}^2 + (c^2-1)^2 - c^4/4 \quad (2.2.13)$$

对 $\bar{\alpha} < 1/2$ 进行线性化稳定性分析,产生如下结果:

(1) 下支解对所有波长的扰动是稳定的。

(2) 与 y 无关的平坦锁态的稳定性,即 $k=0$,扰动已由图 2.2.1 描绘。

(3) 对于充分高的波数的模永远是稳定的。

(4) 上支解对于波数 $k_-^2 \leqslant k^2 \leqslant k_+^2$ 的模是不稳定的,其中

$$k_\pm^2 = c^2 - 1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^4 - \bar{\alpha}^2} \quad (2.2.14)$$

(5) 最大不稳定模和相应的不稳定波数的带宽的决定可由色散关系 $g=g(k)$ 得到。

(6) 当空间周期充分小时,即 $k_+^2 > (2\pi/\tilde{l})^2$,不存在不稳定模,增长周期为 $\tilde{l}$,容许模进入不稳定模的带。

有关平坦锁态的稳定性有几个附注:

(1) 这些锁态为"强吸引子"。那些在下支的解是稳定的,充分小的扰动是吸引的。对于上支,如果周期 $\tilde{l}$ 为很小,解也是稳定的,对于大的周期,解在上支是不稳定的,但仅仅是几个模。在上支的解有一个低维的不稳定流形和一个无穷维的稳定流形。

(2) 如以上支的一个稳定解开始,再增长系统的"应力"(stress),或者增加 $\tilde{\Gamma}$ 的强度或者周期 $\tilde{l}$,则具有波数 $k_1 = 2\pi/\tilde{l}$ 的模首先变成不稳定。

(3) 如 $\tilde{\Gamma}$ 和 $\tilde{l}$ 使得仅 k_1 是不稳定的,则在上支不动点的邻域中,上支保持一个"合理的吸引子"只有一个方向是吸引的,即它的不稳定流形维数仅有 1,而它的稳定流形余维为 1。以另一种观点来看,它的上支平坦态是很不稳定的,它的不稳定 k_1 模具有很大的增长率,是不稳定的,甚至没有外力和阻尼,属于未扰动动力学范畴。轨线急剧离开它的邻域,运动沿函数空间的 $\cos k_1 x$ 方向。平坦态是不稳定的。

2.2.3 空间相关不动点

现考虑空间相关不动点,寻求方程(2.2.6)如下形式的解

$$Q(y) = R(y)e^{i\theta(y)}$$

它是偶的和 $\tilde{l}$ 周期的(从 R,θ 的方程很快可以看到它是偶的),周期边界条件仅当 Q 为常数时满足。可从数值上分析这些不动点,并用扰动理论构造这些不动点作为 NLS 孤立子的变形。存在性如图 2.2.2 所示。

我们强调具有两种类型的解,其一靠近 $y=0$,另一靠近 $y=\tilde{l}/2$。对应于它们的每一个位置有两个不同的不动点,其一具有小的振幅,其二具有大的振幅,小的振幅态宽于高的态。这个态具有一个有意义的背景振幅,它远离空间剖面峰的中心,具有空间无关不动点的高度。图 2.2.2 的分叉图表明了这些状态,以及每个空间周期有两个极大的共存不动点。在以往的数值计算中,不曾出现每个周期多于两个极大的不动点情形。分叉图 2.2.2 也标出对于 $l=12$。空间局部化解的下支和平坦锁态的中等分支在分叉点 E 相连。对应于解的数目的改变,Jacobi 矩阵变成奇性的。对于 $l=24$,分叉点 E 运动到 Γ 的大致在平坦锁态的中等分叉上,第二分叉点出现又使 Jacobi 消失,对应于每周期两个极大解的出现。对于大的 $\tilde{l}$,我们期望更多的分叉点位于平坦锁定态的中等分叉上,对应于每个空间周期相干激发数所增加的不动点。

上述平坦锁定态的分叉图是由观察空间相关的下支解得到的,当分叉点接近于小的 Γ 的方向,相干激发的量消失。这些空

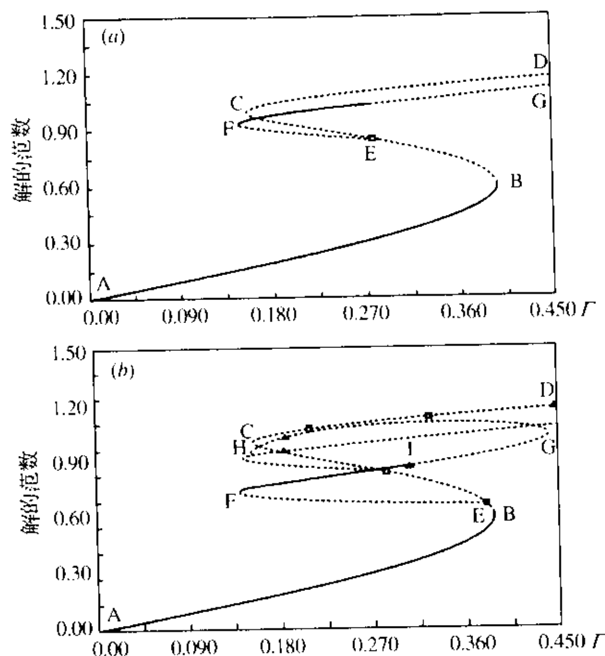


图 2.2.2　对于 $l=12(a)$，$l=24(b)$ 的分叉图

间相关不动点的线性稳定性易于分析，也可由非线性 Schrödinger 方程的数值解直接验证。这些稳定性计算结果表明，空间相关锁态每个周期具有一个相干激发是稳定的。如果参数 $\bar{\Gamma}$ 充分小，而当作为 Hopf 分叉，当 $\bar{\Gamma}$ 增加时，它将失去稳定性。对于在不稳定区域但接近于 Hopf 点 $\bar{\Gamma}_e$ 的应力值，不稳定流形的维数为 1，沿不稳定方向的特征函数的空间结构具有一个有意义的第二调和函数，即 $\cos 2ky$，$l=24$，更多的第二调和分量在 $l=12$。

2.2.4　非线性 Schrödinger 方程的可积结构

考虑如下周期性的未扰动的非线性 Schrödinger 方程

$$2iq_\tau = q_{yy} + \frac{1}{2}qq^*q$$

$$q\mid_{\tau=0} = q_{in} \in H^1_{per}$$

其中 H^1_{per} 表示周期函数及其一阶广义导数为局部平方可积的 Sobolev 空间。能量估计保证了初值问题整体解的存在性和惟一性。形式地计算能量 H

$$H(q,q^*) = \frac{1}{2}\int[q_y q_y^* - \frac{1}{4}(qq^*)^2]\mathrm{d}y$$

则 NLS 可被看成 Hamilton 系统，有

$$\delta H = -\frac{1}{2}\int[(q_{yy} + \frac{1}{2}qq^*q)\delta q^* + (q_{yy}^* + \frac{1}{2}qq^*q^*)\delta q]\mathrm{d}y$$

首先固定相空间 $\mathscr{F}$，用 $L^2_{loc}(R,C^2)$ 表示所有复的具两个分量的向量值函数 $\boldsymbol{q}(y)=(q(y),r(y))^{\mathrm{T}}$，为局部平方可积的。这个空间能表示为形式空间的直接和，即

$$L^2_{loc}(R,C^2) = S_+(R,C^2) \oplus S_-(R,C^2) \qquad (2.2.15)$$

其中

$$S_\pm = \{\binom{q}{r} \in L^2_{loc}(R,C^2) \mid_{r=\pm q^*}\} \qquad (2.2.16)$$

S_+ 和 S_- 均为实的 Hilbert 空间，具有 L^2 内积。在此，对于 NLS 相空间 $\mathscr{F}$ 取为

$$\mathscr{F} \equiv H^1_{per}(R,C^2) \cap S_-(R,C^2) \cap C^\infty(R,C^2) \quad (2.2.17)$$

在这个空间上聚焦 NLS 具 Hamilton 形式

$$iq_\tau = J\nabla H \qquad (2.2.18)$$

其中 Hamilton 量 $H:\mathscr{F}\to R$，

$$H(\boldsymbol{q}) = -\frac{1}{2}\int_0^l[q_y r_y + \frac{1}{4}(qr)^2]\mathrm{d}y \qquad (2.2.19)$$

这里，$\boldsymbol{q}=(q,r)^{\mathrm{T}}$ 且 $r=-q^*$，$\boldsymbol{q}\in S_-$。非聚焦 NLS 为

$$2iq_\tau = q_{yy} - \frac{1}{2}qq^*q \qquad (2.2.20)$$

Hamilton 量 H 在 S_+ 上确定一泛函，$(q,r)^{\mathrm{T}}$ 满足 $r=+q^*$。

无穷多个守恒律可通过 Zakharov-Shabat 算子

$$\mathrm{L} \equiv -i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & q(y)\\ r(y) & 0\end{pmatrix} \tag{2.2.21}$$

的谱理论得到，其中 $\boldsymbol{q}=(q,r)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{F}$，且满足 NLS 的一个真实约束

$$r(y) = \pm q^{*}(y) \tag{2.2.22}$$

其中 $-(+)$对应于聚焦(非聚焦)。非线性算子 L 是通过以下思路引入的：超定线性方程组

$$\left[-i\sigma_3\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & q\\ r & 0\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\psi} = \zeta\boldsymbol{\psi} \tag{2.2.23}$$

$$\left[-i\sigma_3\frac{\partial}{\partial \tau}-\frac{1}{\delta}qr+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \zeta q - iq_y/2\\ \zeta r + ir_y/2 & 0\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\psi} = \zeta^2\boldsymbol{\psi} \tag{2.2.24}$$

对于向量 $\boldsymbol{\psi}(y,\tau,\zeta)$具有一解的充要条件为系数 $\boldsymbol{q}=(q,r)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{F}$ 满足 NLS 方程，这里 σ_3 表示 Pauli 矩阵，$\sigma_3=\mathrm{diag}(1,-1)$，特征参数 ζ 表示一个复常数。这个超定方程组被称为 NLS 方程的 Lax 对，表明 NLS 方程为 ψ 满足的线性方程组的相容条件，其中第一个方程为 Zakharov-Shabat 对 y 的特征值问题，第二个为 τ 的线性流。

超定方程组的空间部分对于可积理论扮演着重要的角色。Zakharov-Shabat 算子 L 的谱理论含有完全可积系统 NLS 的充分多的运动常数，这些运动常数为相空间的函数 $I_j:\mathcal{F}\to R$，它的水平集在 NLS 流下是不变的。

微分算子 L 作用在 $L^2(R,C^2)$上，具有稠定义域 $H^1(R,C^2)$。因它的系数是 y 的函数，Floquet 谱理论是自然的，L 的 Floquet 谱在 NLS 的 τ 流下是不变的，如同它在空间 $\mathcal{F}$中的"等谱"水平集。这些水平集为 L 的 Dirichlet 特征值所刻画。

L 在聚焦的情况下($r=+q^{*}$)是自共轭的，它的谱理论类似于 Hill 算子。最近，Hill 方程已被拓展为具自共轭的 Zakharov-Shabat 算子。

聚焦的非线性 Schrödinger 方程的非自共轭情况对我们来说是很重要的。如我们所看到的非线性 Schrödinger 方程在扰动下产生的混沌状态能追踪非自共轭特征值问题的结构，这种结构在自共轭情况是不出现的。Floquet 理论在非自共轭情况下很少被研究，我们在此综述 Floquet 理论，$(q,r)\in L^2(R,C^2)$。

我们先叙述 Zakharov-Shabat 算子 $\mathrm{L}(q,r)$谱理论的已知性质，再描述这个理论新的发展，最后再列出我们需要的来自 L 谱理论的一些概念。

2.2.4.1　基本矩阵 $\boldsymbol{M}(y;\zeta;q,r)$

设 $M(y;\zeta;q,r)$表示如下初值问题

$$\begin{cases}\mathrm{L}M = \zeta M\\ M(0;\zeta;q,r) = I\end{cases} \tag{2.2.25}$$

的惟一 2×2 矩阵解(对 y 绝对连续)，$\zeta\in\mathbb{C}$，$y\in[0,\tilde{l}]$。注意到当 $q=r=0$ 时，基本矩阵 M 可显式给出

$$M(y;\zeta;q,r) = \exp[i\zeta\sigma_3 y] \tag{2.2.26}$$

其中第三 Pauli 矩阵 $\sigma_3=\mathrm{diag}(1,-1)$。矩阵 M 可由初值问题式(2.2.25)确定，可写成 Volterra 积分方程

$$M(y;\zeta;q,r) \equiv \exp[i\zeta\sigma_3 y] - \int_0^y \exp[i\zeta\sigma_3(y-y')]\,\boldsymbol{Q}(y')M(y';\zeta;q,r)\mathrm{d}y' \tag{2.2.27}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{Q}(y)$为

$$\boldsymbol{Q}(y) = \frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & q(y)\\ -r(y) & 0\end{pmatrix}$$

通过积分方程的迭代，我们能建立 $M(y;\zeta;q,r)$的存在性、解析性(对谱参数、系数 q 和 r)和估计，综述为三个引理。

引理 2.2.1(存在性)　对于 $M(y;\zeta;q,r)$的形式迭代在$[0,\tilde{l}]\times\mathbb{C}\times L^2([0,\tilde{l}],\mathbb{C}^2)$的有界集上一致收敛于初值问题式(2.2.25)的惟一解。进一步 $M(y;\zeta;q,r)$满足积分方程(2.2.27)，且有估计

$$|M(y;\zeta;q,r)| \leqslant \exp[y|\mathrm{Im}\zeta| + y^{1/2}\|Q\|] \tag{2.2.28}$$

其中 $\|Q\|^2 \equiv ((q,q)+(r,r))/8$。

引理 2.2.2(解析性)　对任何 $y\in[0,\tilde{l}]$,$M_{ij}(y;\zeta;q,r)$ 为 $\mathbb{C}\times L^2[[0,\tilde{l}],\mathbb{C}^2]\to H^1([0,\tilde{l}],\mathbb{C}^2)$ 的一个整函数。

引理 2.2.3　(在 $[0,\tilde{l}]\times\mathbb{C}^2\times L^2([0,\tilde{l}],\mathbb{C}^2)$ 上的基本估计)

$$|M(y;\zeta;q,r) - M(y;\zeta;0,0)| \leqslant C(\zeta;\|Q\|)\cdot \exp[y|\mathrm{Im}\zeta| + y^{1/2}\|Q\|] \tag{2.2.29}$$

其中 $C(\zeta;\|Q\|) = D(\zeta;\|Q\|)\min\{1,\|Q\|\}$,$D(\zeta;\|Q\|)\to 0(|\mathrm{Re}\zeta|\to\infty)$。这些估计能进一步改善,如果给 (q,r) 附加的光滑性,例如,$(q,r)\in H^j([0,\tilde{l}],\mathbb{C}^2)$,$j\geqslant 1$。

2.2.4.2　L(q,r)的谱

Zakharov-Shabat 算子 L 的谱为那些存在特征函数 $f(y;\zeta;q,r)$,满足 $Lf=\zeta f$ 的复 ζ 的集合的闭包,它对于一切 $y\in R$,是有界的。通过基本矩阵 M 表示特征函数 f。由于 y 的 $\tilde{l}$ 周期性,我们能特征化这个谱为 $\zeta\in\mathbb{C}$ 集的闭包,对于它,转换矩阵 T

$$T(\zeta;q,r) \equiv M(\tilde{l};\zeta,q,r) \tag{2.2.30}$$

具有具单位模的特征值。T 的特征值由它的行列式和迹所确定。定义 $\Delta\equiv \mathrm{tr}T$,注意到 $\det T=1$,我们能特征化 L 的谱为单个数量函数,即"Floquet 判别式"Δ。

引理 2.2.4(L 的谱)。定义 Floquet 判别式 Δ 为

$$\Delta:\mathbb{C}\times L^2([0,\tilde{l}],\mathbb{C}^2)\to\mathbb{C},\ \Delta(\zeta,q,r)\equiv \mathrm{tr}M(\tilde{l};\zeta;q,r) \tag{2.2.31}$$

$\Delta(\zeta;q,r)$ 为 ζ 和 (q,r) 的整函数,在 $\mathbb{C}^2\times L^2([0,\tilde{l}],\mathbb{C}^2]$ 上满足估计

$$|\Delta(\zeta;q,r) - \Delta(\zeta;0,0)| \leqslant D(\zeta;\|Q\|)\min\{1,\|Q\|\}\cdot \exp[\tilde{l}(\mathrm{Im}\zeta) + \sqrt{\tilde{l}}\|Q\|] \tag{2.2.32}$$

其中,$D(\zeta;\|Q\|)\to 0$,(当 $|\mathrm{Re}\zeta|\to\infty$)。

$\Delta(\zeta;q,\pm q^*)$ 对实的 ζ 是实的,更一般地

$$[\Delta(\zeta;q,\pm q^*)]^* = \Delta(\zeta^*;q,\pm q^*)$$

如 $q(y)$ 为偶函数,则 $\Delta(-\zeta;q,\pm q^*) = \Delta(\zeta;q,\pm q^*)$。

L 的谱:$H^1(R,\mathbb{C}^2)\to L^2(R,\mathbb{C}^2)$ 与 Δ 相关,即谱(L) $=\{\zeta\in\mathbb{C}\,|\,\Delta(\zeta;q,r)$ 为实的,$-2\leqslant\Delta(\zeta;q,r)\leqslant 2\}$。

对于 $r=\pm q^*$,由 Δ 的对称性推出:

(1) $\zeta\in \mathrm{spec}(L)\Rightarrow\zeta^*\in\mathrm{spec}(L)$;

(2) 如 $q(-y)=q(y)$,则 $\zeta\in\mathrm{spec}(L)\Rightarrow-\zeta\in\mathrm{spec}(L)$。

这个引理实质上是引理 2.2.1 ~ 2.2.3 的直接推论,描述基本矩阵 M 的类似性质。为了得到关于 L 谱的某些直观性,以最简单情况 $q=r=0$ 开始,有

$$\Delta(\zeta;0,0) = 2\cos\zeta l \tag{2.2.33}$$

此时 $\mathrm{spec}(L(0.0)) = R$。Floquet 判别式如图 2.2.3 所示。

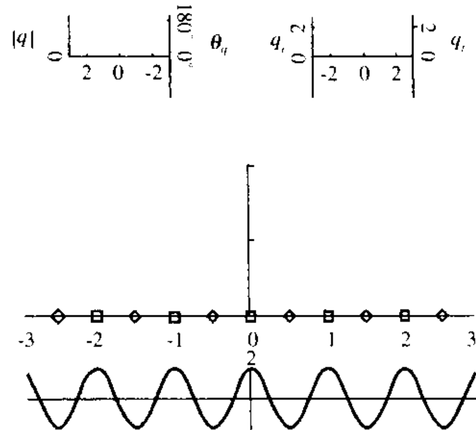


图 2.2.3　Floquet 判别式,$\Delta(\zeta;0,0)$,$q=r=0$,底部 $\Delta(\zeta;0,0)$ 作为 $\mathrm{Re}\zeta$ 的函数中间是 $\mathrm{Im}(\Delta(\zeta;0,0))=0$,顶部是 q 作为 y 的函数,左端 $|q|$(实线)和 θ_q(破折号)作为 y 的函数,右端为 $\mathrm{Re}(q)$(实线)和 $\mathrm{Im}(q)$(破折号)作为 y 的函数,中间段的方形对应于 $\Delta(\zeta)=+2$,菱形对应于 $\Delta(\zeta)=-2$

注意到，"Δ"的临界点为 ζ 的函数，$\{\zeta_j^{(c)}\}$满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Delta(\zeta;0,0)}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta_j^{(c)}} = 0 \tag{2.2.34}$$

在复 ζ 平面上，实 Δ 的曲线在这些临界点处相交。这里，对 $q = r = 0$，$\zeta_j^{(c)} = j\pi/l$。类似式(2.2.32)的估计可以看做是(q,r)在$(q=0,r=0)$扰动。后面将用对称性和 Δ 的解析性来描述 $\mathrm{L}(q,r)$的谱。这里仅作几个附注：(1)非聚焦自共轭情况，$r=q^*$，完全类似于对已知的 Hill 方程的讨论。(2)在自共轭情况，谱是实的，由可数个闭区间(谱的带)组成，由开的、可能是空的区间(谱的间隙)所分开。这些间隙一对一地对应于 Δ 的临界点。自共轭情况直观为图 2.2.4 所示。

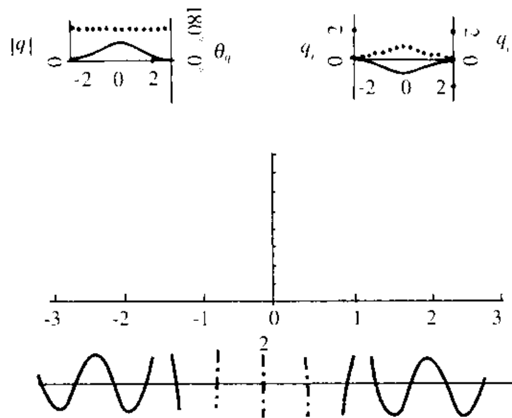


图 2.2.4　一个孤立子的自共轭判别式(竖轴仅在底部超出 -2 和 2 之间，曲线被截断；在中间 $\Delta(\zeta)=\pm2$ 用实曲线)

对自聚焦 $r=-q^*$，L 为非自共轭，此时整个实轴 ζ 位于它的谱中。当$(q,r=-q^*)$从(0,0)开始变形，谱的"背脊"在实临界点后出现，并拓展为实 ζ 平面(见图 2.2.5)。

当$(q,r=-q^*)$大变形，谱的带可以和实轴不相连。当空间周期 $l\to\infty$，谱的带不和实轴相连，退化为复 ζ 平面上的孤立点，$\mathrm{L}(q,-q^*)(q\in L^2(R,C))$的特征值为有界。这些有界态沿全线边界消失时$(q(x)\to0,|x|\to\infty)$和非线性 Schrödinger 方程的孤立子相连；当空间周期 $l\to\infty$时，其渐近行为导致有用的"周期孤立子"。

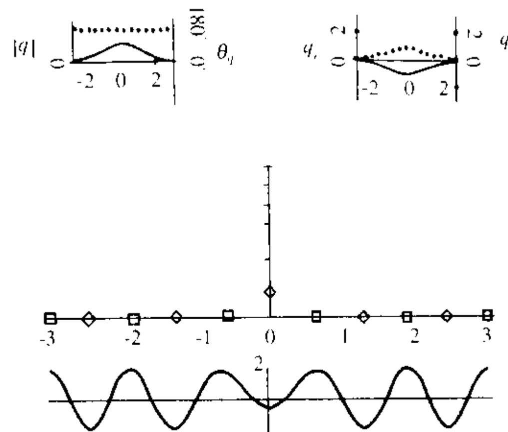


图 2.2.5　与图 2.2.4 相同的孤立子的非自共轭判别式(中间区域的实线表明谱的位置)

定义 2.2.1　周期聚焦情况($r=-q^*$)下，称 q 含有 N 个周期孤立子，如果算子 $\mathrm{L}(q,-q^*)$的谱具有 N 个精确谱带，在 ζ 的上半平面，它和实轴不相连。另外，q 具有辐射分量，谱的每个背脊和实轴相连(非聚焦自共轭情况，仅有一个辐射分量，它和谱的实的间隙相联系)。

2.2.4.3　Floquet 判别式 $\Delta(\zeta,q,r)$

Floquet 判别式(2.2.31)是 NLS 理论的中心，此时 Δ 依赖于谱参数 ζ 和函数 q,r。我们已知 Δ 对 ζ 和(q,r)是整函数，且用到 ζ 为$\mathrm{L}(q,r)$的谱特征。如果系数 $q(y),r(y)$充分光滑，引理 2.2.3 的估计能被改进来描写当 $\zeta\to\infty$时的渐近性态。为得到渐近性，我们从式(2.2.27)的 Picard 迭代出发，并用分部积分逐项估计前面几项。

引理 2.2.5　Δ 的渐近性

对 $\zeta\in R$ 和$(q,r=\pm q^*)\in H^2([0,l],\mathbb{C}^2)$

$$\Delta(\zeta;q,\pm q^*) = 2\cos\zeta l\{1 \mp \frac{1}{2^3(2\zeta)^2}I_0(q,q^*) \pm$$

$$\frac{1}{2^4(2\zeta)^3}I_0(q,q^*)I_1(q,q^*)\} + \frac{1}{2}\sin\zeta l\{\pm\frac{1}{(2\zeta)}I_0(q,q^*) +$$

$$\frac{1}{(2\zeta)^2}I_1(q,q^*) \pm \frac{1}{(2\zeta)^3}I_2(q,q^*)\} + O(|\zeta|^{-4}),$$

$$\zeta = \zeta^*, \zeta \to \pm\infty \tag{2.2.35}$$

其中

$$I_0(q,q^*) = \int_0^l [qq^*]\mathrm{d}y$$

$$\begin{cases} I_1(q,q^*) = \int_0^l \left[\dfrac{qq_y^* - q^* q_y}{2i}\right]\mathrm{d}y \\ I_2(q,q^*) = \int_0^l [q_y q_y^* \pm \dfrac{1}{4}(qq^*)^2]\mathrm{d}y \end{cases} \tag{2.2.36}$$

在最后的式子中,“+”表示非聚焦($r=q^*$)情况,“-”表示聚焦情况($r=-q^*$)。注意 ζ 的渐近行为被多项式常数运动所固定。通过 $O(\zeta^{-3})$,仅要求保留第一~第三不变量($I_0 = L^2$ 模,I_1 = 动量,I_2 = 能量)。对于延续性展开,将出现“高阶”不变量。

不变量的出现(在 Δ 的 ζ 渐近性质中)导致我们考虑 $\Delta(\zeta;q,r)$ 对 (q,r) 的依赖。我们已知 Δ 对函数 (q,r) 是解析的,以下引理给出 Δ 对 (q,r) 一阶导数的公式。

引理 2.2.6 Δ 对 (q,r) 的梯度为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta\Delta}{\delta q}(\zeta;q,r) \\ \dfrac{\delta\Delta}{\delta r}(\zeta;q,r) \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} M_{22}M_{21}^{(l)} - M_{22}^{(l)}M_{21} \\ M_{12}M_{11}^{(l)} - M_{12}^{(l)}M_{11} \end{pmatrix} \tag{2.2.37}$$

其中 $M_{ij} = M_{ij}(y;\zeta;q,r)$,$M_{ij}^{(l)} = M_{ij}(y+l;\zeta;q,r)$。进一步,这个梯度为 y 的周期函数,具有周期 l。

引理的证明由变量参数法进行计算

$$(\mathrm{L}-\zeta)M = 0, \quad M(y=0) = I$$

$$\left[-i\sigma_3\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} - \zeta\right]M = 0, \quad M(0) = I$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} + Q - i\sigma_3\zeta\right]M = 0, Q = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \quad M(0) = I$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} + Q - i\sigma_3\zeta\right]\delta M = -\delta Q M, \quad \delta M(0) = 0$$

$$\delta M[y;\zeta;q,r] = -M(y)\int_0^y M^{-1}(y')\delta Q(y')M(y')\mathrm{d}y'$$

$$\delta\Delta(\zeta;q,r) = -\mathrm{tr}[M(l)\int_0^l M^{-1}(y')\delta Q(y')M(y')\mathrm{d}y']$$

由 Q 的显式,计算即得

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\Delta}{\delta q(y)}(\zeta;q,r) = -\dfrac{i}{2}\mathrm{tr}[M(l)M^{-1}(y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M(y)] \\ \dfrac{\delta\Delta}{\delta r(y)}(\zeta;q,r) = \dfrac{i}{2}\mathrm{tr}[M(l)M^{-1}(y)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}M(y)] \end{cases} \tag{2.2.38}$$

其次,我们注意到位势 $(q(y),r(y))$ 的周期性,基本矩阵的平移 $M(y+l;\zeta;q,r)$ 也是 $(\mathrm{L}-\zeta)M=0$ 的解,因此

$$M(y+l;\zeta;q,r) = M(y;\zeta;q,r)N$$

对某个矩阵 N,它与 y 无关。在 $y=0$ 处展开得

$$M(y+l;\zeta;q,r) = M(y;\zeta;q,r)M(l;\zeta;q,r) \tag{2.2.39}$$

很快由此得到梯度式(2.2.38)对 y 的周期性。另外,可把式(2.2.38)换成形式

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\Delta}{\delta q(y)}(\zeta;q,r) = -\dfrac{i}{2}\mathrm{tr}[M^{-1}(y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M(y+l)] \\ \dfrac{\delta\Delta}{\delta r(y)}(\zeta;q,r) = \dfrac{i}{2}\mathrm{tr}[M^{-1}(y)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}M(y+l)] \end{cases} \tag{2.2.40}$$

由 M^{-1}的显式表示式

$$M^{-1}(y;\zeta;q,r)=\begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \tag{2.2.41}$$

最后建立了梯度公式(2.2.37)。

公式(2.2.37)表示了 Δ 的梯度作为 L 的特征函数的平方积,在这些平方积中的 Wronski 等式能用来验证,对于一切复参数 ζ,$\Delta(\zeta;q,r)$为非线性 Schrödinger 方程流的运动常数。因 Δ 对 ζ 是解析的,作为 ζ 的函数产生可数个非线性 Schrödinger 方程不变量。

定理 2.2.1 $\Delta(\zeta;q,\pm q^*)$是非线性 Schrödinger 方程不变量

(a) $$\{\Delta(\zeta;q,\pm q^*),\Delta(\zeta';q,\pm q^*)\}=0 \tag{2.2.42}$$

$$\forall \zeta,\zeta' \in \mathbb{C}$$

(b) $$\{\Delta(\zeta;q,\pm q^*),H(q,q')\}=0 \tag{2.2.43}$$

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}$$

为证明这个结果,利用式(2.2.37)可计算

$$\{\Delta(\zeta),\Delta(\zeta')\}=\int_0^l\left[\frac{\delta\Delta(\zeta)}{\delta q}\frac{\delta\Delta(\zeta')}{\delta q^*}-\frac{\delta\Delta(\zeta)}{\delta q^*}\frac{\delta\Delta(\zeta')}{\delta q}\right]\mathrm{d}y=\pm$$

$$\int_0^l\{[(M_{22}M_{21}^{(l)}-M_{22}^{(l)}M_{11})(N_{12}N_{11}^{(l)}-N_{12}^{(l)}N_{11})]-$$

$$[(M_{12}M_{11}^{(l)}-M_{12}^{(l)}M_{11})(N_{22}N_{21}^{(l)}-N_{22}^{(l)}N_{11})]\}\mathrm{d}y$$

其中,$M_{ij}=M_{ij}(\zeta;q,\pm q^*)$,$N_{ij}=N_{ij}(\zeta';q,\pm q^*)$,这些表达式的积分是对特征函数的平方积进行的。设 f 和 g 表示两个特征函数,$\mathrm{L}f=\zeta f$,$\mathrm{L}g=\zeta g$,定义积

$$G=f_1g_1$$

$$H=f_2g_2$$

$$F=\frac{1}{2}(f_1g_2+f_2g_1)$$

积(F,G,H)满足方程组

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial}{\partial y}G+qF=2\zeta G \\ i\dfrac{\partial}{\partial y}H\pm q^*F=2\zeta H \\ 2i\dfrac{\partial}{\partial y}F\pm q^*G-qH=0 \end{cases} \tag{2.2.44}$$

进一步,如(F,G,H)为式(2.2.44)在 ζ 处的解,(F',G',H')为式(2.2.44)在 ζ' 处的解,则有

$$\frac{\partial}{\partial y}(GH'+HG'-2FF')=2i(\zeta-\zeta')(GH'-HG')$$

其次,注意到,若$(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{F})$和$(\tilde{\tilde{G}},\tilde{\tilde{H}},\tilde{\tilde{F}})$定义如下

$$M_{22}M_{21}^{(l)}=\tilde{H},\quad M_{22}^{(l)}M_{21}=\tilde{\tilde{H}}$$

$$M_{12}M_{11}^{(l)}=\tilde{G},\quad M_{12}^{(l)}M_{11}=\tilde{\tilde{G}}$$

$$\frac{1}{2}(M_{12}M_{21}^{(l)}+M_{11}^{(l)}M_{22})=\tilde{F}$$

$$\frac{1}{2}(M_{12}^{(l)}M_{21}+M_{11}^{(l)}M_{22})=\tilde{\tilde{F}}$$

它们都是式(2.2.44)的解,则差

$$\begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{H} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{G}} \\ \tilde{\tilde{H}} \\ \tilde{\tilde{F}} \end{pmatrix}$$

也是式(2.2.44)的解。由引理 2.2.6,它的每个分量对 y 也是周期的。因此解表示为完全导数的积分

$$\{\Delta(\zeta),\Delta(\zeta')\}=\mp\frac{i}{8(\zeta-\zeta')}\int_0^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(GH'+HG'-2FF')\mathrm{d}y=0$$

积分消失是由于对 y 的周期性,由此得到(a)。结论(b)的证明来自 $\Delta(\zeta')$在 $\zeta'=\infty$的展开及利用式(2.2.35)的渐近性态。

2.2.4.4 等谱水平集 $\mathscr{M}(q,r)$

NLS 流的可数个不变量可作为 ζ,$\Delta(\zeta;q,\pm q^*)$的简单解析

函数。对一固定的 $q\in L^2$,自然地定义等谱水平集

$$\mathscr{M}(q) = \{r \in L^2([0,l],\mathbb{C}) \mid \Delta(\cdot;r,\pm r^*) = \Delta(\cdot;q,\pm q^*)\} \tag{2.2.45}$$

其次,如像 KdV 和 Sine-Gordon 方程那样,我们研究这个水平集作为 L^2 的一个子集,值得注意的事实是 $\mathscr{M}(q,r)$ 是一典型的环。这个集 $\mathscr{M}(q,r)$ 是紧的,连通的。对于非聚焦情况($r=q^*$),它是一个无穷维的环。对于聚焦情况($r=-q^*$),典型水平集的环性质尚未被建立。

和有限维一样,对可积 Hamilton 系统,水平集 $\mathscr{M}$ 为不变量 $\{\Delta(\zeta;q,\pm q^*),\forall\zeta\}$ 的值所确定。更进一步,梯度 $\{\frac{\delta\Delta}{\delta \boldsymbol{q}}(\zeta;\cdot),\forall\zeta\}$ 之间的线性相关性标志这个水平集的奇性。每个特殊的水平集能提供"角变量"坐标,我们期望通过这些角坐标去利用算子 L 的任意 Dirichlet 特征值。以下将描述这种 Dirichlet 谱的用处。对于非聚焦情况($r=q^*$)它能很好地被应用,而对于聚焦情况($r=-q^*$)还存在一些问题。在一般情况下,$L(q,\pm q^*)$ 的 Floquet 谱提供"作用量"信息,而 $L(q,\pm q^*)$ 的 Dirchlet 谱提供"角动量"信息。

2.2.4.5 Dirichlet 谱 $\{\mu_j\}$

Dirichlet 谱定义如下:

$$\begin{aligned}&(L-\mu)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}\\ &\phi_1(0)+\phi_2(0) = 0\\ &\phi_1(l))+\phi_2(l) = 0\end{aligned} \tag{2.2.46}$$

这些特征值 $\{\mu_j\}$ 是 ζ 的一个解析函数的零点。我们定义 $\boldsymbol{M}(y;\zeta;q,r)$ 作为基本矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 U 变换

$$\boldsymbol{M}(y;\zeta;q,r) = UM(y;\zeta;q,r)U^{\mathrm{T}}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ i & i\end{pmatrix} \tag{2.2.47}$$

则 Dirichlet 特征值 $\{\mu_j(q,r)\}$ 是 $\boldsymbol{M}_{21}(l;\zeta;q,r)$ 的零点,

$$\boldsymbol{M}_{21}(l;\zeta;q,r)\mid_{\zeta=\mu_j(q,r)} = 0$$

$\boldsymbol{M}_{21}$ 可用 M 显式表示

$$\boldsymbol{M}_{21} = \frac{i}{2}(M_{11}-M_{22}+M_{21}-M_{12})$$

对于非聚焦情况($r=q^*$),特征值问题式(2.2.46)是自共轭的,零点 $\{\mu_j(q,q^*)\}$ 是实的。

1. 计数引理

如 $q=r=0$,有 $\boldsymbol{M}_{21} = -\sin\zeta l$,它的零点为

$$\mu_j(0,0) = \frac{j\pi}{l},\quad j\in Z \tag{2.2.48}$$

对大的 $|j|$,特征值 $\mu_j(q,r)$ 逼近于 $\mu_j(0,0)$,

$$\mu_j(q,r) = \frac{j\pi}{l}+o(1),\quad |j|\to\infty \tag{2.2.49}$$

实际上,这个渐近性比 $|j|$ 更快逼近。

引理 2.2.7 固定 $q,r\in H^1$,令 $N=N(\|\boldsymbol{Q}\|_{H^1})\in Z^+$,

$$N \equiv 4[l\|\boldsymbol{Q}\|_2^2\cosh(\sqrt{l}\|\boldsymbol{Q}\|_2) + 3l\|\boldsymbol{Q}\|_{H^1}\sinh(\sqrt{l}\|\boldsymbol{Q}\|_2)]$$

这里 $[x]$ 表示第一个大于 x 的整数,则有

(1) $\boldsymbol{M}_{21}(l;\zeta;q,r)$ 具有 $2N+1$ 个根(依重数计算),在圆盘 $\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|\leqslant(2N+1)\pi/2l\}$ 的内部。

(2) $\forall k\in Z,|k|>N,\boldsymbol{M}_{21}(\zeta)$ 在每个圆盘 $\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-k\pi|/l<\pi/4l\}$ 中具有一个零点。

(3) $\boldsymbol{M}_{21}(\zeta)$ 无其他零点。

这个引理对 Dirichlet 特征值 $\{\mu_j(q,r)\}$ 提供一致控制,甚至对于非自共轭情况也如此。即对每个整数 $k,|k|>N$,在盘中(半径为 π/l,中心在 $k\pi/l$)精确地存在一个 Dirichlet 特征值。整数 N 为 $\boldsymbol{Q}$ 的 H^1 模所控制,或者由 Sobolev 估计,和第一、第二个 NLS 不变量(L^2 模和能量模)所控制。对于 $\mathrm{d}\Delta/\mathrm{d}\zeta$ 的零点,我们有类似的引理。

引理 2.2.8 如同引理2.2.7,定义整数 $N=N(\|\boldsymbol{Q}\|_{H^1})$,考

虑

$$\Delta'(\zeta;q,r)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\Delta(\zeta;q,r)$$

则

(1) $\Delta'(\zeta;q,r)$具有$2N+1$个根(依重数计算),在圆盘$\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|\leqslant(2N+1)\pi/2l\}$中。

(2) $\forall k\in Z,|k|>N,\Delta'(\zeta)$在每个圆盘$\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-k\pi/l|<\pi/4l\}$中具有一个零点。

(3) $\Delta'(\zeta;q,r)$无其他根。

(4) 对于$|\zeta|>(2N+1)\pi/2l$,Δ'的所有根$\{\zeta_j^{(c)},|j|>N\}$都是实的、简单的,且满足渐近式

$$\zeta_j^{(c)}=\frac{j\pi}{l}+O(c),\quad |j|\to\infty \tag{2.2.50}$$

甚至对于非自共轭情况,也存在$\Delta'(\zeta;q,r)$的可数实根,它能渐近拓展至无限。式(2.2.29),式(2.2.30)表明任意 Dirichlet 特征值$\{\mu_j\}$的奇异性态,由于$L(q,r)$的非自共轭性质,$2N+1$个点被限制在圆盘$\{\zeta:|\zeta|<(N+1/2)\pi/l\}$中。

这些"计数引理"表明临界点$\{\zeta_j^{(c)}\}$和 Dirichlet 特征值$\{\mu_j\}$之间的一对一的性质。对于固定$(q,r)\in H^1$,这种对应开始于$\zeta_j^{(c)}\sim\mu_j,|j|>N=N(\|Q\|_{H^1})$,再匹配剩下的有限$(2N+1)$项。对于自共轭$(r=q^*)$情况,这种对应对固定的$q$可拓展为对所有$q\in H^1$,而对于非自共轭情况,这种对应仅在点$q$的小的$H^1$邻域成立。

2. 自共轭情况($r=q^*$)

此时 Dirichlet 特征值$\{\mu_j\}$是实的,且在 Floquet 谱间隙之内。同时对 Dirichlet 特征值μ,$|\Delta(\mu;q,q^*)|\geqslant2$,要看到这点,我们注意到对于实的$\zeta$,$\boldsymbol{M}$为实矩阵,则由计算

$$\Delta(\zeta;q,q^*)=\mathrm{tr}M=\mathrm{tr}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{11}+\boldsymbol{M}_{22},$$

$$1=\det\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{M}_{22}-\boldsymbol{M}_{21}\boldsymbol{M}_{22}\Rightarrow\boldsymbol{M}_{22}(\mu)=\frac{1}{\boldsymbol{M}_{11}(\mu)},$$

$$\Rightarrow|\Delta(\mu)|=|\boldsymbol{M}_{11}+\frac{1}{\boldsymbol{M}_{11}}|\geqslant2$$

这些结果和计数引理表明,对于自共轭情况,$|k|>N$,在 Floquet 谱的间隙之中精确地有一个 Dirichlet 特征值μ_k和一个临界点$\zeta_k^{(c)}$,且能延拓到圆盘$\{\zeta:|\zeta|<(N+1/2)\pi/j\}$内部,间隙、Dirichlet 特征值$\{\mu_j\}$和临界点$\{\zeta_j^{(c)}\}$之间形成自然的一一对应。更进一步,要拓展惟一的对应到任何$q\in H^1$,自共轭性提供了充分的依据。

对于自共轭情况有:(1) Dirichlet 特征值是简单的;(2) $\Delta''(\zeta_j^{(c)})\neq0$;(3)间隙在周期点结束,或对于反周期特征值$\zeta_j^{\pm}$,$\Delta(\zeta_j^{\pm})=2$;(4)周期和反周期特征值的几何重数(即特征空间的维数)等于代数重数(即$\Delta(\zeta_j^{\pm})-2=0$的阶数)。图 2.2.4 对于自共轭情况是正确的,$\forall(q,r=q^*)\in H^1([0,l],\mathbb{C}^2)$。

3. 非自共轭情况($r=-q^*$)

此时不同于以前,且更为复杂,这些不同之处是重要的,因为它们是在可积 NLS 系统中形成不稳定性的重要因素。首先,对于实ζ,考虑一般对称性

$$\zeta=\zeta^*\Rightarrow M(y;\zeta;q,\pm q^*)=\begin{bmatrix}M_{11} & \pm(M_{21})^*\\ M_{21} & (M_{11})^*\end{bmatrix} \tag{2.2.51}$$

对于非自共轭情况$(r=-q^*)$,对称性式(2.2.51)表明,对于实的ζ,$\Delta(\zeta;q,-q^*)$是实的,$-2\leqslant\Delta\leqslant2$:

$$\begin{cases}\zeta=\zeta^*\Rightarrow\Delta(\zeta;q,-q^*)=M_{11}+M_{11}^*\Rightarrow\Delta=\Delta^*\\ 1=\det M=M_{11}M_{11}^*+M_{21}M_{21}^*\Rightarrow|M_{11}|\leqslant1\\ |\Delta|^2=|M_{11}+M_{11}^*|^2=4|M_{11}|^2\leqslant4\end{cases} \tag{2.2.52}$$

因此,对于非自共轭情况,整个实轴是谱,不存在"间隙"。

其次,考虑一个实临界点$\zeta_k^{(c)}$,$\Delta'(\zeta_k^{(c)})=0$,$-2\leqslant\Delta(\zeta_k^{(c)})\leqslant2$。由计数引理 2.2.8,在外圆盘$\{\zeta:|\zeta|>(N+1/2)\pi/l\}$存在可数

个这样的实点。扰动计算表明 $-2<\Delta(\zeta_k^{(c)})<2$。但因 Δ 对 ζ 是解析的，在临界点 $\zeta_k^{(c)}$、$\mathrm{Im}\Delta=0$ 的两处曲线交叉。沿着这些曲线，$\mathrm{Re}\Delta(\zeta)$的鞍点结构显示出，谱的短的背脊必须从 $\zeta_k^{(c)}$ 出发并拓展到整个复平面(见图 2.2.6)。进一步，由 Δ 和Δ'的计数引理可知，若$|\zeta_k^{(c)}|>(N+1/2)\pi/l$，$\mathrm{Im}\Delta=0$ 仅有一条曲线越过实轴 $\zeta_k^{(c)}$ 处，且谱的背脊(spine)位于圆盘$\{\zeta:|\zeta-k\pi/2l|\leqslant 1\}$内。因此，在外圆盘$\{\zeta:|\zeta|>(N+1/2)\pi/l\}$，我们经过充分控制在谱的脊骨、Dirichlet 特征值和 $\Delta(\zeta)$的临界点之间建立自然的一对一对应。对于固定的 $q\in H^1$，能将这种对应拓展到圆盘$\{\zeta:|\zeta|>(N+1/2)\pi/l\}$的内部。由非自共轭性产生非常态，包括谱的背脊不和实轴相连。高重数的 Dirichlet 特征值，其代数重数不等于它的几何重数。

自共轭($r=q^*$)情况，Dirichlet 特征值 μ_j 和临界点 $\zeta_j^{(c)}$ 位于间隙之中

$$\zeta_{2j-1}\leqslant\mu_j,\qquad \zeta_j^{(c)}\leqslant\zeta_{2j}$$

当间隙封闭时，这四点是相等的，

$$\zeta_{2j-1}=\mu_j=\zeta_j^{(c)}=\zeta_{2j}$$

特别地，当"间隙"封闭时，$\Delta(\zeta_j^{(c)})=\pm 2$，Dirichlet 特征值锁定临界点。对于非共轭情况，不存在间隙，μ_j 也不终止于复谱的背脊中。无论如何，对于实临界点 $\zeta_k^{(c)}$，$\Delta=\pm 2$，这也是 Dirichlet 特征值。

4. 迹公式和 $\mathscr{M}(q,r)$的坐标

Dirichlet 特征值提供等谱水平集 $\mathscr{M}(s,r)$的坐标，这是通过"迹公式"得到的。

定理 2.2.2(迹公式)　定义三个序列如下：

$$\{\zeta_j\}:\quad \Delta^2(\zeta;q,r)-4\,|_{\zeta=\zeta_j}=0$$

$$\{\mu_j(y)\}:\quad \boldsymbol{M}_{21}(l;\zeta;q^{(y)},r^{(y)})\,|_{\zeta=\mu_j}=0$$

$$\{\nu_j(y)\}:\quad \boldsymbol{M}_{21}(l;\zeta;iq^{(y)},-ir^{(y)})\,|_{\zeta=\nu_j(y)}=0$$

其中 $q^{(y')}(y)=q(y'+y)$，$r^{(y')}(y)=r(y'+y)$，则

$$\begin{cases} q(y)+r(y)=2\sum\limits_{k\in Z}(\zeta_{2k}+\zeta_{2k-1}-2\mu_k(y)) \\ q(y)-r(y)=-2i\sum(\zeta_{2k}+\zeta_{2k-1}-2\nu_k(y)) \end{cases}\tag{2.2.53}$$

定理的证明从基本矩阵 $\boldsymbol{M}(y;\zeta;q,r)$开始，它满足积分方程，从积分方程的迭代中产生渐近性态($\zeta\to+\infty$)，有

$$\boldsymbol{M}(y;\zeta;q,r)\approx\begin{pmatrix} e^{i\zeta y}\left(1+\dfrac{1}{i8\zeta}\displaystyle\int_0^y q(y')r(y')\mathrm{d}y'\right) & \dfrac{1}{4\zeta}(e^{-i\zeta y}q(y)-e^{i\zeta y}q(0)) \\ \dfrac{1}{4\zeta}(e^{i\zeta y}r(y)-e^{-i\zeta y}r(0)) & e^{-i\zeta y}\left(1-\dfrac{1}{i8\zeta}\displaystyle\int_0^y q(y')r(y')\mathrm{d}y'\right)\end{pmatrix}+$$

$$o\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right)$$

由它可得 Δ 和$\boldsymbol{M}_{21}$的渐近状态

$$\Delta(\zeta;q,r)\approx 2\cos\zeta l+\frac{\sin\zeta l}{4\zeta}\int_0^l q(y)r(y)\mathrm{d}y+o\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right)$$

$$\boldsymbol{M}_{21}(l;\zeta;q,r)\approx-\sin\zeta l\left(1+\frac{q(0)+r(0)}{\zeta}\right)+$$

$$\frac{\cos\zeta l}{8\zeta}\int_0^l q(y)r(y)\mathrm{d}y+o\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right)$$

由这些表示式可得

$$\frac{\Delta^2-4}{-4\boldsymbol{M}_{21}}\approx 1-\frac{2}{\zeta}(q(0)+r(0))+O\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right)$$

Δ^2-4 和 $\boldsymbol{M}_{21}$为 ζ 的整函数，特征值$\{\zeta_j\}$为 Δ^2-4 的零点，Direchlet 特征值$\{\mu_j\}$为 $\boldsymbol{M}_{21}$的零点。Δ^2-4 和 $\boldsymbol{M}_{21}$的无穷乘积展开可得

$$q(0)+r(0)=2\sum_{k\in Z}(\zeta_{2k}+\zeta_{2k-1}-2\mu_k)\tag{2.2.54}$$

其次，我们定义"辅助 Dirichlet 谱"，利用变换$(q,r)\to(iq,-ir)$，对于 Floquet 谱$[\Delta(\zeta;q,r)=\Delta(\zeta;iq,-ir)]$是等谱的变形 Dirichlet 谱。辅助 Dirichlet 谱$\{\nu_j\}$，定义为

$$M_{21}(l;\zeta,iq,-ir)\mid_{\zeta=\nu_j}=0$$

的零点，给出第二迹公式

$$q(0)-r(0)=-2i\sum_{k\in z}(\zeta_{2k}+\zeta_{2k-1}-2\gamma_k)$$

最后，利用第二等谱变换，平移

$$T_{y_0}q=q(y+y_0)$$

$$T_{y_0}r=r(y+y_0)$$

在 Dirichlet 特征值运动下

$$\mu_k(y)\equiv\mu_k(T_yq,T_yr)$$

$$\nu_k(y)\equiv\nu_k(T_yq,T_yr)$$

利用这个平移，迹公式(2.2.53)成立。

2.2.5 聚焦非线性 Schrödinger 方程的 Whisker 环面

这一节我们用 Floquet 判别式去描写这些不变量的双曲性或“鞍点”结构。

2.2.5.1 Floquet 判别式的临界位势

为了定义临界环面，考虑 Floquet 判别式

$$\Delta:\mathbb{C}\times\mathcal{F}\to\mathbb{C},\Delta(\zeta;q,r)\equiv\mathrm{tr}M(l;\zeta,q,r)\tag{2.2.55}$$

它对位势(q,r)的梯度为

$$\begin{cases}\dfrac{\delta\Delta}{\delta q(y)}(\zeta;q,r)=-\dfrac{i}{2}\mathrm{tr}\left[M^{-1}(y)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}M(y)M(l)\right]\\[2ex]\dfrac{\delta\Delta}{\delta r(y)}(\zeta;q,r)=\dfrac{i}{2}\mathrm{tr}\left[M^{-1}(y)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}M(y)M(l)\right]\end{cases}\tag{2.2.56}$$

将矩阵 $M(l;\zeta;\boldsymbol{q})$变换为 Jordon 典型形式

$$V^{-1}M(l;\zeta;\boldsymbol{q})V=\begin{pmatrix}\rho_+&\rho_*\\0&\rho_-\end{pmatrix}\tag{2.2.57}$$

其中 V,ρ_+,ρ_-,ρ_*为$(\zeta,\boldsymbol{q})$的函数，注意到

$$\left.\begin{aligned}\rho_++\rho_-&=\Delta\\\rho_+\rho_-&=1\end{aligned}\right\}\rho_\pm=\frac{-\Delta\pm\sqrt{\Delta^2-4}}{2}\tag{2.2.58}$$

对于所有 ζ，除去周期和反周期特征值外，$\rho_+(\zeta;\boldsymbol{q})\neq\rho_-(\zeta;\boldsymbol{q})$，典型形式是对角的。在简单特征值上，非对角元 $\rho_*\neq0$，而在实重点上，$\rho_*=0$，在复重点上，$\rho_*\neq0$。代数重数能超过几何重数，转换矩阵仅能置换为典型形式。

对于任何 ζ，除去周期或反周期特征值，定义“Bloch 特征函数”的矩阵

$$\begin{bmatrix}\psi_1^{(+)}&\psi_1^{(-)}\\\psi_2^{(+)}&\psi_2^{(-)}\end{bmatrix}\equiv M(y;\zeta)V(\zeta)\tag{2.2.59}$$

其中 $\boldsymbol{\psi}^{(\pm)}=\boldsymbol{\psi}^{(\pm)}(y;\zeta)$。注意到这个矩阵的列为微分算子 L 的特征函数，称之为“Bloch 特征函数”，是由于在一个空间周期上具有变换性质

$$\boldsymbol{\psi}^{(\pm)}(y+l;\zeta)=\rho_\pm(\zeta)\boldsymbol{\psi}^{(\pm)}(y;\zeta)\tag{2.2.60}$$

显然，这些 Bloch 特征函数能写为

$$\boldsymbol{\psi}^{(\pm)}(y;\zeta)=\alpha_\pm[M_{21}(l;\zeta)\boldsymbol{M}^{(1)}(y;\zeta)+(M_{22}(l;\zeta)-\rho_\pm)M^{(2)}(y;\zeta)]$$

其中特征函数$(M^{(1)},M^{(2)})$的基由基本矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的列给出，$\alpha_\pm=\alpha_\pm(\zeta;\boldsymbol{q})$为待定的规范化常数。梯度方程(2.2.56)能用“Bloch 特征函数”表出，利用相似变换下迹的不变性，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\delta\Delta}{\delta q(y)}(\zeta;\boldsymbol{q})=\dfrac{-i}{2}\dfrac{\sqrt{\Delta^2-4}}{W(\psi^{(+)},\psi^{(-)})}[\psi_2^{(+)}(y;\zeta)\psi_2^{(-)}(y;\zeta)]\\[2ex]\dfrac{\delta\Delta}{\delta r(y)}(\zeta;\boldsymbol{q})=\dfrac{-i}{2}\dfrac{\sqrt{\Delta^2-4}}{W(\psi^{(+)},\psi^{(-)})}[\psi_1^{(+)}(y;\zeta)\psi_1^{(-)}(y;\zeta)]\end{cases}\tag{2.2.61}$$

其次，利用 Floquet 判别式去定义有用的可数无穷多的 NLS 不变量，从 Δ 的临界点 $\{\zeta_j^{(c)}\}$ 开始，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\Delta(\zeta;\boldsymbol{q})\mid_{\zeta_j^{(c)}} = 0$$

用计数引理，有

$$\zeta_j^{(c)} = j\pi/l,\ |j| > N$$

$$|\zeta_j^{(c)}| \leqslant (N+\frac{1}{2})\pi/l,\ |j| \leqslant N$$

利用这些临界点，可定义无限多非线性 Schrödinger 方程不变量。对于每个 $j \in Z$，

$$F_j:\mathcal{F} \to C,\quad F_j(\boldsymbol{q}) \equiv \Delta(\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q});\boldsymbol{q})$$

向量 $\boldsymbol{F}$ 的分量 F_j 自然被选取为"Morse 函数"。

当临界点 $\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q}_c)$ 是实的，$F_j(\boldsymbol{q})$ 表示 Floquet 判别式（ζ 是实的，ζ 靠近 $\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q})$）局部极大（或极小）的高度，如图 2.2.6 所示。

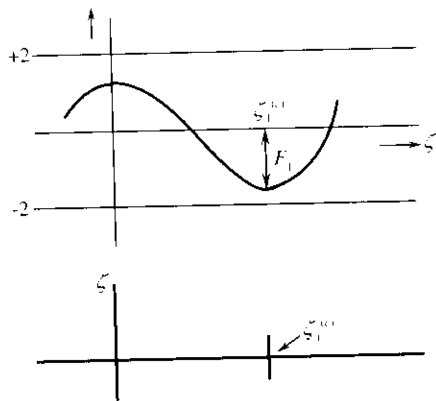


图 2.2.6 Morse 函数 F_1 表现为 Δ 的极小点靠近实临界点，在 L 的连续谱中相连的背脊，自己达到局部极大的

谱理论表明，这个局部极大 $\leqslant 2$。临界点 q_c 的位势，达到数值 2。另一方面，如果重点 $\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q}_c)$ 是复的，则情况更为复杂。$F_j(\boldsymbol{q})$ 不再是实的，要考虑它的实部和虚部。经常出现重要的有用的鞍点结构，此时 $F_j(\boldsymbol{q})$ 可用 Taylor 级数在靠近 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_c$ 处展开。

我们首先计算 F_j 的梯度。设 $\boldsymbol{q}$ 使得第 j 个临界点是简单的。$\Delta''(\zeta,\boldsymbol{q}) \neq 0$，$\zeta = \zeta_j^{(c)}$，由式(2.2.61)计算得

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta F_j}{\delta q(y)} \\ \dfrac{\delta F_j}{\delta r(y)} \end{pmatrix} = \frac{-i}{2}\frac{\sqrt{\Delta^2(\zeta;\boldsymbol{q})-4}}{W(\psi^+,\psi^-)} \begin{pmatrix} \psi_2^+(y;\zeta)\psi_2^-(y;\zeta) \\ \psi_1^+(y;\zeta)\psi_1^-(y;\zeta) \end{pmatrix}_{\zeta=\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q})} \tag{2.2.62}$$

对固定的 $j \in Z$，我们关心使得 $F_j(\boldsymbol{q})$ 取得临界的那些函数 $\boldsymbol{q}_c$。

定理 2.2.3 除了平凡情况 $q \equiv 0$，$\nabla F_j \equiv 0 \Leftrightarrow F_j = \Delta(\zeta_j^{(c)}) = \pm 2$，$\zeta_j^{(c)}$ 为几何重数为 2 的双重点。

如果 F_j 的梯度对 y 恒等于零，则临界点 $\boldsymbol{q}_c$ 必须满足

$$\Delta^2(\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q}_c);\boldsymbol{q}_c) = 4$$

$\zeta_j^{(c)}$ 必须是 L($\boldsymbol{q}$)的周期（或反周期）特征值。如 $\zeta_j^{(c)}$ 是一个简单特征值，它的特征空间是一维的，ψ^+ 和 ψ^- 是线性相关的，且它们的 Wronski 等于零。取消公式(2.2.62)中分子的零点，则 $\boldsymbol{q}_c$ 不是临界的。另一方面，如 $\zeta_j^{(c)}$ 是几何重数为 2 的双重点，在式(2.2.62)中分子为零，表明位势 $\boldsymbol{q}_c$ 的确是临界的（$\boldsymbol{q} = 0$ 是特殊的，因 $\mathrm{grad}\Delta(\zeta,\boldsymbol{0})$ 对一切 ζ 恒为 0）。

我们可用反谱理论去证明临界位势 $\boldsymbol{q}_c$ 的存在性，这些位势称为有限间隙，满足的非线性 ODE 方程称为"Lax-Novikov"方程。用 Abel 变换积分它，将其表示为 θ 函数。固定一个临界点 $\boldsymbol{q}_c$，我们估计 $\boldsymbol{F}_j$ 在 $\boldsymbol{q}_c$ 上的 Hessian。

2.2.5.2 二阶变分 $\delta^2 F_j(\boldsymbol{q}_c)$：不变量的一个鞍点结构

为了研究在临界环邻域的性质，我们在 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_c \neq \boldsymbol{0}$ 附近，将 $F_i(\boldsymbol{q}) = \Delta(\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q});\boldsymbol{q})$ 展开为 Taylor 级数

$$F_j(\boldsymbol{q}) = F_j(\boldsymbol{q}_c) + \delta F_j(\boldsymbol{q}_c) + \delta^2 F_j(\boldsymbol{q}_c) + \cdots$$

(这个展开是可能的,因设 $\Delta''(\zeta_j^{(c)};\boldsymbol{q})\neq 0$,所以 $\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q})$对 $\boldsymbol{q}$ 是解析的)。由 $\boldsymbol{q}_c$ 的临界性得

$$F_j(\boldsymbol{q}) = \pm 2 + \delta^2 F_j(\boldsymbol{q}_c) + \cdots \tag{2.2.63}$$

如同计算一阶变分 δM,二阶变分 $\delta^2 F_j$ 能用参数的变分来计算,由于很繁琐,我们综述最后结果。令

$$\alpha_+ = \alpha_- = \frac{i}{2}\,\frac{1}{\zeta - \zeta_j^{(c)}}\,(b^2\Delta''(\zeta_j^{(c)}))^{-1/2}$$

其中
$$b = \int_0^{l} M_2^{(1)} M_2^{(2)}\,\mathrm{d}y$$

这里设 $b\neq 0$。引入"平方 Bloch 函数" $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$,有

$$\Psi_j^{(\pm)} = (\psi_j^{(+)})^2 \pm (\psi_j^{(-)})^2$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}^{\pm}$ 为取在$(\zeta_j^{(c)}, \boldsymbol{q}_c)$的 Bloch 特征函数。

分解线性空间 $\mathscr{F}$和 $\tilde{\mathscr{F}} = i\mathscr{F}$有

$$\Psi^{\pm} = \Phi^{(\pm,1)} + \Phi^{(\pm,2)}$$

其中

$$\Phi^{(\pm,1)} \equiv \frac{1}{2}\left[\Psi^{\pm} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(\Psi^{\pm})^*\right] \tag{2.2.64}$$

$$\Phi^{(\pm,2)} \equiv \frac{1}{2}\left[\Psi^{\pm} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(\Psi^{\pm})^*\right] \tag{2.2.65}$$

注意到 $\Phi^{(\pm,1)}\in\mathscr{F}$, $\Phi^{(\pm,2)}\in\tilde{\mathscr{F}} = i\mathscr{F}$。

再定义 $\delta\boldsymbol{q}$ 在这四个函数 $\Phi^{(\pm,m)}(y;\zeta)$, $\zeta = \zeta_j^{(c)}$ 空间上的投影($m = 1,2$)

$$\begin{cases}\delta\Sigma_1 \equiv \langle i\Phi^{(+,2)}, \delta\boldsymbol{q}\rangle\\ \delta\Sigma_2 \equiv \langle -\Phi^{(-,1)}, \delta\boldsymbol{q}\rangle\\ \delta\Sigma_3 \equiv \langle -\Phi^{(+,1)}, \delta\boldsymbol{q}\rangle\\ \delta\Sigma_4 \equiv \langle i\Phi^{(-,2)}, \delta\boldsymbol{q}\rangle\end{cases} \tag{2.2.66}$$

因 $i\Phi^{(\pm,2)}$, $\Phi^{(\pm,1)}\in\mathscr{F}$,它们满足对称性,$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^{\mathrm{T}} = (\Phi_1, -\Phi_2^*)$,因此这些投影 $\delta\Sigma$ 是实的。计算可得($F_j = F_j^{\mathrm{R}} + iF_j^{\mathrm{I}}$)

$$\begin{cases}\delta^2 F_j^{\mathrm{R}} = [(\delta\Sigma_1)^2 + (\delta\Sigma_2)^2] - \\ \qquad [(\delta\Sigma_3)^2 + (\delta\Sigma_4)^2]\\ \delta^2 F_j^{\mathrm{I}} = 2[(\delta\Sigma_2)(\delta\Sigma_4) - (\delta\Sigma_1)(\delta\Sigma_3)]\end{cases} \tag{2.2.67}$$

方程(2.2.67)表明 F_j 在 $\boldsymbol{q}_c$ 的二阶变分无穷小地依赖于函数空间的至多四个方向;在 $\boldsymbol{q}_c$ 处 F_j 具有无穷多的零方向(任何变分 $\delta\boldsymbol{q}$ 为零,它正交于四个向量 $\Phi^{(\pm,m)}$所张的空间)。表示式(2.2.67)的不确定性暗示着接近于鞍点结构。

我们先考虑一个实的临界点 $\zeta_j^{(c)}$。因 $\Delta\zeta$ 是实的(ζ 为实的),有 $F_j^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{q}_c + \delta\boldsymbol{q}) = 0$,且

$$\delta^2 F_j = \delta^2 F_j^{\mathrm{R}} \tag{2.2.68}$$

进一步,对实 ζ 的对称性推出 $\Phi^{(+,1)} /\!/ \Phi^{(-,1)}$, $\Phi^{(+,2)} /\!/ \Phi^{(-,2)}$。再由式(2.2.66)计算得

$\zeta_j^{(c)} = (\zeta_j^{(c)})^* \Rightarrow$

$$\delta^2 F_j = \begin{cases}\dfrac{8bb^*}{\Delta''(\zeta_j^{(c)})}[(\delta\Sigma_1)^2 + (\delta\Sigma_2)^2], & \Delta(\zeta_j^{(c)}) = -2\\[2ex] \dfrac{8bb^*}{\Delta''(\zeta_j^{(c)})}[(\delta\Sigma_3)^2 + (\delta\Sigma_2)^4], & \Delta(\zeta_j^{(c)}) = 2\end{cases} \tag{2.2.69}$$

因公式(2.2.69)是很重要的,我们综述(见图 2.2.6)如下:如 $\boldsymbol{q}_c$ 是泛函 $F_j(\boldsymbol{q})$的一个临界点,则 $F_j(\boldsymbol{q}_c) = \pm 2$, $\zeta_j^{(c)}(\boldsymbol{q}_c)$是几何重数为 2 的双重点。当这个双重点为实的,公式(2.2.69)连同 $\Delta''(\zeta_j^{(c)})$的符号推出如 $F = +2$, F_j 在 $\boldsymbol{q}_c$ 取得局部极大;类似地,如 $F = -2$,则取得极小。在函数空间 $\boldsymbol{q}_c$ 的邻域,F_j 仅仅从它的临界值2(-2)减少(增加)。由于 F_j 和 Floquet 判别式 $\Delta\zeta$ 的关系,式(2.2.69)谱理论的推论是复谱的背脊(没有间隙)能从临界点在实 ζ 轴上显示出来。

对于复的临界点，则更为复杂。例子表明所有四个函数 $\Phi^{(\pm,m)}$ 和所有四个变分 $\delta\Sigma^{(m)}$ 是线性无关的。我们仅考虑对于偶位势 $\boldsymbol{q}_c$，$\delta\boldsymbol{q}_0$ 为纯虚临界点的情况，此时 F_j 是实的：$\delta\Sigma_1 /\!/ \delta\Sigma_2$，$\delta\Sigma_3 /\!/ \delta\Sigma_4$。方程(2.2.67)变为

$$\zeta_j^{(c)} = -(\zeta_j^{(c)})^*,\quad \boldsymbol{q}_c + \delta\boldsymbol{q}\quad (偶)\Rightarrow$$

$$\delta^2 F_j = \begin{cases} [(\frac{8}{b}b^*\Delta''(\zeta_j^{(c)})[(\delta\Sigma_4)^2 - (\delta\Sigma_1)^2],\Delta(\zeta_j^{(c)}) = -2 \\ [(\frac{8}{b}b^*\Delta''(\zeta_j^{(c)})[(\delta\Sigma_2)^2 - (\delta\Sigma_3)^2],\Delta(\zeta_j^{(c)}) = 2 \end{cases}$$

(2.2.70)

在公式(2.2.70)中保留的两个变分是无关的，实函数 $F_j(\boldsymbol{q})$ 在 $\boldsymbol{q}_c$ 的确有一个鞍点结构(见图2.2.7)。

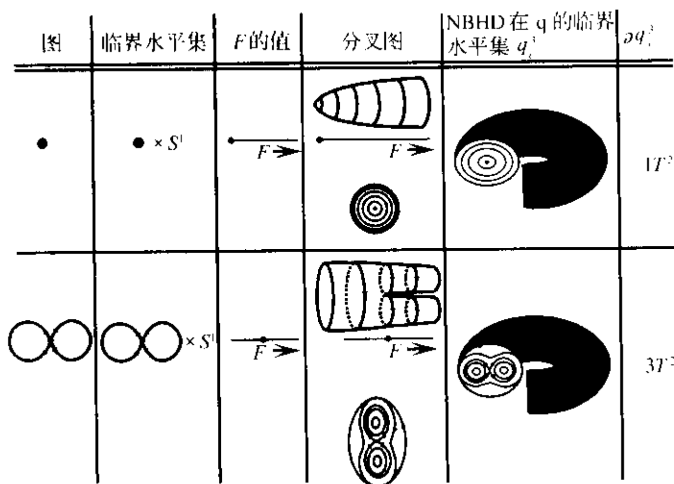


图 2.2.7 Morse 函数 F_1 通过纯虚数临界点附近 Δ 的行为和在 L 的连续谱中的分叉与间隙构形所描述

特别，这意味着在偶函数情况下，背脊和间隙能从纯虚双重点上显示出来。它也意味着在函数空间存在鞍点上一个路径，沿着

它，$F_j(\boldsymbol{q})$ 保持临界值 2。这样一个运动常数的鞍点结构，关系到 $\boldsymbol{q}_c$ 的不稳定性。

2.2.5.3 Floquet 判别式的水平集的 Morse 函数

设 $\boldsymbol{q}\in\mathcal{F}$，它的第一～第三不变量($L^2$ 模，动量和能量)是有界的，使得整数 N 在计数引理中为 1，进一步设 $\boldsymbol{q}$ 位于由偶位势组成的子流形 $\mathcal{M}$ 上，满足

$$F_j(\boldsymbol{q}) = (-1)^j 2,\quad |j|\geqslant 2$$

流形 $\mathcal{M}$ 是四(实)维的，含有 $\boldsymbol{q}=0$。它的切空间在 $\boldsymbol{q}=0$ 处由(1，$\cos ky$)生成($k=2\pi/\tilde{l}$)。$\mathcal{M}$ 是 NLS 的一个不变流形。在 $\mathcal{M}$ 上，NLS 流归结为四维相空间中的一个完全可积 Hamilton 系统，于此能用 Fomenko 的拓扑分类格式。

固定 $F_0(\boldsymbol{q})=f_0$，在 $\mathcal{M}$ 上定义一个三维流形 $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q} = \{\boldsymbol{q}\in\mathcal{M} \mid F_0(\boldsymbol{q}) = f_0\}$$

选取 f_0 使得 F_0 在 $\mathcal{Q}$ 上无临界点。我们用泛函 F_1 作为 $\mathcal{Q}$ 上的 Morse 函数

$$F_1:\mathcal{Q}\to R,\qquad F_1(\boldsymbol{q}) \equiv \Delta(\zeta_1^{(c)}(\boldsymbol{q}),\boldsymbol{q})$$

F_1 的临界点有两种类型：① $\zeta_1^{(c)}(\boldsymbol{q}_c)$ 是实的，$F_1(\boldsymbol{q}_c) = -2$ 为极小；② $\zeta_1^{(c)}(\boldsymbol{q}_c)$ 是纯虚的，$F_1(\boldsymbol{q}_c) = -2$ 是鞍型的。

在三维空间 $\mathcal{Q}$ 中，通过不变量 F_1，水平集能被直观给出(见图2.2.8)。

当然，这些图形仅仅是局部的，靠近临界水平集才是正确的。为通过空间 $\mathcal{Q}$ 整体拓展，要求整体拓扑。然而这种整体处理对无穷维 PDE 是不能实现的。但我们用 $\boldsymbol{F}$ 的分量能提供 Morse 函数序列，用计数引理 N 的移动，将对 $F_j(|j|\leqslant N)$ 产生所关心的结构。我们特别关心水平集的双曲结构，它和 L($\boldsymbol{q}$)中纯虚双重点相关。从图形中我们注意到这个双曲结构能看成裤子的腿。由此可知：①在裤子的叉上鞍点的不稳定形态；②沿着“8”字形的同宿运动；③在扰动下，混沌的符号动力学在两个符号上。裤子的一条腿

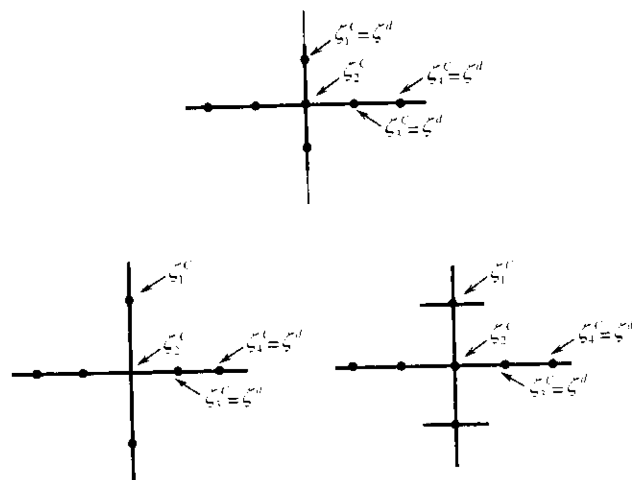


图 2.2.8 一个四维不变流形的临界水平集

由中心在 $y=0$ 的空间结构组成，另一条腿由中心在 $y=\tilde{l}/2$ 的空间结构组成。

在四维情况下，鞍"点"实际上是一个圆；高维时（当 $F_j(\boldsymbol{q})=\pm2$），它是环面。这种环面的不稳定流形由环面自己组成，对每个纯虚双重点，它越过"8"字形。这些不稳定流形称为"Whiskered"环面。

2.2.5.4 线性化理论和平方特征函数基

对于混沌态我们关心 NLS 的时间流的时间不稳定性。这种流就是 NLS 的 Hamilton 形成的 Hamilton 流。鞍点结构（由 Morse 理论描述的）不能保证 NLS 不稳定，但由 $F_1(\boldsymbol{q})$ 所形成的 Hamilton 流是不稳定的。比较两个 Hamilton 向量场 $J\,\mathrm{grad}\,H$ 和 $J\,\mathrm{grad}\,F$，将确定 NLS 的时间不稳定性。我们不作这种比较，而直接研究 NLS 流。

由 NLS 在 $\boldsymbol{q}$ 处的线性化得

$$\begin{cases}2i\tilde{q}_\tau=\tilde{q}_{yy}+(qq^*)\tilde{q}-2q^2\tilde{r}\\ -2i\tilde{r}_\tau=\tilde{r}_{yy}+(qq^*)\tilde{r}-2(q^*)^2\tilde{q}\end{cases}$$

它的 Zakharov-Shabat 线性方程组为

$$\begin{cases}\left[-i\sigma_3\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&q\\-q^*&0\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\psi}=\zeta\boldsymbol{\psi}\\ \left[-i\sigma_3\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+\dfrac{1}{8}qq^*-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\zeta q^*+\dfrac{i}{2}q_y\\ \zeta q^*+\dfrac{i}{2}q_y^*&0\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\psi}=\zeta\boldsymbol{\psi}\end{cases}\tag{2.2.71}$$

其中 σ_3 为 Pauli 矩阵，$\sigma_3=\mathrm{diag}(1,-1)$。这个超定方程组有解，因为系数 q 满足 NLS。对于这个方程组的两个解 $\boldsymbol{\psi}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$，能构造向量

$$\begin{pmatrix}\tilde{q}\\ \tilde{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1\phi_1\\ \psi_2\phi_2\end{pmatrix}$$

直接计算，利用超定方程组(2.2.71)能证明此向量满足线性化方程组(2.2.70)。

其次我们再利用对称性 $\tilde{r}=-\tilde{q}^*$，如$(\tilde{q},\tilde{r})^{\mathrm{T}}$ 为线性方程组的解，则$(\tilde{r}^*,\tilde{q}^*)^{\mathrm{T}}$ 也是。再取和与差可得

$$\begin{pmatrix}\tilde{q}\\ \tilde{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1\phi_1-(\psi_2\phi_2)^*\\ -[\psi_1\phi_1-(\psi_2\phi_2)^*]^*\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{q}\\ \tilde{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i(\psi_1\phi_1+(\psi_2\phi_2))^*\\ -[i(\psi_1\phi_1+(\psi_2\phi_2)^*)]^*\end{pmatrix}$$

选取特征参数 ζ，可使解的周期性得到保证。如选取 ζ 为 $\mathrm{L}(\boldsymbol{q})$的周期或反周期特征值，则解为周期的，周期为 $\tilde{l}$。选取简单的和双重特征值，从线性化的解可生成 L^2 基。用这些基可以考虑解 $\boldsymbol{q}$ 的线性稳定性。首先，基分成两部分，分别由简单特征值和双重形成。对于简单特征值，特征函数没有增长，而对 τ 线性增长，这部分基（由简单特征值形成的）位于 $\boldsymbol{q}$ 的中心流形的切空间

内。对于实的双重点则没有 τ 的增长,这部分基也在中心流形的切空间内。如 $\boldsymbol{q}$ 位于有限维的环面上,则简单特征值和实双重点保证中心流形是无穷维的。

现考虑由复的双重点所形成的基。由计数引理,这部分基是由有限维张成的。对于每个复双重点,存在线性化方程的一个解,它随 τ 指数增长,另一个解随 τ 指数衰减。鞍点结构与临界水平集的拓扑性质相连,而不稳定性则与特殊的流相连。存在例子,复双重点与不稳定性相连,而其他特征值则与稳定状态相连。

2.2.5.5 同宿轨道和 Backlund 变换

固定 $\boldsymbol{q}$,对 NLS 的一个解,线性算子具有复双重点。它和不稳定性相连,且几何重数为 α。令 $(\boldsymbol{\phi}^+,\boldsymbol{\phi}^-)$ 表示在复双重点 ν 处超定线性方程组(2.2.71)的两个线性无关的解,$(\boldsymbol{\phi}^+,\boldsymbol{\phi}^-)$ 满足空间和时间流,因此线性方程组(2.2.71)在$(\boldsymbol{q},\nu)$的一切解为

$$\boldsymbol{\phi}(y,\tau;\nu;c_+,c_-) \equiv c_+\boldsymbol{\phi}^{(+)} + c_-\boldsymbol{\phi}^{(-)} \qquad (2.2.72)$$

用 $\boldsymbol{\phi}$ 定义变换矩阵 $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G} = G(\zeta,\nu;\boldsymbol{\phi}) = N\begin{pmatrix} \zeta-\nu & 0 \\ 0 & \zeta-\nu^* \end{pmatrix}N^{-1} \qquad (2.2.73)$$

其中

$$N \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 & -\phi_2^* \\ \phi_2 & \phi_1^* \end{bmatrix}$$

如果 ψ 为线性方程组(2.2.71)在$(\boldsymbol{q},\zeta)$的解,则

$$\boldsymbol{\Psi}(y,\tau;\zeta) \equiv G(\zeta,\nu;\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\psi}(y,\tau;\zeta) \qquad (2.2.74)$$

为式(2.2.71)在$(\boldsymbol{Q},\zeta)$处的解。新的位势 $\boldsymbol{Q}$ 定义如下:

$$Q(y,\tau) \equiv q(y,\tau) + 4(\nu-\nu^*)\frac{\phi_1\phi_2^*}{\phi_1\phi_1^* + \phi_2\phi_2^*} \qquad (2.2.75)$$

式(2.2.72)和(式 2.2.73)为分别对于特征函数和位势的 Bachlund 变换。

定理 2.2.4 设 $q(y,\tau)$表示 NLS 的 l——周期解,它是线性

不稳定的具有指数不稳定性,与 L($\boldsymbol{q}$)谱的复双重点 ν 相连。设复双重点 ν 的几何重数为 α,特征基为$(\boldsymbol{\phi}^+,\boldsymbol{\phi}^-)$,由式(2.2.72)、式(2.2.73)定义 $Q(y,\tau)$和 $\boldsymbol{\psi}(y,\tau;\zeta)$,则有

(1) $Q(y,\tau)$是 NLS 的 l——周期解;

(2) 谱(L($\boldsymbol{Q}$)) = 谱(L($\boldsymbol{q}$));

(3) 在以下意义下,$Q(y,\tau)$同宿于 $q(y,\tau)$:

$$Q(y,\tau) \to q_{\theta_\pm}(y,\tau) \text{ 依指数 } e^{-\sigma_\nu|\tau|} \quad (\tau \to \pm\infty)$$

其中 $q_{\theta_\pm}$ 为 q 的"环平移",σ_ν 为与复双重点 ν 相关的非零增长率。

(4) $\boldsymbol{\Psi}(y,\tau;\zeta)$为线性方程组(2.2.71)在$(\boldsymbol{Q},\zeta)$上的解。

这个定理是很一般的,从很广泛的一类解 $q(y,\tau)$构造它的同宿解。它的证明是直接的,由选取变换参数 ζ 为双重点,这就保证了解的周期性。这里必须强调几点:(1)解 $Q(y,\tau)$同宿于环 $q(y,\tau)$,它具有复杂的时空结构,不像不动点。(2) 一般来说,同宿解 $Q(y,\tau)$具有比初始解 $q(y,\tau)$更复杂的空间结构。(3) $Q(y,\tau)$同宿于 $q(y,\tau)$的"环平移"。转换 θ_+ 和 θ_- 存在显式公式,存在着同宿轨线之间的非平凡"相平移"。(4)当存在几个复双重点与不稳定性相连。(5)复双重点的数目关系着 $q(y,\tau)$的稳定性。不稳定流形的维数如下:

对每个复双重点具有不等于零的增长率,两个不稳定方向可由复数比 c_+/c_- 表示。

现考虑一个简单例子。考虑均匀空间平面波

$$q = C(\tau) = c\exp\left[-i\left(\frac{c^2}{4}\tau + \gamma\right)\right] \qquad (2.2.76)$$

谱表示如图 2.2.9 所示。

因 $q(\tau)$与 y 无关,依赖于 τ,它的 Bloch 波特征函数能被显式计算出,有

$$\boldsymbol{\phi}^{(\pm)}(y,\tau;\zeta) = e^{\pm i\kappa(y+\zeta\tau)}\begin{pmatrix} -\dfrac{c}{2}\exp\left[-i\left(\dfrac{c^2}{4}\tau+\gamma\right)/2\right] \\ (\pm\kappa-3)\exp\left[i\left(\dfrac{c^2}{4}\tau+\gamma\right)/2\right] \end{pmatrix} \qquad (2.2.77)$$

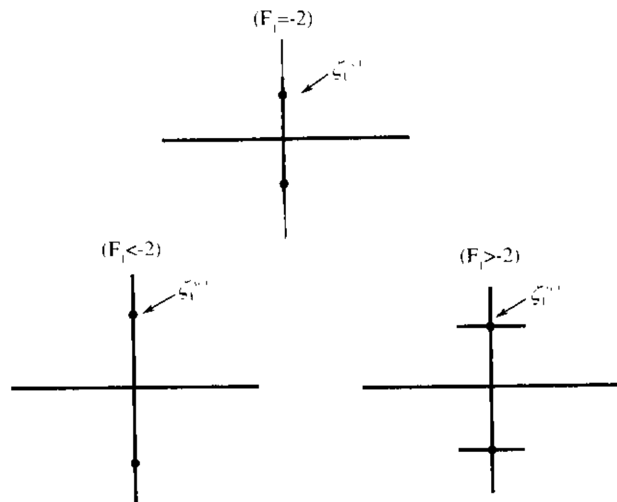


图 2.2.9 I.对于与 y 无关的平面波的谱和平面波邻域里代表点的谱

其中 $\kappa=\kappa(\zeta)=\sqrt{\frac{1}{4}c^2+\zeta^2}$。

基本矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M}(y;\zeta;c,c^*)=\begin{pmatrix}\cos\kappa y+i\dfrac{\zeta}{\kappa}\sin\kappa y & -\dfrac{c}{i}2\kappa\sin\kappa y\\ -\dfrac{c^*}{i}2\kappa\sin\kappa y & \cos\kappa y-i\dfrac{\zeta}{\kappa}\sin\kappa y\end{pmatrix} \tag{2.2.78}$$

注意到由 Fourier 理论,平方特征函数的完备集,记为 $\zeta_j^{(d)}$,其中

$$\kappa_j=\kappa(\zeta_j^{(d)})=\pi\frac{j}{l}$$

在这种基下,存在两个态,一个为 $\kappa=0$(简单谱),其余的为双重点

$$\kappa_j=\sqrt{\frac{1}{4}c^2+(\zeta_j^{(d)})^2}=\frac{\pi j}{l}$$

(对每个 $\zeta_j^{(d)}$,存在一个二维子空间,记以 $\pm\kappa_j$)。在纯虚轴上,时间增长率

$$\sigma^2=|\zeta|^2(c^2-4|\zeta|^2)$$

在双重点 $\zeta_j\in(0,ic/2)$上取值。因此在这个例子中最不稳定模与双重点相连,它位于谱的纯虚背脊的中间,如选取振幅 c 和周期 l 使得仅存在一个双重点 $\zeta_1^{(d)}=i\theta/2$,位于上半平面,我们有

$$\sigma=\pi l\theta$$

此时,存在两个不稳定和两个稳定模。由式(2.2.73)可得一个重要的同宿轨道的显式表达式

$$Q_H=Q_H(y,\tau;c,\alpha;k_j;c_+/c_-)=\exp(\rho+i\beta)$$

定义 p 满足 $\kappa+\nu=(c/2)e^{ip}$,可得

$$Q_H=\left[\frac{\cos2p\pm\sin p\,\mathrm{sech}(\sigma\tau+\rho)\cos2ky-\sin2p\tanh(\sigma\tau+\rho)}{1\mp\sin p\,\mathrm{sech}(\sigma\tau+\rho)\cos2ky}\right]\times$$

$$c\exp\left[-i\left(\frac{c^2}{4}\tau+\gamma\right)\right]\to e^{\mp2ip}c\exp\left[-i\left(\frac{c^2}{4}\tau+\gamma\right)\right]$$

$$\rho\to\pm\infty \tag{2.2.79}$$

关于这个同宿轨道有几个附注:

(1) 对于小的 p,同宿轨道的公式变得更加明确

$$Q\approx[\cos2p-i\sin2p\tanh(\sigma\tau+\rho)\pm$$

$$\sin p\,\mathrm{sech}(\sigma\tau+\rho)\cos(2ky)]\times ce^{-i(\frac{c^2}{4}\tau+\gamma)}$$

(2) 变换参数 $c_+/c_-=\exp(\rho+i\beta)$实际上属于 $S\times R$;在偶对称条件下,相 β 仅有两种可能

$$\beta=p\pm\frac{\pi}{2}\quad(\text{偶性})$$

其中 $\cos p=2k/c=2\pi/lc$,Q_H 是从 S×R 到 R 的两个映照(copies)。

(3) $\rho\to\pm\infty$,α 趋于临界圆 $q(\tau)$。此时"相位移"为

$$\text{相位移}\equiv-4p \tag{2.2.80}$$

(4) 靶(target)q 与 y 无关,而胡须(whisker)通过 $\cos(2ky)$与 y 有关,另一个胡须具有依赖性:$-\cos2ky=\cos(2k(y-\pi/2k))$。这表示胡须具有空间结构,其中一个中心在 $y=0$,而另一个在 $y=\tilde{l}/2$。

(5)存在两个不同的胡须在临界水平集的 Fomenko 表示中形

成“8”字形。它们接近于裤子的两条腿。裤子腿图形表明，在四维相空间，附近的水平集是不相连的，其中一个分量的空间激发位于 $y=0$，另一个靠近 $y=l/2$。Backlund 公式明显表明这种水平集不相连的性质来自偶对称约束，即仅允许两个不同点在参数圆 $c_+/c_-=\exp(\rho+i\beta)$ 上。当这种对敌性放聚时，在圆上的任何点都是允许的，水平集是相连的。

(6) Backlund 变换提供了如下的明显表示：

(a) 一对同宿轨道有关于 $q(\tau)$ 的一个相位移；

(b) q 的不稳定流形，“胡须环”；或

(c) “裤子”的“8”字形。

这三种几何观点在图 2.2.10 中表示出来。

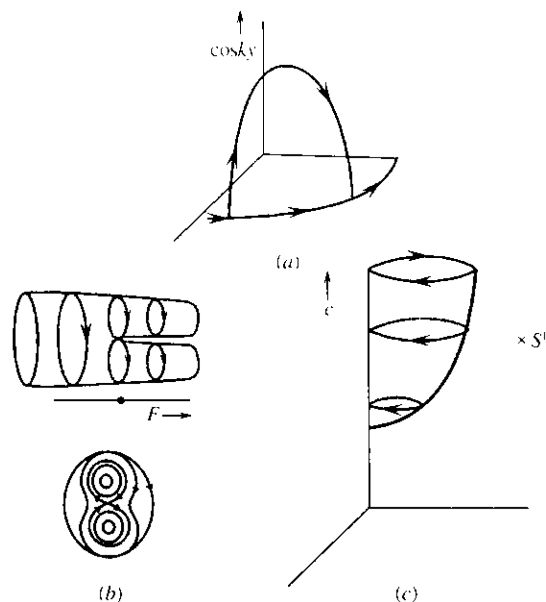


图 2.2.10 三种几何观点：同宿轨道的两种不同三维透视图，平面表示二维常数波形，竖轴表示 $\cos ky$ 模($k=1,2,3,\cdots$)(a)；作为“裤子腿”的一个临界水平集的一个邻域(b)；$W^s_u(A)$像一个“碗”，水平面描述函数空间中由 $\cos ky$ 方向($k=1,2,3,\cdots$)张成的二维区域(c)

现考虑具有两个纯虚双重点空间均匀平面波。以 σ_1 和 σ_2 表示线性化 NLS 的时间增长率，在偶对称下，这个平面波的不稳定流形为四维，坐标为 c,γ,t_0,t_1，其中 t_0 和 t_1 作为相连于两个不稳定模的参数。迭代 Backlund 变换，可产生这个同宿结构的明显表达式，在小振幅下有

$$Q_H \approx [\operatorname{sech}(\sigma_1(\tau+t_0))\cos ky + \operatorname{sech}(\sigma_2(\tau+t_0+t_1))\cos 2ky]\,c\,e^{-i\frac{c^2}{4}\tau+i\gamma(\tau,t_0,t_1)}$$

其中 $\gamma(\tau,t_0,t_1)\to\gamma_\pm,\tau\to\pm\infty$。这个公式仅是一种格式，它表明我们有一个单参数同宿轨道依赖于参数 t_1，该参数则是两个空间激发态的时间分开距离，如图 2.2.11 所示。因此 Backlund 变换为我们提供了二维 Whisker 环面的明显表达式，其参数允许有一个非常清晰的物理解释。

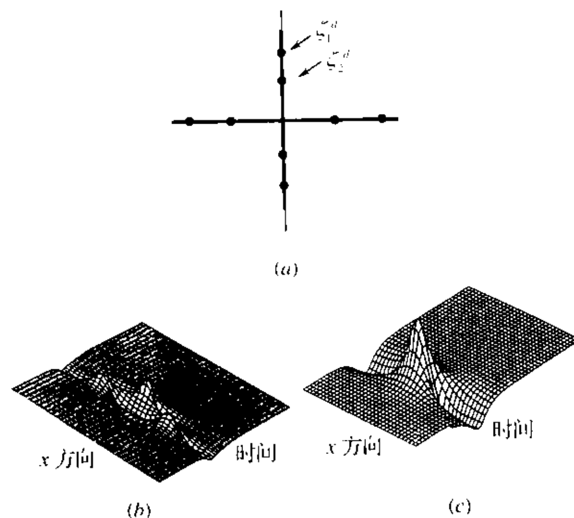


图 2.2.11 与两个复的双重点相关的二维同宿轨道

(a) 谱图；(b) 同宿轨道的时空图，两个不同空间结构及参数 t_1（为两个空间结构出现的时间差）；(c) 作为比较的一个复双重点的同宿轨道

第三章　扰动非线性 Schrödinger 方程四维截断的同宿轨道

3.1　未扰动系统的动力学和几何结构

我们考虑如下扰动的非线性 Schrödinger 方程

$$-iQ_t+Q_{yy}+\left(\frac{1}{2}QQ^*-1\right)Q=i\varepsilon(\alpha Q-\tilde{\beta}Q_{yy}+\Gamma) \tag{3.1.1}$$

具偶周期边界条件

$$\begin{cases}Q(y+L,t)=Q(y,t)\\ Q(-y,t)=Q(y,t)\end{cases} \tag{3.1.2}$$

对方程(3.1.1)作两个模的 Fourier 截断，设

$$Q(y,t)=c(t)+\sqrt{2}b(t)\cos ky \tag{3.1.3}$$

其中 b、c 为复数，$k=2\pi/L$。代入式(3.1.1)并作两个模截断，得

$$\begin{cases}-i\dot{c}+\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|b|^2-1\right)c+\\ \qquad\frac{1}{2}(cb^*+c^*b)b=i\varepsilon(\alpha c+\Gamma)\\ -i\dot{b}+\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{3}{4}|b|^2-(1+k^2)\right)b+\\ \qquad\frac{1}{2}(cb^*+c^*b)c=i\varepsilon\beta b\end{cases} \tag{3.1.4}$$

其中 $\beta\equiv\alpha+k^2\tilde{\beta}$。

现考虑方程组(3.1.4)，令 $\varepsilon=0$，得

$$\begin{cases}-i\dot{c}+\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|b|^2-1\right)c+\\ \qquad\frac{1}{2}(cb^*+c^*b)b=0\\ -i\dot{b}+\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{3}{4}|b|^2-(1+k^2)\right)b+\\ \qquad\frac{1}{2}(cb^*+c^*b)c=0\end{cases} \tag{3.1.5}$$

直接验证，易知方程组(3.1.5)具有两个守恒积分

$$H=\frac{1}{8}|c|^4+\frac{1}{2}|b|^2|c|^2+\frac{3}{16}|b|^4-\frac{1}{2}(1+k^2)|b|^2-\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{8}(b^2c^{*2}+b^{*2}c^2) \tag{3.1.6}$$

$$I=\frac{1}{2}(|c|^2+|b|^2) \tag{3.1.7}$$

于是未扰动方程组可写成 Hamilton 形式

$$\begin{cases}i\dot{c}=\dfrac{\partial H}{\partial c^*}\\ i\dot{b}=\dfrac{\partial H}{\partial b^*}\end{cases} \tag{3.1.8}$$

这里未扰动方程组是具有两个自由度的可积的 Hamilton 系统，且易知它在如下坐标变换下是不变的：

$$(c,b)\to(-c,b) \tag{3.1.9}$$

$$(c,b)\to(c,-b) \tag{3.1.10}$$

$$(c,b)\to(c,b)e^{i\chi} \tag{3.1.11}$$

其中 χ 为任意实数。为了研究式(3.1.5)的不变流形结构，引入如下坐标系

$$c,b,c^*,b^*\to I,\gamma,x,y\to I,\gamma,B,\theta \tag{3.1.12}$$

其中

$$\begin{cases} c = |c| e^{i\gamma} \\ b = (x + iy)e^{i\gamma} \end{cases} \tag{3.1.13}$$

(B, θ 将在以后定义)。

在(I, γ, x, y)坐标中,未扰动方程组(3.1.5)为

$$\begin{cases} \dot{x} = -k^2 y - \dfrac{3}{4}x^2 y + \dfrac{1}{4}y^3 = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = (k^2 - 2I)x + \dfrac{7}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}xy^2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{I} = 0 = \dfrac{\partial H}{\partial \gamma} \\ \dot{\gamma} = 1 - I - x^2 = -\dfrac{\partial H}{\partial I} \end{cases} \tag{3.1.14}$$

具有两个守恒积分

$$H = \frac{1}{2}I^2 - I - \frac{7}{16}x^4 - \frac{3}{8}x^2 y^2 + \frac{1}{16}y^4 + (I - \frac{1}{2}k^2)x^2 - \frac{1}{2}k^2 y^2 \tag{3.1.15}$$

$$I = \frac{1}{2}(|c|^2 + x^2 + y^2) \tag{3.1.16}$$

注意到式(3.1.14)具有特别简单的结构,I 坐标不随时间改变,可简单地看做参数,方程能作进一步的分解。

3.1.1 $\mathscr{M}_0$ 和 $W^s(\mathscr{M}_0) \cap W^u(\mathscr{M}_0)$

考虑式(3.1.14)的 x, y 分量,有

$$\begin{cases} \dot{x} = -k^2 y - \dfrac{3}{4}x^2 y + \dfrac{1}{4}y^3 \\ \dot{y} = (k^2 - 2I)x + \dfrac{7}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}xy^2 \end{cases} \tag{3.1.17}$$

注意到式(3.1.15)在$(x, y) = (0,0)$具有一个不动点(对 I 的一切

值),线性稳定性分析表明$(x, y) = (0,0)$是鞍点($I > k^2/2$),进一步考察包含有原点的水平集$\{(x,y) \mid H(x,y,I) = H(0,0,I)\}$,对于 $I > k^2/2$,原点具有一对称的同宿轨道,在图 3.1.1 中,描述了作为 I 的函数式(3.1.17)相图。

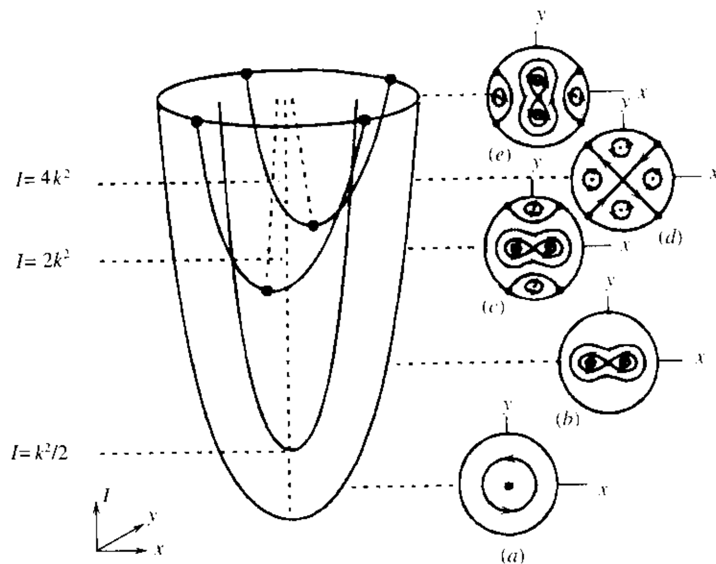


图 3.1.1 函数式(3.1.17)相图

我们在四维相空间解释这些结果,集合

$$\mathscr{M}_0 = \{(x, y, I, \gamma) \mid x = y = 0, \frac{k^2}{2} < I < I_{\max}\} \tag{3.1.18}$$

在式(3.1.14)流下为二维不变流形。换言之,向量场式(3.1.14)正切于 $\mathscr{M}_0$,在 I 的限制下,式(3.1.15)在原点的不动点是双曲的,而 $I < I_{\max}$是为了保证 $\mathscr{M}_0$ 是有界的,于是 $\mathscr{M}_0$ 是法向双曲不变流形。这是重要的,因为法向双曲不变流形沿着它们的稳定和不稳定流形在扰动下是不变的。对于四维系统,相对于原点的式(3.1.17)同宿轨道,显然为 $\mathscr{M}_0$ 的三维稳定和不稳定流形的连接

$$W^s(\mathscr{M}_0) \equiv W^u(\mathscr{M}_0) \equiv \{(x,y,I,\gamma) \mid H(x,y,I) - H(0,0,I) = 0, I > \frac{k^2}{2}\} \quad (3.1.19)$$

显然式(3.1.19)的轨道当 $t \to \pm\infty$ 时趋于 $\mathscr{M}_0$ 的轨线。在图 3.1.2 中,不变流形的结构在我们的分析中是重要的。

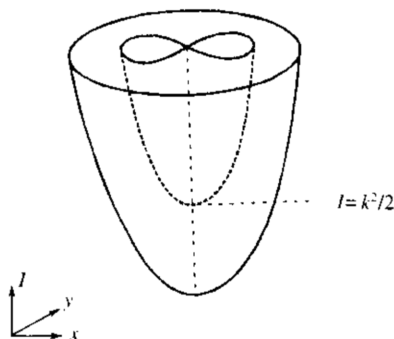


图 3.1.2 不变流形 $\mathscr{M}_0$ 的结构

3.1.2 在 $\mathscr{M}_0$ 上的动力系统

未扰动向量场限制在 $\mathscr{M}_0$ 上为

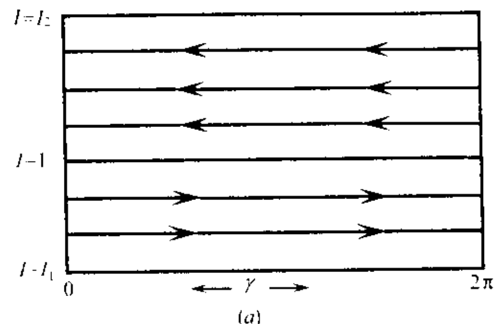
$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\gamma} = 1 - I \end{cases} \quad (3.1.20)$$

由式(3.1.20)描述的动力系统是很简单的,除了 $I=1$ 外,所有轨线位于周期轨道上。在 $I=1$,频率 $\dot{\gamma}$ 消失,因此导致共振。图 3.1.3(a)为在平面上的相图,图 3.1.3(b)为平面上的同宿轨道。

3.1.3 未扰动同宿轨道和它们在 $\mathscr{M}_0$ 与 $\mathscr{M}_0 \cap W^u(\mathscr{M}_0)$ 上的关系

为计算 Melnikov 函数,式(3.1.14)给出的解同宿于不变平面 $\mathscr{M}_0$,这些轨线能从式(3.1.14)的解(它同宿于原点$(x,y)=(0,0)$)来构造,定义式(3.1.12)的第二种坐标变换

$$x + iy = \sqrt{2B}e^{i\theta} \quad (3.1.21)$$



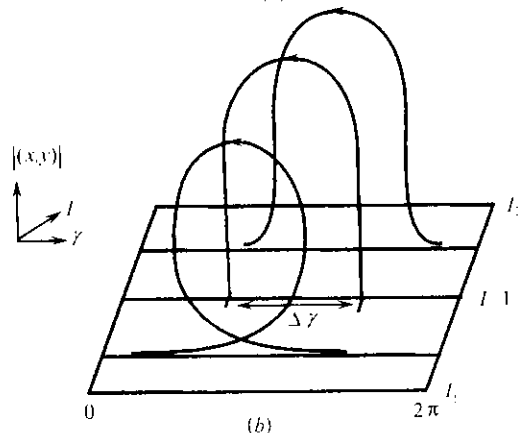


图 3.1.3 平面相图(a)和平面上的同宿轨道(b)

在这种坐标下,未扰动方程(3.1.14)为

$$\begin{cases} \dot{B} = -2B(I-B)\sin 2\theta \\ \dot{\theta} = k^2 - I(1+\cos 2\theta) + B(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta) \\ \dot{I} = 0 \\ \dot{\gamma} = 1 - I - B(1+\cos 2\theta) \end{cases} \quad (3.1.22)$$

Hamilton 量 H 变换为

$$H = \frac{1}{2}I^2 - I - \frac{3}{4}B^2 + (I-k^2)B + B(I-B)\cos 2\theta \quad (3.1.23)$$

由连续性,同宿于 $\mathscr{M}_0$ 的 Hamilton 量等同于"靶"$\mathscr{M}_0$ 上的值,因此 $H=\frac{1}{2}I^2-I$,由式(3.1.23)可得

$$B = I - \frac{4k^2 - I}{3 + 4\cos 2\theta} \tag{3.1.24}$$

将此 B 代入式(3.1.22)中的 θ 方程,可得

$$\dot{\theta} = I(1 + \cos 2\theta) - k^2 \tag{3.1.25}$$

令

$$\psi = \gamma + \theta \tag{3.1.26}$$

和式(3.1.25)相加,由式(3.1.22)的 $\dot{\gamma}$ 方程可得

$$\dot{\psi} = 1 - I - \frac{1}{4}B \tag{3.1.27}$$

方程(3.1.24),式(3.1.25)和式(3.1.27)提供了求解同宿轨道的必要和充分的关系式。当 $I>4k^2$ 和 $k^2/2<I<4k^2$ 时,它是可积的。事实上,当

$$\frac{k^2}{2} < I < 4k^2,\text{具初值 } \theta(t=0)=0, \psi(t=0)=\gamma_0 \tag{3.1.28}$$

有

$$B = \frac{4\lambda^2}{(4k^2 - I)\cosh(2\lambda t) + (3k^2 + I)} \tag{3.1.29}$$

$$\tan\theta_{\pm} = \frac{\lambda}{k^2}\tanh(\lambda t) \tag{3.1.30}$$

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctanh}\left[\frac{\lambda}{7k^2}\tanh(\lambda t)\right] + (1 - I)t + \gamma_0 \tag{3.1.31}$$

其中

$$\lambda = \lambda(k, I) = k\sqrt{2I - k^2}$$

$$\theta_+ \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);\theta_- \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

未扰动方程组限制在不变平面上为式(3.1.20)所给定,即

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\gamma} = 1 - I \end{cases} \tag{3.1.32}$$

因此所有在平面 $\mathscr{M}_0$ 上的轨线为中心在原点的同心圆。由式(3.1.29),式(3.1.30),式(3.1.31)给定的任一同宿轨道同宿于在环形 $\mathscr{M}_0$ 上的这些同心圆中的一个。在此圆中,半径 $I=1$ 的圆为在 $\mathscr{M}_0$ 上不动点所组成的圆,在 $I=1$ 上,同宿轨道实际上是在这个圆上不动点的异宿轨道。从表达式(3.1.27)、式(3.1.30)、式(3.1.31)中,对于同宿轨道可计算位相差 $\Delta\gamma$(对应于 $t\to\pm\infty$)。当 $\frac{1}{2}<k<\sqrt{2}$ 时,由式(3.1.30),式(3.1.31),在 $I=1$ 上给出

$$\psi(-\infty) = \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{2-k^2}{7k^2}}\right) + \psi_0 \tag{3.1.33}$$

$$\psi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{2-k^2}{7k^2}}\right) + \psi_0 \tag{3.1.34}$$

$$\theta(-\infty) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right) \tag{3.1.35}$$

$$\theta(\infty) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right) \tag{3.1.36}$$

由式(3.1.26)得

$$\gamma(-\infty) = \gamma_0 + \arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{7k^2}\right) \tag{3.1.37}$$

$$\gamma(\infty) = \gamma_0 - \arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{7k^2}\right) \tag{3.1.38}$$

因此我们有

$$\Delta\gamma \equiv \gamma(+\infty) - \gamma(-\infty) =$$

$$-2\arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{7k^2}\right) \quad (3.1.39)$$

在图 3.1.4 中给出 $\Delta\gamma$ 的表示。当 $k\to1/2$ 时，$\Delta\gamma\to-\infty$，且为单调函数，当 $k\to\sqrt{2}$，$\Delta\gamma\to0$。

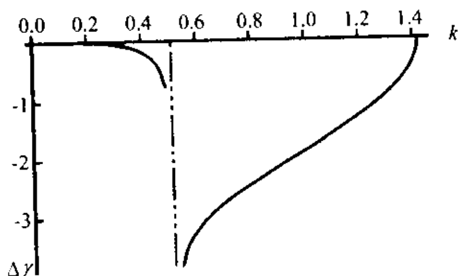


图 3.1.4　$\Delta\gamma$ 的示意图

3.2　扰动系统的几何结构

在坐标式(3.1.12)下，扰动系统式(3.1.4)为

$$\begin{cases} \dot{x} = -k^2y - \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y^3 + \\ \qquad \varepsilon\left[\Gamma\frac{y}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\sin\gamma - \beta x\right] \\ \dot{y} = (k^2-2I)x + \frac{7}{4}x^3 + \frac{3}{4}xy^2 - \\ \qquad \varepsilon\left[\Gamma\frac{x}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\sin\gamma + \beta y\right] \\ \dot{I} = -\varepsilon[\Gamma\sqrt{2I-x^2-y^2}\cos\gamma + \\ \qquad (\beta-\alpha)(x^2+y^2) + 2\alpha I] \\ \dot{\gamma} = 1 - I - x^2 + \varepsilon\Gamma\frac{1}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\sin\gamma \end{cases} \quad (3.2.1)$$

容易看出对称式(3.1.10)对于扰动方程组是不变的，利用未扰动问题的不变流形结构，我们能建立扰动问题的分析。我们将讨论 $\mathcal{M}_0$ 沿扰动问题的稳定和不稳定流形的不变性，再详细讨论 $\mathcal{M}_0$ 扰动系统和未扰动系统的不动点圆，如何“Blow up”为鱼状的共振带。以不动点圆产生 Saddle-Sink 对，鞍点的不稳定流形将形成 Sink 的吸引边界。在四维相空间中，共振中的鞍点将有二维不稳定流形。在这里，理论分析的主要结果是给出使稳定和不稳定流形横截相交的参数条件。

3.2.1　$\mathcal{M}_0$，$W^s(\mathcal{M}_0)$，$W^u(\mathcal{M}_0)$在扰动下的不变性

容易验证 $x=y=0$ 在式(3.2.1)下是不变的，集合

$$\mathcal{M}_\varepsilon \equiv \{(x,y,I,\gamma)\mid x=y=0,\frac{k^2}{2}<I<I_{\max}\} \quad (3.2.2)$$

对于扰动问题是不变流形。$\mathcal{M}_0$ 与 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 的轨线性态是很不同的，这是因为在扰动问题中 $\dot{I}\neq0$，因此 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 必须考虑为有边界的不变流形，或称局部不变流形。这意味着在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 中的轨线要离开 $\mathcal{M}_\varepsilon$，必须越过 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 的边界，即圆 $I=k^2/2$ 和 $I=I_{\max}$。因此，$\mathcal{M}_\varepsilon$ 的稳定和不稳定流形的性质必须给出更加详细的说明。对于初始集的一个不变集的稳定流形意味着渐近逼近于不变集。当 $t\to\infty$，在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 的轨线不再保留在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 内，因此扰动问题 $\dot{I}\neq0$。然而，我们可定义稳定和不稳定流形。我们可用截断函数的方法定义扰动问题的局部稳定与不稳定流形 $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$和 $W^u_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$，这些流形是可微的。在我们的坐标下，具初值的轨线当 t 增加时，$W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$有如下性质：$x,y$ 分量衰减到零；“相角”γ 在圆上保持有界。I 分量具有两种情况：或者它在 $I=k^2/2$ 和 $I=I_{\max}$保持有界，或者跑出 I 的这个范围。在后面这种情况，x,y 的量会增加，我们注意到在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 中具初值的轨线离开 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 至少需 $t=o(1/\varepsilon)$，因为 $\dot{I}=o(\varepsilon)$。

3.2.2　在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 上靠近共振的动力系统

扰动场式(3.2.1)限制在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 上为

$$\begin{cases} \dot{I} = -\varepsilon(\Gamma\sqrt{2I}\cos\gamma + 2\alpha I) \\ \dot{\gamma} = 1 - I + \dfrac{\varepsilon T}{\sqrt{2I}}\sin\gamma \end{cases} \tag{3.2.3}$$

我们关心动力系统式(3.2.3)在靠近 $I = 1$ 的情况,引入坐标变换

$$I = 1 + \sqrt{\varepsilon\sqrt{2\Gamma}}\, J \tag{3.2.4}$$

再标度时间

$$\tau = \sqrt{\varepsilon\sqrt{2\Gamma}}\, t \tag{3.2.5}$$

结合参数

$$\eta = \sqrt{\varepsilon\sqrt{2\Gamma}}, \quad \chi_\alpha \equiv \sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\Gamma}$$

在 $\eta = 0$ 处作 Taylor 展开,并由方程(3.2.3)得

$$\begin{cases} J' = -\cos\gamma - \chi_\alpha - \eta(\chi_\alpha + \dfrac{1}{2}\cos\gamma)J + O(\eta^2) \\ \gamma' = -J + \dfrac{\eta}{2}\sin\gamma + O(\eta^2) \end{cases} \tag{3.2.6}$$

这里"′"表示对 τ 的微分。在 $J-\gamma$ 坐标下可在共振附近一个区域内研究问题,定义

$$\mathscr{A} = \{(x, y, J, \gamma) \mid x = y = 0, \mid J \mid \leqslant C\} \tag{3.2.7}$$

这里 C 为 $O(1)$ 常数,可选取充分大使含有共振结构。

对 $\eta = 0$,方程(3.2.6)归结为

$$\begin{cases} J' = -\cos\gamma - \chi_\alpha \\ \gamma' = -J \end{cases} \tag{3.2.8}$$

这些方程是 Hamilton 的,因此具有 Hamilton 量

$$\mathscr{H} = \frac{J^2}{2}\sin\gamma - \chi_\alpha\gamma \tag{3.2.9}$$

它类似于具常数外力的单摆的 Hamilton 量。简单分析表明,方程

(3.2.8)具有两个不动点,它的坐标为

$$\begin{cases} J = 0 \\ \cos\gamma = -\chi_\alpha \end{cases} \tag{3.2.10}$$

因此,在(J, γ)坐标下,两个不动点的坐标为

$$\begin{cases} p_0 = (J_{p_0}, \gamma_{p_0}) = (0, \pi - \arccos\chi_\alpha) \\ q_0 = (J_{q_0}, \gamma_{q_0}) = (0, \pi + \arccos\chi_\alpha) \end{cases} \tag{3.2.11}$$

其中 p_0 为中心,q_0 为鞍点。这两个不动点当 $\chi_\alpha = 1$ 时构成 Hamiltonian 鞍结点分歧,而且鞍点有一条同宿轨道相连,如图 3.2.1 所示。

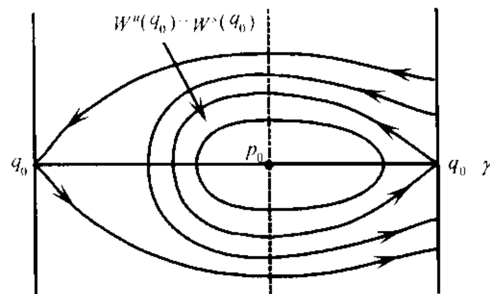


图 3.2.1　同宿轨道在 $\mathscr{M}$ 上的周期轨道和异宿轨道在共振处的不动点

下面考虑具有 η 高阶项的相图,这是很容易的,因式(3.2.6)线性化的迹是 $O(\eta)$阶常数,且由 $-\eta\chi_\alpha + O(\eta^2)$给出,因此应用隐函数定理和标准的相平面结果可知,当 η 充分小时,$0 < \chi_\alpha < 1$,p_0 变成 Sink 点 p_ε,鞍点保留为 q_ε,同宿轨道破裂。q_ε 的不稳定流形的一支滑向 p_ε,如图 3.2.2 所示。

必须强调指出 $p_\varepsilon = p_0 + O(\varepsilon = \eta^2)$;$q_\varepsilon = q_0 + O(\varepsilon = \eta^2)$。在 J-γ^2坐标系中,由 J 的定义,$I \equiv 1 + \eta J$,它们仅出现 $O(\eta)$,对在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的动力学,用 J-γ 坐标是方便的。

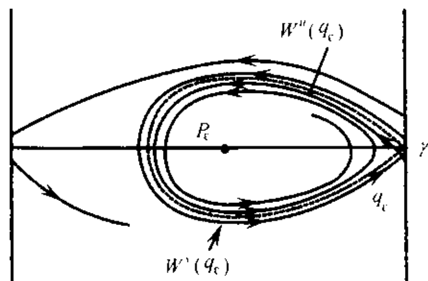


图 3.2.2 对于典型 T,α 值的近似相图

引理 3.2.1 $\chi_\alpha>0$,设 p 为从同宿轨道到未扰动同宿轨道距离为 $O(1)$区域中的一个点,则对充分小 η,扰动式(3.2.6)中通过 p 的轨道当 $\tau\to+\infty$时趋于 p_ε。

证:设 $\chi_\alpha>0$,q_ε 的稳定流形形成p_ε 的吸引盆带,由式(3.2.6)的标准 Melnikov 分析,q_ε 的稳定和不稳定流形限制在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上,除 q_0 的一个小的固定邻域外,位于未扰动同宿轨道的管状邻域内,得证(见图 3.2.3)。

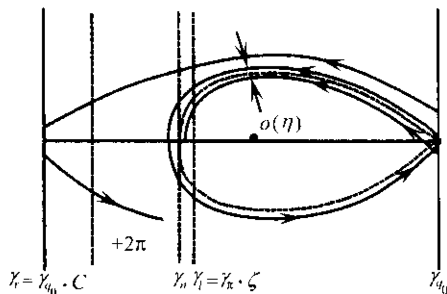


图 3.2.3 q_ε 的稳定和不稳定流形

在下面两节中,我们将用纤维基点的术语。这些基点在 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon$ 上,用它可描述 $W^u(q_\varepsilon)$,$W^s(q_\varepsilon)$叶片的局部位置,为此对于 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon$ 上的 $W^u(q_\varepsilon)$和 $W^s(q_\varepsilon)$将具有更明显的表示。

由正则扰动原理,对于接近不动点的 $q_\varepsilon=(\gamma_{q_\varepsilon},J_{q_\varepsilon})$,流形 $W^u(q_\varepsilon)$限制在环形 $\mathscr{A}$ 上,可表示为平面一条曲线 $J=J(\gamma)$:

$$J_u^\eta(\gamma)=J_u(\gamma)+O(\eta) \tag{3.2.12}$$

其中 J_u 的 Hamilton 式(3.2.9)得到

$$\mathscr{H}(\gamma,J_u(\gamma))=\mathscr{H}(\gamma_{q_0},0)$$

或

$$J_u(\gamma)=2[(\sin\gamma-\sin\gamma_{q_0})+\chi_\alpha(\gamma-\gamma_{q_0})]^{1/2} \tag{3.2.13}$$

可显式地表示函数 $J_u^\eta(\gamma)$的区域

$$\gamma_l<\gamma<\gamma_r$$

其中 $\gamma_l\equiv\gamma_n-\zeta$,常数 ζ 选为 $\eta\ll\zeta\ll1$,γ_l 定义的合理性是由于在 J-γ 平面中,q_ε 的稳定以及不稳定流形之间距离限制在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上在扰动下为 $O(\eta)$。条件 $\eta\ll\zeta\ll1$ 使得定义域远离"鱼的鼻子",q_ε 的不稳定流形叶片可能作为 γ 的图。进一步定义 $\gamma_r\equiv\gamma_{q_0}+C$,其中 $C>0$ 为任意常数,满足

$$\gamma_{q_0}-C+2\pi<\gamma_n+\zeta\bmod 2\pi$$

如图 3.2.3 所示。

类似地,当充分地接近于"鱼的鼻子"时,稳定流形 $W^s(q_\varepsilon)$限制在 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon$ 上能表示为 $\gamma=\gamma_s^\eta(J)$的函数:

$$\gamma_s^\eta(J)=\gamma_s(J)+O(\eta) \tag{3.2.14}$$

其中 $\gamma_s(J)$为如下方程的近似解

$$\sin\gamma_s-\chi_\alpha\gamma_s=\sin\gamma_{q_0}-\chi_\alpha\gamma_{q_0}-\frac{1}{2}J^2 \tag{3.2.15}$$

3.3 稳定和不稳定流形的纤维表示

这一节将讨论稳定和不稳定流形的不同表示,不稳定流形通常表示为解轨线的并集。对于未扰动系统,我们能得到 $W^s(\mathscr{M}_0)=$

$W^u(\mathcal{M}_0)$的参数表示。利用可积系统的轨线,对于扰动系统具有奇性扰动性质,此时扰动与未扰动轨线在半无限时间区间内无保留接近,因此用第二种稳定和不稳定流形表示,作为纤维的表示。对奇性摄动的不变流形理论——奇性摄动理论已经研究了许久,如下就我们的问题作些讨论。

3.3.1 同宿轨道 $W^s(\mathcal{M}_0)$和 $W^u(\mathcal{M}_0)$的表示

我们用已得到的未扰动同宿轨道去得到 $W^s(\mathcal{M}_0)=W^u(\mathcal{M}_0)$的参数化,$B(t)$和 $\theta(t)$的表示已由式(3.1.29)、式(3.1.30)分别得出。在未扰动系统中,仅有 γ 分量作为从一点 $t=0$ 开始的解(I 固定)。因向量场是自治的,时间的平移仍是解,因此我们得到单参数解,$t\to t-t^H$,t 固定,t^H 从不变初始点运动,γ 分量的方程由 $\dot{\gamma}=(1-I)-x^2$ 可得。要考虑 $\gamma(t-t^H)$的积分,就必须考虑 $B(t-t^H)$和 $\theta(t-t^H)$,我们有

$$\gamma(t-t^H)=\gamma^H+(1-I^H)t-\int_0^t[x^{(H)}(s-t^H)]^2\mathrm{d}s$$

其中

$$[x^{(H)}(t)]^2=2B^{(H)}(t)\cos^2\theta^{(H)}(t)$$

这个表示由 $\dot{\gamma}(t-t^H)=(1-I)-x^2(t-t^H)$积分得到。注意到向量 $z_\pm^{(H)}(t,I^H,\gamma^H,t^H)$具有分量

$$\begin{cases}I^{(H)}(t)=I^H\\ \gamma^{(H)}(t)=\gamma^H+(1-I^H)t-\int_0^t[x^{(H)}(s-t^H)]^2\mathrm{d}s\\ B^{(H)}(t)=\dfrac{4\lambda^2}{(4k^2-I^H)\cosh[2\lambda(t-t^H)]+(3k^2+I^H)}\\ Q_\pm^{(H)}(t)=\arctan[\dfrac{\lambda}{k^2}\tanh\lambda(t-t^H)]\end{cases}\tag{3.3.1}$$

其中“±”表示 arctan 的两个分支,$\lambda\equiv\lambda(k,I)=k\sqrt{2I-k^2}$。

(t^H,γ^H,I^H)连同±号提供 $W^s(\mathcal{M}_0)$和 $W^u(\mathcal{M}_0)$的两个分支,事实上,当 t 固定,如 $t=0$,式(3.3.1)给出了这些流形在 R^4 中的明显嵌入。因此,同宿轨道的解析表示可用稳定和不稳定流形的参数表示:

$$W^s(\mathcal{M}_0)=W^u(\mathcal{M}_0)=\bigcup_{\substack{\frac{k}{2}<I^H<I_{\max}\\ t\in(-\infty,\infty)\\ \sigma\in(+,-)}}[z_\sigma^H(0,I^H,\gamma^H,z^H)]\tag{3.3.2}$$

3.3.2 稳定和不稳定流形纤维的直观了解

表示式(3.3.2)使流形的三维性表达得特别清楚,对于某种包含不同时间尺度的奇性扰动问题,稳定和不稳定流形的第二种表示比式(3.3.2)更为有用。第二种表示含有 $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$的纤维,即用具初始条件的一维流形在时间流下具有“最快的变化率”考虑这种情况,在不变流形 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 上,它的所有伸展和收缩比起离开流形 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 的伸展和收缩要慢。例如时间的尺度在流形上是 $O(\varepsilon t)$,而在离开流形时为 $O(t)$,$0<\varepsilon\ll1$ 表示一个小参数。这些不同的时间尺度能保持在长时间后,解在扰动系统中的轨线一致接近未扰动系统的解轨线。但流形作为解轨线的并集使扰动与未扰动流形 $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$和 $W^s(\mathcal{M}_0)$保持接近是不显然的。

为了克服这个困难,Fenichel 定义了稳定流形的纤维:在稳定流形 $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$上的,两个点 P_1 和 P_2 称为在同一纤维上,如果从 P_1 和 P_2 出发的两个解轨线 $z(t,P_1)$和 $z(t_j,P_2)$,具有最快的变化率(当 $t\to\infty$)。因此稳定流形的纤维是两在稳定流形上点的一个等价类,其等价性在于最快收缩的因子。

例 1

$$\dot{y}=-y$$
$$\dot{x}=-\varepsilon(x+y),\quad 0<\varepsilon\ll1$$

它的解轨线通过 $P_1=(x_1,y_1)$为

$$y^{(\varepsilon)}(t_j;P_1) = y_1\exp(-t)$$

$$x^{(\varepsilon)}(t_j;P_1) = [x_1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}y_1]\exp(-\varepsilon t) + [\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}y_1]\exp(-t)$$

$\varepsilon > 0$ 和 $\varepsilon = 0$ 的图像如图 3.3.1 所示。

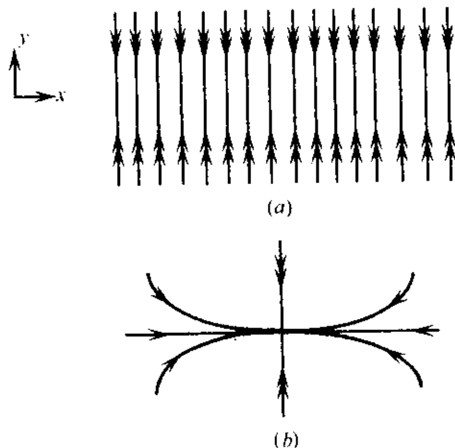


图 3.3.1　例 1 的解轨线

(a) $\varepsilon > 0$; (b) $\varepsilon = 0$。

很清楚,在这两种情况下,轨线在任意时间均不保持接近。在这个例子中,两个时间尺度为 t 和 εt; x 轴($y=0$)是不变的,为慢流形; $W^s(\{y=0\}) = R^2$。当 $\varepsilon = 0$ 时,慢流形为不动点形成的线,而 $\varepsilon > 0$ 时,仅原点是一个不动点。显然,通过 P_1 的扰动轨线($0 < \varepsilon \ll 1$)与通过 P_1 的未扰动轨线不保持接近(于时间 t 一致)。

现计算通过 P_1 的纤维,它要求通过 P_1, P_2 的轨线具有最快的变化率。通过 P_1, P_2 的两条轨线之差为

$$y(t,P_2) - y(t,P_1) = \{y_2 - y_1\}\exp(-t)$$

$$x(t,P_2) - x(t,P_1) = [(x_2 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}y_2) - (x_1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}y_1)] \cdot \exp(-\varepsilon t) + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}[y_2 - y_1]\exp(-t)$$

显然,这要使两条轨线当 $t \to +\infty$ 时具有相同的最快变化率,必须使 $\exp(-\varepsilon t)$ 项的系数为零。这就给出了通过 P_1 的纤维方程

$$\{x_2 = x_1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(y_2 - y_1), \forall y_2\}$$

纤维的图形如图 3.3.2 所示。

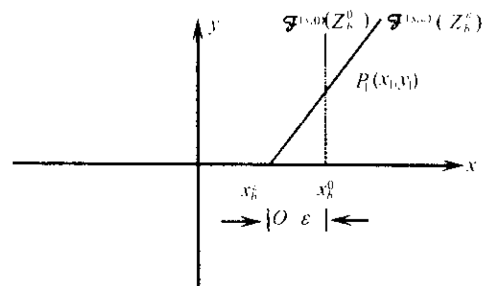


图 3.3.2　例 1 的稳定纤维

纤维的一个重要应用在于它是半无限时间区间内快动力系统和慢动力系统的联系,它和慢流形相交于一点,例 1 中为 x 轴,这点称为纤维的基点。在慢流形上选取 P_2 为

$$z_b^\varepsilon \equiv (x_b^\varepsilon = x_1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}y_1; y_b^\varepsilon = 0)$$

因此通过这个基点的方程为

$$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(z_b^\varepsilon) = \{(x = x_b^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}y; y), \forall y \in R\}$$

这里我们扔掉了下标"1"(因为 P_1 是任意的),在此例中,纤维对 ε 和基点是可微的,且

$$W^s(\mathscr{M}_\varepsilon) = \bigcup_{z_b^\varepsilon \in x\text{轴}} \mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(z_b^\varepsilon)$$

3.3.3　第二个例子

这里考虑第二个例子,即两个模动力系统式(3.2.1)环形 $\mathscr{M}$

上的三维稳定流形,特别地这个例子在慢流形上且有非平凡运动,而离开慢流形相改变不消失。而不动点的共振圆在慢流形上。考虑三维系统

$$\dot{x} = -Ix$$
$$\dot{I} = \varepsilon\gamma$$
$$\dot{\gamma} = -x^2 + (1 - I)$$

其中$(x, I, \gamma) \in R \times R^+ \times S^1, \varepsilon \geqslant 0$。在这个例子中,慢流形 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 为$\{x = 0\}$,对 $\varepsilon \geqslant 0$ 它存在,对于 $I > 0$,它指数吸引到三维稳定流形$\{(x, I, \gamma) \in R \times R^+ \times S^1 \mid x \neq 0\}$。类似地,在慢流形$\{x = 0\}$上 $I = 1, \dot{\gamma} = 0$,具有不动点的圆在 $I = 1$。

当 $\varepsilon = 0$,轨线可明显表示为

$$x(t, P_1) = x_1\exp(-I_1 t)$$
$$I(t; P_1) = I_1$$
$$\gamma(t, P_1) = \gamma_1 + (1 - I_1) + \frac{x_1^2}{2I_1}[\exp(-2I_1 t) - 1]$$

可计算 $\varepsilon = 0$ 时通过 P_1 的稳定纤维

$$\{(x, I = I_1, \gamma = \gamma_1 + \frac{x^2 - x_1^2}{2I_1}), \forall x \in R\}$$

这个纤维的基点是纤维和慢流形的交点,即在通过 P_1 的表达式中置 $x = 0$

$$z_b^0 = (x_b = 0, I_b = I_1, \gamma_b = \gamma_1 - \frac{x_1^2}{2I_1})$$

因此纤维通过它的基点的参数化表达式为

$$\mathscr{F}^{(s,0)}(z_b^0) = \{(x, I = I_b, \gamma = \gamma_b + \frac{x^2}{2I_b}), \forall x \in R\}$$

为了计算 $\varepsilon > 0$ 纤维,给出不同参数的表达式,将未扰动系统的解表示为

$$x(t, P_1) = \exp(-I_1(t - t_1))$$
$$I(t, P_1) = I_1$$
$$\gamma(t, P_1) = \gamma_1 + (1 - I_1)t - \int_0^t x^2(s - t_1)\mathrm{d}s =$$
$$\gamma_1 + (1 - I_1)t + \frac{1}{2I_1}[\exp(-2I_1(t - t_1)) - \exp(2I_1 t_1)]$$

现计算通过点 $P_1 = (I_1, \gamma_1, t_1)$和 $P_2 = (I_2, \gamma_2, t_2)$的纤维,通过计算,轨线的 x 分量之差趋于0,且 $I_1 = I_2$,轨线的 γ 分量之差有

$$\lim_{t \to +\infty}((\gamma(t, P_1) - \gamma(t, P_2)) =$$
$$\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{1}{2I_1}[\exp(2I_1 t_2^H) - \exp(2I_1 t_1^H)] = 0$$

或

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{1}{2I_1}[\exp(2I_1 t_2) - \exp(2I_1 t_1)]$$

通过关系 $x_i = \exp(I_i t_i)(i = 1,2)$,我们发现($\varepsilon = 0$)具两个不同参数的纤维是相同的。

现计算纤维($\varepsilon > 0$),问题是此时不能对一切 I 求解方程组,但能在靠近 I 的共振区求解,令 $I = 1 + \sqrt{\varepsilon}J$ 可得如下常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -(1 + \sqrt{\varepsilon})x \\ \dot{J} = \sqrt{\varepsilon}\gamma \\ \dot{\gamma} = -\sqrt{\varepsilon}J - x^2 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

注意到对 $\varepsilon > 0$,在慢流形上由周期轨道组成动力系统,通过 P_1 的轨线为

$$\begin{cases} x(t;P_2) = x_1\exp[-\int_0^t(1+\sqrt{\varepsilon}J(s))\mathrm{d}s] \\ I(t;P_1) = 1+\sqrt{\varepsilon}\cos\sqrt{\varepsilon}J_1+\sqrt{\varepsilon}\sin\sqrt{\varepsilon}+ \\ \qquad \gamma_1-\sqrt{\varepsilon}x_1^2\int_0^t\sin\sqrt{\varepsilon}(t-s)\}\exp(-2s)\cdot \\ \qquad \exp[-2\sqrt{\varepsilon}\int_0^s J(\xi)\mathrm{d}\xi]\}\mathrm{d}s \\ \gamma(t;P_1) = -\sin\sqrt{\varepsilon}tJ_1+\cos\sqrt{\varepsilon}t\gamma_1- \\ \qquad x_1^2\int_0^t\cos\sqrt{\varepsilon}(t-s)\}\exp(-2s)\cdot \\ \qquad \exp[-2\sqrt{\varepsilon}\int_0^s J(\xi)\mathrm{d}\xi]\}\mathrm{d}s \end{cases} \tag{3.3.4}$$

近似化这些轨线,令

$$d=\int_0^t\exp[i\sqrt{\varepsilon}(t-s)]\}\exp(-2s)\cdot \exp[-2\sqrt{\varepsilon}\int_0^s J(\xi)\mathrm{d}\xi]\}\mathrm{d}s \tag{3.3.5}$$

分部积分之,可得 d 的近似表示

$$\begin{aligned} d = &\left\{\frac{\cos\sqrt{\varepsilon}t}{2}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}\sin\sqrt{\varepsilon}t-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}J_1\cos\sqrt{\varepsilon}t-\right. \\ &\left.\frac{\varepsilon}{8}\cos\sqrt{\varepsilon}t(2\gamma_1+1-4J_1^2-\frac{x_1^2}{2})-\frac{\varepsilon}{2}\sin\sqrt{\varepsilon}tJ_1\right\}+ \\ &i\left\{\frac{\sin\sqrt{\varepsilon}t}{2}-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}J_1\sin\sqrt{\varepsilon}t-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}J_1\cos\sqrt{\varepsilon}t+\right. \\ &\left.\frac{\varepsilon}{2}\cos\sqrt{\varepsilon}tJ_1-\frac{\varepsilon}{8}\sin\sqrt{\varepsilon}t(2\gamma_1+1-4J_1^2-\frac{x_1^2}{2})\right\}+ \\ &O(\varepsilon^{3/2})+O(\mathrm{e}^{-2t}) \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

将式(3.3.6)的实部和虚部代入到式(3.3.4),得

$$\begin{cases} I(t;P_1) = 1+\cos\sqrt{\varepsilon}t(\sqrt{\varepsilon}J_1+\frac{\varepsilon}{4}x_1^2-\frac{\varepsilon^{3/2}}{2}x_1^2J_1)+ \\ \qquad \sin\sqrt{\varepsilon}t[\sqrt{\varepsilon}(\gamma_1-\frac{x_1^2}{2})+\frac{\varepsilon}{2}J_1x_1^2+\frac{\varepsilon^{3/2}}{8}x_1^2(2\gamma_1+ \\ \qquad 1-4J_1^2-\frac{x_1^2}{2})]+O(\varepsilon^2)+O(\mathrm{e}^{-2t}) \\ \gamma(t;P_1) = \sin\sqrt{\varepsilon}t(-J_1-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}x_1^2+\frac{\varepsilon}{2}x_1^2J_1)+ \\ \qquad \cos\sqrt{\varepsilon}t[\gamma_1-\frac{x_1^2}{2}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}x_1^2J_1+\frac{\varepsilon}{8}x_1^2(2\gamma_1+ \\ \qquad 1-4J_1^2-\frac{x_1^2}{2})]+O(\varepsilon^{3/2})+O(\mathrm{e}^{-2t}) \end{cases} \tag{3.3.7}$$

我们还可得到通过任意点 P_1,P_2 的方程,由式(3.3.7)得

$$\begin{aligned} I(t;P_1)-I(t;P_2) = &\cos\sqrt{\varepsilon}t[\sqrt{\varepsilon}(J_1-J_2)+ \\ &\frac{\varepsilon}{4}(x_1^2-x_2^2)-\frac{\varepsilon^{3/2}}{2}(x_1^2J_1-x_2^2J_2)]+ \\ &\sin\sqrt{\varepsilon}t\{\sqrt{\varepsilon}(\gamma_1-\gamma_2-\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}) \\ &+\frac{\varepsilon}{2}(x_1^2J_1-x_2^2J_2)+\frac{\varepsilon^{3/2}}{8}[x_1^2(2\gamma_1+1- \\ &4J_1^2-\frac{x_1^2}{2})-x_2^2(2\gamma_2+1-4J_2^2-\frac{x_2^2}{2})]\}+ \\ &O(\varepsilon^{3/2})+O(\mathrm{e}^{-2t}) \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t;P_1)-\gamma(t;P_2) = &\sin\sqrt{\varepsilon}t[-J_1+J_2-\frac{\varepsilon}{4}(x_1^2-x_2^2)+ \\ &\frac{\varepsilon}{2}(x_1^2J_1-x_2^2J_2)]+\cos\sqrt{\varepsilon}t\{\gamma_1-\gamma_2-\frac{x_1^2}{2}+ \end{aligned}$$

$$\frac{x_2^2}{2}+\frac{\varepsilon}{2}(x_1^2J_1-x_2^2J_2)+\frac{\varepsilon}{8}[x_1^2(2\gamma_1+1-4J_1^2-\frac{x_1^2}{2})-x_2^2(2\gamma_2+1-4J_2^2-\frac{x_2^2}{2})]\}+O(\varepsilon^{3/2})+O(e^{-2t})$$

考虑 $t\to\infty$ 的极限,并要求这个极限消失,可得如下条件

$$\begin{cases} J_1+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}x_1^2-\frac{\varepsilon}{2}J_1x_1^2=J_2+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}x_2^2-\frac{\varepsilon}{2}J_2x_2^2+O(\varepsilon^{3/2}) \\ \gamma_1-\frac{x_1^2}{2}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}x_1^2J_1+\frac{\varepsilon}{8}x_1^2(2\gamma_1+1-4J_1^2-\frac{x_1^2}{2})= \\ \quad\gamma_2-\frac{x_2^2}{2}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}x_2^2J_1+\frac{\varepsilon}{8}x_2^2(2\gamma_2+1-4J_2^2-\frac{x_2^2}{2})+O(\varepsilon^{3/2}) \end{cases} \tag{3.3.9}$$

将$\sqrt{\varepsilon}J=I-1$代入这些式子,且略去下标“2”,则对 $\varepsilon>0$ 通过 P_1 的稳定纤维的方程在原来的(x,I,γ)变量之下为

$$\{(x,I=I_1+\frac{\varepsilon}{4\sqrt{I_1}}(x_1^2-x^2)+O(\varepsilon^{3/2}),$$
$$\gamma=\gamma_1-(\frac{x_1^2}{2I_1}-\frac{x^2}{2I_2})+\frac{\varepsilon}{8}[x_1^2(2\gamma_1+1-\frac{x_1^2}{2})-x^2(2\gamma+1-\frac{x^2}{2})]+O(\varepsilon^{3/2})),\forall x\in R\} \tag{3.3.10}$$

计算这些纤维的基点得

$$z_b^\varepsilon=\{(x=0,I_b=I_1+\frac{\varepsilon}{4\sqrt{I_1}}x_1^2+O(\varepsilon^{3/2}),$$
$$\gamma_b=\gamma_1-\frac{x_1^2}{2I_1}+\frac{\varepsilon}{8}x_1^2(2\gamma_1+1-\frac{x_1^2}{2})+O(\varepsilon^{3/2})),\forall x\in R\} \tag{3.3.11}$$

从这些表达式可看到扰动的纤维的确为未扰动纤维的 $O(\varepsilon)$的扰动。

3.3.4 两个模方程的 $W^s(\mathscr{M}_0)$和 $W^u(\mathscr{M}_0)$的纤维

现考虑两个模方程(3.1.14)的 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$和 $W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)$的纤维,

$$W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)=\bigcup_{z_b^\varepsilon\in\mathscr{M}_\varepsilon}\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(z_b^\varepsilon)$$
$$W_u(\mathscr{M}_\varepsilon)=\bigcup_{z_b^\varepsilon\in\mathscr{M}_\varepsilon}\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(z_b^\varepsilon) \tag{3.3.12}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,这些纤维具有明显表达式,这一点在我们的计算中是很重要的。为了方便,我们将用 $W^s(\mathscr{M}_0)$和 $W^u(\mathscr{M}_0)$的同宿轨道坐标式(3.3.1),这些坐标组成(I^H,γ^H,t^H),其中 I^H,γ^H 提供平面 $\mathscr{M}_0$ 的坐标,而 t^H 则表示点沿着特殊的用(I^H,γ^H)表示的同宿轨道运动。

为了确定起见,首先考虑 $W^u(\mathscr{M}_0)$,令

$$P_j=(I_j^H,\gamma_j^H,t_j^H),j=1,2$$

表示在 $W^u(\mathscr{M}_0)$上通过式(3.3.1)嵌入的两个点,我们得到不稳定纤维满足的方程组,通过在 $t=0$ 的轨线 $z_\pm^H(t;P_j)$可表为

$$\begin{cases} I^{(H)}(t;P_j)=I_j^H \\ \gamma^{(H)}(t;P_j)=\gamma_j^H+(1-I_j^H)t-\int_0^t[x^{(H)}(s-t_j^H)]^2ds \\ B^{(H)}(t;P_j)=\dfrac{4\lambda_j^2}{(4k^2-I_j^H)\cosh[2\lambda_j(t-t_j^H)]+(3k^2+I_j^H)} \\ \theta^{(H)}(t;P_j)=\arctan\left[\dfrac{\lambda_j\tanh[\lambda_j(t-t_j^H)]}{k^2}\right] \end{cases} \tag{3.3.13}$$

其中 $\lambda_j\equiv\lambda(k,I_j^H)$。为了计算差$[z_\pm^{(H)}(t,P_2)-z_\pm^{(H)}(t,P_1)](t\to-\infty)$,我们计算通过 $P_1=(I_1^H,\gamma_1^H,t_1^H)$的不稳定纤维,在这个差

中,θ 和 B 分量急剧地趋于 0,而由 I 和 γ 的急剧收敛性,要求 $I_1^H = I_2^H$。γ 分量的差为

$$\gamma^H(t,P_1^H) - \gamma^H(t,P_2^H) =$$

$$\gamma_1^H - \gamma_2^H - \int_0^t [x^{(H)}(s - t_1^H)]^2 ds + \int_0^t [x^{(H)}(s - t_2^H)]^2 ds =$$

$$\gamma_1^H - \gamma_2^H - \int_{-t_1^H}^{t-t_1^H} [x^{(H)}(s)]^2 ds + \int_{-t_2^H}^{t-t_2^H} [x^{(H)}(s)]^2 ds$$

要求这个表达式当 $t \to -\infty$ 时趋于 0,得

$$\gamma_2^H = \gamma_1^H - \int_{-t_1^H}^{-t_2^H} [x^{(H)}(s)]^2 ds \tag{3.3.14}$$

因此 $P_2 = (I_2^H, \gamma_2^H, t_2^H)$ 位于通过 $P_1 = (I_1^H, \gamma_1^H, t_1^H)$ 的不稳定纤维上,如果稳定纤维

$$\{(I_2^H = I_1^H, \gamma_2^H = \gamma_1^H - \int_{-t_1^H}^{-t_2^H} [x^{(H)}(s)]^2 ds, t_2^H), \forall t_2^H\} \tag{3.3.15}$$

通过 P_1 和 P_2 的基点 $z_b^0 \in \mathcal{M}_0$,可由 $t_2^H \to +\infty$ 得到

$$z_b^0 = \{I_b = I_1^H; \gamma_b = \gamma_1^H - \int_{-t_1^H}^{-\infty} [x^{(H)}(s)]^2 ds\} \tag{3.3.16}$$

由此我们可得到 $\epsilon = 0$ 不稳定流形的表示

$$W^u(\mathcal{M}) = \bigcup_{z_b^0 \in \mathcal{M}_0, \sigma = \pm} \mathcal{F}^{(u,0)}(z_b^0) \tag{3.3.17}$$

其中基点 $z_b^0 = (I_b, \gamma_b, t_2^H)$,纤维为

$$\mathcal{F}^{(u,0)}(z_b^0) = \{(I^H = I_b$$

$$\gamma^H = \gamma_b + \int_{-t^H}^{-\infty} [x^{(H)}(s)]^2 ds; t^H), \forall t^H\} \tag{3.3.18}$$

3.3.5 纤维的性质和特征

这里叙述纤维的主要特征(参见文献[39,41,134])。

定理 3.3.1 存在 $\epsilon_0 > 0$,使得对任何 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ 存在双参数族 $\{\mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(z_b^\epsilon), z_b^\epsilon \in \mathcal{M}_\epsilon\} \in C^r$,称之为不稳定纤维,具有如下性质:

(1) $\{\mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(z_b^\epsilon), z_b^\epsilon \in \mathcal{M}_\epsilon\} = W_{loc}^u(\mathcal{M}_\epsilon) \cup \mathcal{M}_\epsilon, \mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(z_b^\epsilon) \cap \mathcal{M}_\epsilon = z_b^\epsilon$;

(2) $\mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(z_b^\epsilon) \in C^r$(基点 $z_b^\epsilon, \epsilon \in [0, \epsilon_0]$);

(3) $\varphi_t^\epsilon(\mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(\phi_t^\epsilon(z_b^\epsilon)\epsilon, \forall t \leqslant 0, z_b^\epsilon \in \mathcal{M}_\epsilon, \phi_t^\epsilon(z_b^\epsilon) \subset \mathcal{M}_\epsilon$,其中 $\phi_t^\epsilon(\cdot)$ 表示向量场所形成的流;

(4) 存在 $C_u, \lambda_u > 0$,使得如 $z \in \mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(z_b^\epsilon)$,则

$$|\phi_t^\epsilon(z) - \phi_t^\epsilon(z_b^\epsilon)| \leqslant C_u e^{-\lambda_u t}, \quad \forall t \leqslant 0, \phi_t^\epsilon(z_b^\epsilon) \in \mathcal{M}_\epsilon;$$

(5) 对任何 $z_b^\epsilon \neq \bar{z}_b^\epsilon, \mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(z_b^\epsilon) \cap \mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(\bar{z}_b^\epsilon) = \phi$;

(6) 对任何 $z_b^\epsilon \neq \bar{z}_b^\epsilon, z \in \mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(z_b^\epsilon), \bar{z} \in \mathcal{F}^{(u,\epsilon)}(\bar{z}_b^\epsilon)$,

则有

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{|\phi_t^\epsilon(z) - \phi_t^\epsilon(z_b^\epsilon)|}{|\phi_t^\epsilon(\bar{z}) - \phi_t^\epsilon(z_b^\epsilon)|} = 0$$

类似的叙述对于 $W_{loc}^s(\mathcal{M}_\epsilon) \cup \mathcal{M}_\epsilon$ 的纤维也成立。

3.3.6 $W^u(q_\epsilon)$ 和 $W_{loc}^s(\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\epsilon)$ 子集的纤维表示

这里要从中得到 $W^u(q_\epsilon)$ 和 $W_{loc}^s(\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\epsilon)$ 纤维的主要构造,并表明如何用纤维来构造这些流形的叶片。

首先,回顾对 $\mathcal{M}_\epsilon$ 平面上运动的描述。在这个平面中,靠近 $q_\epsilon(\gamma_l < \gamma < \gamma_\gamma)$,$q_\epsilon$ 的不稳定流形限制于 $\mathcal{M}_\epsilon$ 的叶片可表示为 γ 的函数

$$[W^u(q_\epsilon) \cap \mathcal{M}_\epsilon] \supset \{(\gamma, I_u^\eta(\gamma)), \forall \gamma \in (\gamma_q, \gamma_r)\} \tag{3.3.19}$$

其中函数

$$I_u^\eta(\gamma) = 1 + \eta J_u(\gamma) + O(\eta^2) \tag{3.3.20}$$

这里 $\eta^2 = [\sqrt{2}\epsilon I]$,$J_u(\gamma)$ 为式(3.2.13)给定。

现从纤维基点位于 $\mathcal{M}_\epsilon$ 中的曲线 $I_u^\eta(\gamma)$ 上的不稳定纤维出发,去构造四维空间中 $W^u(q_\epsilon)$ 的叶片。$W^u(q_\epsilon)$ 的叶片的纤维表示为

$$W^u(q_\epsilon) \supset \bigcup_{\gamma \in (\gamma_l, \gamma_r), \sigma = \pm 1} \mathcal{F}^{(u,\epsilon)}\{z_b^\epsilon = (I_u^\epsilon(\gamma), \gamma, 0, 0)\} =$$

$$W^{u}_{\text{res}}(q_\varepsilon) \tag{3.3.21}$$

如图 3.3.3 所示。

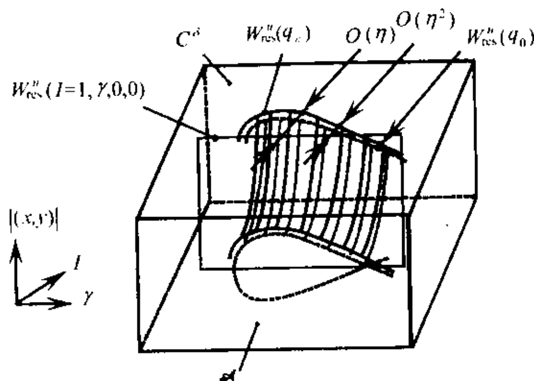


图 3.3.3 集合 $W^u_{\text{res}}(q_\varepsilon)$, $W^u_{\text{res}}(q_0)$和 $W^u_{\text{res}}(I+1,\gamma,0,0)$的叶片的纤维表示

定义集合

$$\bigcup_{\gamma\in(\gamma_l,\gamma_r);\sigma=\pm1} \mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}\{z_b^\varepsilon=((1+\eta)J_u(\gamma),\gamma,0,0)\}\equiv$$

$$W^u_{\text{res}}(q_0) \tag{3.3.22}$$

$$\bigcup_{\gamma\in(\gamma_l,\gamma_r);\sigma=\pm1} \mathscr{F}^{(u,0)}\{z_b^0=(1,\gamma,0,0)\}\equiv$$

$$W^u_{\text{res}}(I=1,\gamma,0,0) \tag{3.3.23}$$

其中 $W^u_{\text{res}}(I=1,\gamma,0,0)$表示未扰动系统中不动点圆的二维不稳定流形的叶片。考虑如下的在四维空间中含有 $\mathscr{A}$ 的圆柱

$$\mathscr{C}^\delta\equiv\{z=(I,\gamma,x,y)\mid x^2+y^2=\delta^2;I,\gamma\text{ 任意}\}$$

其中 $0<\delta\ll1$, δ 与 ε 无关。集合 $W^u_{\text{res}}(q_\varepsilon)\cap\mathscr{C}^\delta$, $W^u_{\text{res}}(q_0)\cap\mathscr{C}^\delta$ 和 $W^u_{\text{res}}(I=1,r,0,0)\cap\mathscr{C}^\delta$ 为图 3.2.3 中的曲线。我们注意到当 δ 和 ε 充分小,任意给定的纤维和 $\mathscr{C}^\delta$ 横截相交于惟一的一点,这从不稳定纤维式(3.3.18)当 $\varepsilon=0$ 时计算可得。由此可得当 ε 充分小时横截相交的不变性。从纤维的扰动理论(定理 3.3.1)可知,$W^u_{\text{res}}(q_\varepsilon)\cap\mathscr{C}^\delta$ 和 $W^u_{\text{res}}(q_0)\cap\mathscr{C}^\delta$ 与 $W^u_{\text{res}}(I=1,\gamma,0,0)\cap\mathscr{C}^\delta$ 之间为 C^r

的$\sqrt{\varepsilon}$逼近(见图 3.3.3)。

类似地,可得 $\mathscr{A}$ 的局部稳定流形的纤维表示

$$W^s_{\text{loc}}(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)\supset\subset\bigcup_{z_b^\varepsilon\in\mathscr{A};\sigma=\pm1}\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(z_b^\varepsilon) \tag{3.3.24}$$

3.4 q_ε 的同宿轨道

这一节将用 Melnikov 型度量考察二维 $W^u(q_\varepsilon)$是否和三维 $W^s(\mathscr{A})$相交,我们从同宿坐标开始。

为方便计,将扰动向量场写为更简捷形式

$$z_t = J\nabla H+\varepsilon\boldsymbol{g} \tag{3.4.1}$$

其中梯度表示对辛坐标(I,x,γ,y)进行,未扰动 Hamilton 量为

$$H=\frac{1}{2}I^2-I-\frac{7}{16}x^4-\frac{3}{8}x^2y^2+\frac{1}{16}y^4+(I-\frac{1}{2}k^2)x^2-\frac{1}{2}k^2y^2 \tag{3.4.2}$$

J 表示辛矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

扰动量 $\boldsymbol{g}$ 为

$$\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}g_I\\ g_x\\ g_\gamma\\ g_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-[\Gamma\sqrt{2I-x^2-y^2}\cos\gamma+(\beta-\alpha)(x^2+y^2)+2\alpha I]\\ \Gamma\dfrac{y}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\sin\gamma-\beta x\\ \Gamma\dfrac{1}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\sin\gamma\\ -\left[\Gamma\dfrac{x}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\sin\gamma+\beta y\right]\end{pmatrix}$$

扰动 $\boldsymbol{g}$ 也可写成形式

$$\boldsymbol{g} = \Gamma J \nabla H_1 + \alpha \boldsymbol{g}_\alpha + \beta \boldsymbol{g}_\beta \tag{3.4.3}$$

其中 Hamilton 量的扰动 H_1 为

$$H_1 \equiv -\sqrt{2I - x^2 - y^2}\sin\gamma$$

3.4.1 同宿坐标和超平面 Σ

对每个固定 $T > 0$,由方程(3.3.1)定义映射$(I^H, \gamma^H, t^H) \to z_\pm^H(T; I^H, \gamma^H, t^H)$,它是 $W^s(\mathscr{M}_0) = W^u(\mathscr{M}_0)$到 R^4 的一个嵌入。由未扰动系统 H 和 I 的常数运动,可构造在 $z_0 \equiv z_\pm^H(T; I^H, \gamma^H, t^H)$上的一个正交标架,引入新的运动常数 K

$$K(x, y, I) \equiv H(x, y, I) - H(0, 0, I) =$$

$$H(x, y, I) - \left(\frac{1}{2}I^2 - 1\right) \tag{3.4.4}$$

容易验证 $K = 0$ 是同宿流形 $W^s(\mathscr{M}_0) \cap W^u(\mathscr{M}_0)$(其中适当限制 I)。由 K 构造四个单位向量:

$$\begin{cases} \hat{n}_K = \dfrac{\nabla K}{|\nabla K|} \\ \hat{n}_I = \dfrac{\nabla I + \beta \nabla K}{|\nabla I + \beta \nabla K|} \\ \hat{m}_K = J\hat{n}_K \\ \hat{m}_I = J\hat{n}_I \end{cases} \tag{3.4.5}$$

其中选取 β 使得$\hat{n}_I$ 和$\hat{n}_K$ 正交,$|\cdot|$表示通常的欧氏模,J 表示上面给定的辛矩阵,四个向量在 $z_0 = z_\pm^{(H)}(T; I^H, \gamma^H, t^H)$上取值,定义在点 $z_0 = z_\pm^{(H)}(T; I^H, \gamma^H, t^H)$的一个正交标架;在任意点(除在 $\mathscr{M}_0$ 上的点外)单位向量 $\hat{n}_K$ 正交于 $W^s(\mathscr{M}_0) \cap W^u(\mathscr{M}_0)$,其余三个单位向量张成任意点上 $W^s(\mathscr{M}_0) \cap W^u(\mathscr{M}_0)$的切空间。

在 $z_0 = z_\pm^{(H)}(T; I^H, \gamma^H, t^H)$上,定义三维超平面 Σ,有

$$\Sigma \equiv \{z \mid z = z_0 + \hat{a}_K a_K + a_I \hat{n}_I + b_I \hat{m}_I, \forall a_K, a_I, b_I \in R\} \tag{3.4.6}$$

关于 Σ 有几点必须强调:

(1) 向量 $z = z_0 + b_K J \nabla K (b_K \in R)$正交于超平面 Σ;

(2) 因 $J\nabla H = J(\nabla K - (I - 1, 0, 0, 0))$在"共振带"$I = 1 + \eta J$ 中,有

$$J\nabla H = J\nabla K + O(\sqrt{\varepsilon})$$

因此当 ε 充分小时,未扰动向量场 $J\nabla H$ 横切于超平面 Σ;

(3) 由横截相交的不变性,扰动向量场 $J\nabla H + \varepsilon g$ 横截于超平面 Σ,超平面和向量场的横截性对于 $W^s(\mathscr{M}_0)$, $W^u(\mathscr{M}_0)$, $W^s(\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_\varepsilon)$, $W^u(q_\varepsilon)$同 Σ 相交超平面的维数和几何性质,具有某些重要的推论。这里 $\mathscr{A}$ 由式(3.2.7)定义,表示含有共振圆的平面环。

首先,我们注意到如果流形和超平面 Σ 横截,则交集具有如下维数

交　集	维　数
$[W^s(\mathscr{M}_0) = W^u(\mathscr{M}_0)] \cap \Sigma$	2
$W^s(\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_\varepsilon) \cap \Sigma$	2
$W^u(q_\varepsilon) \cap \Sigma$	1

这些相交的确是横截的。如果向量空间在这点的切空间的和等于周围空间在这点的切空间,称两个流形在一点上是横截相交的,这里是四维空间。注意到从超平面 Σ 消失的方向正是向量场流的方向,即 $J\nabla H + O(\sqrt{\varepsilon})$。因流形 $W^s(\mathscr{M}_0)$, $W^u(\mathscr{M}_0)$, $W^s(\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_\varepsilon)$和 $W^u(q_\varepsilon)$是由向量场所构成的,这个方向是流形在每点切空间的一个元素,因此,相交是横截的(ε 充分小)。图 3.4.1 表示超平面和流形的相交($\varepsilon = 0$ 和 $0 < \varepsilon \ll 1$)。

3.4.2 $W^s(\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_\varepsilon) \cap W^u(q_\varepsilon)$的 Melnikov 函数

这一节将测量 $W^s(\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_\varepsilon) \cap \Sigma$ 和 $W^u(q_\varepsilon) \cap \Sigma$ 的距离,实际上,我们要找不动点的二维不稳定流形和环 $\mathscr{A}$ 的三维稳定流形之间的距离。首先固定一点 $z_b = (0, 0, I_b, \gamma_b) \in$ 平面 $\mathscr{M}_\varepsilon$,且在环 $\mathscr{A}$ 之内靠近不稳定流形 $W^u(q_\varepsilon)$,之后考虑未扰动的具基点 z_b 的不

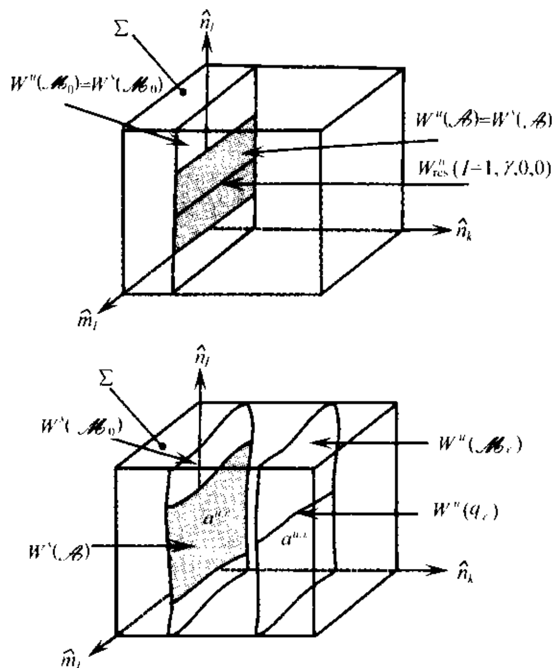


图 3.4.1 超平面和流形的相交($\varepsilon=0$ 和 $1<\varepsilon\ll 1$)

稳定纤维,由式(3.3.18),纤维具有表达式

$$\mathscr{F}^{(u,0)}(z_b) = \{(I^H = I_b;\gamma^H = \gamma_b + \int_{-t^H}^{-\infty}[x^{(H)}(s)]^2\mathrm{d}s;t^H),\forall t^H\}$$

此纤维和圆柱 $\mathscr{C}^\delta$ 相交于点 z_b^δ,按式(3.3.1)作嵌入,具有坐标

$$(I^H = I_b;\gamma^H = \gamma_b + \int_{-t^\delta}^{-\infty}[x^{(H)}(s)]^2\mathrm{d}s;t^\delta)$$

其中 t^δ 满足

$$\delta^2 = 2B(t^\delta) = \frac{8\lambda^2}{(4k^2-I^H)\cosh[2\lambda(t^\delta)]+(3k^2+I^H)}$$

由表达式(3.3.1),使未扰动轨线 $z^{(H)}$ 初值为 z_b^δ

$$z^{(H)}(t)\mid_{t=t^\delta} = z_b^\delta$$

固定 $T>0$,定义 z_0 为未扰动轨线在 $t=T>t_\delta$ 的位置

$$z_0 = z^{(H)}(\Gamma;z_0) \tag{3.4.7}$$

由构造可知 $z_0\in W^u(\mathscr{M}_0)$,依赖于基点 $z_b=(0,0,I_b,\gamma_b)$。在 z_0 上可构造超平面 Σ。

其次,考虑扰动系统的不稳定纤维

$$\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(z_b)$$

在某基点 $z_b=(0,0,I_b,\gamma_b)$ 上,这个扰动纤维相交 $\mathscr{C}^\delta$ 于一点 $z_b^{(\delta,\varepsilon)}$,逼近于 z_b^δ:$z_b^{(\delta,\varepsilon)}=z_b^\delta+O(\varepsilon)$。具有这个新初始点 $z_b^{(\delta,\varepsilon)}$ 的扰动轨线和超平面 Σ 相交于点 $a^{u,\varepsilon}$,有

$$a^{u,\varepsilon} = z_0 + \varepsilon[a_K^{u,\varepsilon}\hat{n}_K + a_I^{u,\varepsilon}\hat{n}_I + b_I^{u,\varepsilon}\hat{m}_I] \tag{3.4.8}$$

且 $a^{u,\varepsilon}\in W^u(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$,式(3.4.8)中的每一项都是基点 $z_b=(0,0,I_b,\gamma_b)$的函数。

令

$$a^{s,\varepsilon} = z_0 + \varepsilon[a_K^{s,\varepsilon}\hat{n}_K + a_I^{s,\varepsilon}\hat{n}_I + b_I^{s,\varepsilon}\hat{m}_I] \tag{3.4.9}$$

表示在 $W^s(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)\cap\Sigma$ 中的一点,选取

$$a_I^{s,\varepsilon} = a_I^{u,\varepsilon},\quad b_I^{s,\varepsilon} = b_I^{u,\varepsilon} \tag{3.4.10}$$

这种选取是可能的,这是由于过 $a^{u,\varepsilon}$ 的线平行于 $\hat{n}_K$ 和 $W^s(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)\cap\Sigma$ 相交(否则,我们扩大 $\mathscr{A}$)。如果点 $a^{u,\varepsilon}$ 和 $a^{s,\varepsilon}$ 相连,则 $W^s(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$和 $W^u(q_\varepsilon)\cap\mathscr{M}_\varepsilon$ 相交。由点 $a^{s,\varepsilon}$ 的选取,有

$$a^{u,\varepsilon} - a^{s,\varepsilon} = \varepsilon[a_K^{u,\varepsilon} - a_K^{s,\varepsilon}]\hat{n}_K$$

记

$$d(a^{u,\varepsilon};a^{s,\varepsilon}) = [(a^{u,\varepsilon} - a^{s,\varepsilon})\cdot\hat{n}_K] \tag{3.4.11}$$

$[(a^{u,\varepsilon}-a^{s,\varepsilon})\cdot\hat{n}_K]$构成 $a^{u,\varepsilon}$ 和 $a^{s,\varepsilon}$ 的符号距离消失,则这两点相近,$W^s(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$和 $W^u(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$相交。

当然,希望得到扰动轨线的该表达式,我们将用 Melnikov 技巧去得到它,而且它的一阶项是能够计算的。对式(3.4.11)作 ε 的 Taylor 展开

$$d(a^{u,\varepsilon};a^{s,\varepsilon}) = \varepsilon\frac{[q^u - q^s]\cdot\nabla K|_{z_0}}{|\nabla K|_{z_0}} + o(\varepsilon^2) \quad (3.4.12)$$

其中

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a^{u,\varepsilon} - z_0}{\varepsilon} \equiv q^u, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a^{s,\varepsilon} - z_0}{\varepsilon} \equiv q^s$$

依赖于时间的 Melnikov 函数定义为

$$\sqrt{2}\Gamma M(t) \equiv \zeta^u(t)\cdot\nabla K(z^{(H)}(t)) - \zeta^s(t)\cdot\nabla K(z^{(H)}(t)) \equiv \Delta^u(t) - \Delta^s(t) \quad (3.4.13)$$

其中 ζ^u 和 ζ^s 为如下变分方程(3.4.14)和(3.4.15)所确定。

式(3.4.13)对 t 微分,由第一变分方程得

$$\dot{\zeta}_l^u = J_{lm}[D_{km}^2 H]\zeta_K^u + g_l|_{z^{(H)}}, \zeta^u(t = T) = q^u \quad (3.4.14)$$

$$\dot{\zeta}_l^s = J_{lm}[D_{km}^2 H]\zeta_K^s + g_l|_{z^{(H)}}, \zeta^s(t = T) = q^s \quad (3.4.15)$$

其中 $z(t) = z^{(H)}(t;T,z_0)$。直接验证,得

$$\dot{\Delta}^u = \boldsymbol{g}\cdot\nabla K|_{z^{(H)}(t)}, \dot{\Delta}^s = \boldsymbol{g}\cdot\nabla K|_{z^{(H)}(t)}$$

由积分得

$$\sqrt{2}\Gamma M(T) = \Delta^u(-t) - \Delta^s(t) + \int_{-t}^{t}[\boldsymbol{g}\cdot\nabla K|_{z^{(H)}(\tau)}]\mathrm{d}\tau \quad (3.4.16)$$

希望当 $t\to\infty$ 时,式(3.4.16)中的 $\Delta^u(-t)$ 和 $\Delta^s(t)$ 消失,这从 $K=0$ 作为 $W^s(\mathcal{M}_0)\cap W^u(\mathcal{M}_0)$ 的方程可得到解释,也容易验证在 $\mathcal{M}_0$ 上 $\nabla K = 0$。因 $z^{(H)}(t)$ 当 $t\to\pm\infty$ 时指数衰减,$\nabla K|_{z^{(H)}(t)}$ 亦然。由此推出 $t\to\infty$ 时,$\Delta^u(-t)$ 和 $\Delta^s(t)\to 0$,因此

$$d(a^{u,\varepsilon};a^{s,\varepsilon}) = \varepsilon\frac{\sqrt{2}\Gamma M}{|\nabla K|_{z_0}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.4.17)$$

其中

$$M = \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}\cdot\nabla K|_{z^{(H)}(s;T,z_0)}\mathrm{d}s \quad (3.4.18)$$

最后我们集中于对 Melnikov 函数 M 的参数化。首先,未扰动同宿轨道依赖于 k 和 $z_b = (0,0,I_b,\gamma_b)$,如下所示:

$$z^{(H)}(t) = z^{(H)}(t,k,z_b)$$

$$I^{(H)}(t) = I_b$$

$$\gamma^{(H)}(t) = \gamma^H + (1 - I_b)t - \int_0^t [x^{(H)}(s - t^\delta)]^2\mathrm{d}s$$

$$B^{(H)}(t) = \frac{4\lambda^2}{(4k^2 - I_b)\cosh[2\lambda(t - t^\delta)] + (3k^2 + I_b)}$$

$$\theta_\pm^{(H)}(t) = \arctan[\frac{\lambda}{k^2}\tanh(\lambda(t - t^\delta))]$$

其中 $\lambda \equiv \lambda(k,I_b) = k\sqrt{2I_b - k^2}$,$\gamma^{(H)}$ 为

$$\gamma^H = \gamma_b + \int_{-t^\delta}^{-\infty}[x^{(H)}(s)]^2\mathrm{d}s$$

另外扰动向量场 $\boldsymbol{g}$ 具有结构

$$\boldsymbol{g} = \Gamma J\nabla H_1 + \alpha\boldsymbol{g}^\alpha + \beta\boldsymbol{g}^\beta$$

Melnikov 函数对 χ_α,χ_β 是线性的

$$M = [M^\Gamma + \chi_\alpha M^\alpha + \chi_\beta M^\beta] \quad (3.4.19)$$

其中

$$\begin{cases} \chi_\alpha = \sqrt{2}\dfrac{\alpha}{\Gamma} \\ \chi_\beta = \sqrt{2}\dfrac{\beta}{\Gamma} \\ M^\Gamma = M^\Gamma[I_b,\gamma_b;k] \\ M^\alpha = M^\alpha[I_b;k] \\ M^\beta = M^\beta[I_b;k] \end{cases} \quad (3.4.20)$$

由此可知,距离 d 对参数的依赖为

$$d(a^{u,\varepsilon};a^{s,\varepsilon}) = \varepsilon\sqrt{2}\Gamma\frac{M(I_b,\gamma_b;\chi_\alpha,\chi_\beta,k)}{|\nabla K|_{z_0}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.4.21)$$

由标准的隐函数定理，如果 M 具有简单零点，则 $W^s(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$ 和 $W^u(q_\varepsilon)$ 横截相交。

式(3.4.21)实际上是测量三维 $W^s(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$ 和 $W^u(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$ 的距离，利用这个距离估计可证明 q_ε 同宿轨道的存在性。首先注意到 $W^u(q_\varepsilon)\subset W^u(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$，基点 $z_b=(0,0,I_b,\gamma_b)$ 能选取为靠近不稳定流形 $W^u(q_\varepsilon)$，特别选取 $I_b = I_u^\eta(\gamma_b)\equiv I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta})$，则 z_b 位于流形 $W^u(q_\varepsilon)$ 上，其中

$$I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}) = 1 + \eta J_u(\gamma_b^{T,\eta}) + O(\eta^2), \eta = \sqrt{2}\Gamma\varepsilon^{1/2} \quad (3.4.22)$$

此时 Melnikov 函数

$$M = [M^\Gamma + \chi_\alpha M^\alpha + \chi_\beta M^\beta] \quad (3.4.23)$$

其中

$$\begin{cases} M^\Gamma = M^\Gamma[I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma^{T,\eta};k] \\ M^\alpha = M^\alpha[I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta});k] \\ M^\beta = M^\beta[I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta});k] \end{cases} \quad (3.4.24)$$

距离式(3.4.21)为

$$d(a^{u,\varepsilon};a^{s,\varepsilon}) = \varepsilon\sqrt{2}\Gamma\frac{M(I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,\chi_b,k)}{|\nabla K|_{z_0}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.4.25)$$

变为 $W^u(q_\varepsilon)$ 和 $W^s_{\rm loc}(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$ 的距离。

3.4.3 $I=1$ 时 Melnikov 函数的显式表达式

可在未扰动同宿轨道上计算 Melnikov 函数的积分，利用 $K(x,y,I)=H(x,y,I)-H(0,0,I)$ 可得

$$g\cdot\nabla K = \frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y}-\beta x\right) + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\frac{\partial H_1}{\partial x}-\beta y\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial I}(x,y,I) - \frac{\partial H_1}{\partial I}(0,0,I)\right)\left(\frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - 2\alpha I - (\beta-\alpha)(x^2+y^2)\right) \quad (3.4.26)$$

其中 H 由式(3.4.2)所定义，H_1 为式(3.4.3)所定义，在未扰动同宿轨道上，$\dot I=0$。因此，在未扰动同宿轨道上有

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H_1}{\partial x} = -\frac{dH_1}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial \gamma}\frac{\partial H}{\partial I}$$

将此表达式代入式(3.4.26)得

$$g\cdot\nabla K = -\frac{dH_1}{dt}(x,y,I,\gamma) - \frac{\partial H_1}{\partial\gamma}(x,y,I,\gamma)\cdot\frac{\partial H}{\partial I}(x,y,I) - \beta(y\dot x - x\dot y) + \frac{\partial H_1}{\partial\gamma}(x,y,I,\gamma)\left(\frac{\partial H}{\partial I}(x,y,I) - \frac{\partial H}{\partial I}(0,0,I=1)\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial I}(x,y,I) - \frac{\partial H}{\partial I}(0,0,I=1)\right)(2\alpha I + (\beta-\alpha)(x^2+y^2)) \quad (3.4.27)$$

在 $I=1$ 上利用$\frac{\partial H}{\partial I}(0,0,I=1)=0$，式(3.4.27)可简化为

$$-\frac{dH_1}{dt} + \beta(x\dot y - y\dot x) + 2\alpha\dot\gamma + (\beta-\alpha)(x^2+y^2)\dot\gamma \quad (3.4.28)$$

其中 $\dot\gamma = -\frac{\partial H}{\partial I}$。现对式(3.4.28)沿未扰动同宿轨道在 $I=1$ 上积分，并分别考察式(3.4.28)的各项。

直接积分式(3.4.28)的第一项得

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dH_1}{dt}dt = \sqrt{2}[\sin\gamma(+\infty) - \sin\gamma(-\infty)] \quad (3.4.29)$$

容易看出式(3.4.28)的第三项可直接积分为

$$2\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{\gamma}\,\mathrm{d}t = 2\alpha\Delta\gamma \tag{3.4.30}$$

现考察式(3.4.28)的第二项和第四项,微分得

$$x\dot{y} - y\dot{x} = 2\beta\dot{\theta} \tag{3.4.31}$$

取式(3.1.21)的模为

$$x^2 + y^2 = 2B \tag{3.4.32}$$

从这两个关系和式(3.1.26)得

$$\dot{\theta} = \dot{\psi} - \dot{\gamma} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \tag{3.4.33}$$

或

$$\dot{\gamma} = \dot{\psi} - \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \tag{3.4.34}$$

将式(3.4.34)代入式(3.4.28)的第四项连同式(3.4.28)的第二项得

$$\beta(x\dot{y} - y\dot{x}) + (\beta - \alpha)(x^2 + y^2)\dot{\gamma} =$$
$$\alpha(x\dot{y} - y\dot{x}) + (\beta - \alpha)(x^2 + y^2)\dot{\psi} \tag{3.4.35}$$

再沿同宿轨道积分式(3.4.35)的二项,利用式(3.4.31)、式(3.4.35)的第一个积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t = 2\int_{-\infty}^{+\infty}B\dot{\theta}\,\mathrm{d}t \tag{3.4.36}$$

利用式(3.1.24),在 $I = 1$ 上有

$$B = 1 - (4k^2 - 1)\frac{1}{3 + 4\cos\theta}$$

代入式(3.4.36)得

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t = 2\Delta_\theta - 2(4k^2 - 1)\int_{\theta(-\infty)}^{\theta(+\infty)}\frac{\mathrm{d}\theta}{3 + 4\cos\theta} \tag{3.4.37}$$

其中

$$\Delta_\theta \equiv \theta(+\infty) - \theta(-\infty)$$

这里 $\theta(+\infty)$,$\theta(-\infty)$分别由式(3.1.36),式(3.1.35)给出。积分式(3.4.37)最后一项得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t = 2\Delta_\theta - 2(4k^2 - 1)\Delta\psi \tag{3.4.38}$$

其中 $\Delta\psi \equiv \psi(+\infty) - \psi(-\infty)$

从式(3.1.33),式(3.1.34),有

$$\Delta\psi = -\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{2 - k^2}{7k^2}},\quad \frac{1}{2} < k < \sqrt{2} \tag{3.4.39}$$

最后,利用式(3.4.32)积分式(3.4.35)最后一项,得

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x^2 + y^2)\dot{\psi}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}B^2\,\mathrm{d}t \tag{3.4.40}$$

由式(3.1.29) B 的表达式得

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}B^2\,\mathrm{d}t = \frac{8}{7}\left[k\sqrt{2 - k^2} + (1 + 3k^2)\Delta\psi\right] \tag{3.4.41}$$

其中 $\Delta\psi$ 由式(3.4.39)给定。由式(3.4.29),式(3.4.30),式(3.4.35),式(3.4.38),式(3.4.40)和式(3.4.41),Melnikov 函数在 $I = 1$上为

$$M(1, \gamma(-\infty), \chi_\alpha, \chi_\beta, k) =$$
$$\sqrt{2}\{[\sin\gamma(+\infty) - \sin\gamma(-\infty)] + 4\chi_\alpha k^2\Delta\psi + (\chi_\beta - \chi_\alpha)\cdot$$
$$\frac{4}{7}[k\sqrt{2 - k^2} + (1 + 3k^2)\Delta\psi]\} \tag{3.4.42}$$

其中

$$\gamma(+\infty) = \gamma(-\infty) + \Delta_\gamma$$

$$\begin{cases}\chi_\alpha = \sqrt{2}\,\dfrac{\alpha}{\Gamma}\\[2ex] \chi_\beta = \sqrt{2}\,\dfrac{\beta}{\Gamma}\end{cases} \tag{3.4.43}$$

从上面一节讨论有

$$\gamma(-\infty) \equiv \gamma_0^{T,0} \tag{3.4.44}$$

$$\gamma(+\infty) \equiv \gamma_b^{L,0} \tag{3.4.45}$$

在 $\eta=0$ 上($I=1$)我们也有式(3.4.24)的等式

$$\begin{cases} M^{\Gamma} = \sin\gamma_b^{L,0} - \sin\gamma_b^{T,0} \\ M^{\alpha} = 4k^2\Delta\psi - \dfrac{4}{7}[k\sqrt{2-k^2} + (1+3k^2)\Delta\psi] \\ M^{\beta} = \dfrac{4}{7}[k\sqrt{2-k^2} + (1+3k^2)\Delta\psi] \end{cases} \tag{3.4.46}$$

3.4.4 q_ε 同宿轨道的存在性

前面我们已经得到 $W^s(\mathscr{A})$和 $W^u(q_\varepsilon)$的距离 $d(a^{u,\varepsilon},a^{s,\varepsilon})$,现改写如下:

$$\begin{aligned} & d(\Gamma_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,\chi_\beta,k,\eta) = \\ & \eta^2\frac{M(1,\gamma_b^{T,0};\chi_\alpha,\chi_\beta,k)}{|\nabla K||_{z_0}} + \\ & \eta^3\frac{\partial}{\partial J}\left[\frac{M(\Gamma_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,\chi_\beta,k)}{|\nabla K|_{z_0}}\right]_{\eta=0} J_u + \\ & \eta^3\frac{\partial}{\partial \gamma}\left[\frac{M(\Gamma_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,\chi_\beta,k)}{|\nabla K|_{z_0}}\right]_{\eta=0} + O(\eta^4) \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

其中

$$\begin{aligned} M(1,\gamma_b^{T,0};\chi_\alpha,\chi_\beta,k) = & \sqrt{2}\Gamma\{\sin\gamma_b^{L,0} - \sin\gamma_b^{T,0} + \\ & 4\chi_\alpha k^2\Delta\psi + (\chi_\beta-\chi_\alpha)\frac{4}{7}(k\sqrt{2-k^2} + \\ & (1+3k^2)\Delta\psi)\} \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

$$\gamma_b^{L,0} \equiv \gamma_b^{T,0} + \Delta_\gamma \tag{3.4.49}$$

这一节我们集中考虑 $t\to\infty$ 时轨线的性态。我们要证明在某些条件下这个轨线渐近于 $\mathscr{A}\cap W^s(q_\varepsilon)$中的轨线,而当式(3.4.47)中 $d\to 0$,则在 $W^s(\mathscr{A})\cap W^u(q_\varepsilon)$的轨线当 $t\to-\infty$ 时趋于通过点 $(\gamma_b^{T,\eta},\Gamma_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}))$在 $\mathscr{A}\cap W^u(q_\varepsilon)$中的轨线,换言之,$q_\varepsilon$ 具有一个同宿轨道。我们先讨论 $W^s(\mathscr{A})$中的基点及在 $\mathscr{A}$ 中轨线的性质。

前面已知道共振带的动力系统可由 Hamilton 向量场来描述,其中 Hamilton 函数为

$$\mathscr{H} = \frac{J^2}{2} - \sin\gamma - \chi_\alpha\gamma \tag{3.4.50}$$

在距离函数式(3.4.47)的零点上,让相点依时间沿着扰动轨线流到 $\mathscr{E}^\delta$,这点可位于稳定纤维上,$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(z_b^\varepsilon)\subset W_{loc}^s(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$,令 $(\tilde{J}_b^L,\tilde{\gamma}_b^L)$表示这个纤维的基点,构造使$(\Gamma_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta})$位于 $W^u(q_\varepsilon)$上,则如下等式

$$\Delta\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}(\tilde{J}_b^L,\tilde{\gamma}_b^L,\chi_\alpha) - \mathscr{H}(J_u(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta},\chi_\alpha) \tag{3.4.51}$$

可用来决定$(\tilde{J}_b^L,\tilde{\gamma}^L)$位于同宿轨道的内部还是外部。这是因为当从 p_ε 向外运动时,式(3.4.50)水平集的值是单调增加的,$\Delta\mathscr{H}>0$,且对 η 的误差为 $O(1)$,推出$(\tilde{J}_b^L,\tilde{\gamma}_b^L)$位于同宿轨道的内部,如图 3.4.2 所示。

由直接计算可得

引理 3.4.1

$$(\tilde{J}_b^L,\tilde{\gamma}_b^L) = (J_u(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma^{L,\eta}) + O(\eta)$$

证:扰动轨线进入 $\mathscr{E}^\delta$,以 $O(\sqrt{\varepsilon})$逼近未扰动轨线,连接点在不动点圆 $I=1$。再从稳定纤维的 Fenichel 扰动理论即得。

由此引理和式(3.4.50),$T_b^{T,\eta}$ 和 $\gamma_b^{L,\eta}$ 在 $\eta=0$ 上,依 η 作 Taylor 展开,式(3.4.51)为

$$\Delta\mathscr{H} = -\chi_\alpha\Delta_\gamma - \sin\gamma_b^{L,0} + \sin\gamma_b^{L,0} + O(\eta) \tag{3.4.52}$$

这个 $\Delta\mathscr{H}$ 的表达式有重要的用处。Melnikov 函数一个简单的零点

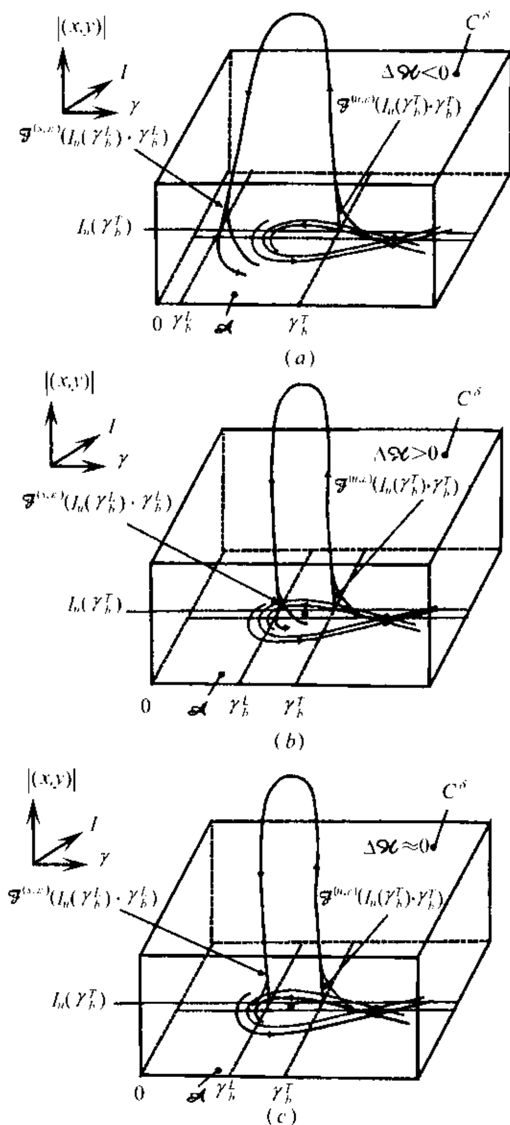


图 3.4.2 $(\bar{J}_b^L, \bar{\gamma}_b^L)$的相图

对应于 $W^s(\mathscr{A}) \cap W^u(q_\varepsilon)$中的一条轨线，$\Delta\mathscr{H}$在这个简单零点上将给出有关这条轨线当 $t \to \infty$ 时的信息。我们关心，当同宿轨道渐近于 p_ε 吸引区域的内部或外部的轨道时，我们要给出充分条件使得$(\bar{J}_b^L, \bar{\gamma}_b^L)$以 $O(1)$距离 p_ε 吸引盆的边界。由上面可知，对于 Melnikov 函数的一个零点有$\Delta\mathscr{H} > 0$且 $O(1)$对应于在 $W^s(\mathscr{A}) \cap W^u(q_\varepsilon)$里的轨线渐近于$\mathscr{A}$的轨线，则该零点不在 p_ε 的吸引域中，而若有 $\Delta\mathscr{H} < 0$。且 $O(1)$对应于在 $W^s(\mathscr{A}) \cap W^u(q_\varepsilon)$的轨线渐近于$\mathscr{A}$的轨线，则该零点在 p_ε 的吸引域中。因此所有流形，包括 Melnikov 函数，均可微地依赖于参数，因而必存在 $\Delta\mathscr{H}$的某个中间值使得轨线对应于 Melnikov 函数的零点渐近于 $W^s(q_\varepsilon) \cap \mathscr{A}$的一条轨线，即为 p_ε 吸引域的边界，因此存在 p_ε 的一条同宿轨道如图 3.4.3 所示。

现考察一下 Melnikov 函数零点 $\Delta\mathscr{H}$取值的可能性，它们不随参数而改变。在 Melnikov 函数的零点上，方程(3.4.48)能写成

$$\sin\gamma_b^{T,0} - \sin\gamma_b^{L,0} = \tilde{A}(k)\chi_\alpha + B(k)\chi_\beta \tag{3.4.53}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{A}(k) \equiv \dfrac{4}{7}((4k^2 - 1)\Delta\psi - k\sqrt{2 - k^2}) \\ B(k) \equiv \dfrac{4}{7}((3k^2 + 1)\Delta\psi + k\sqrt{2 - k^2}) \end{cases} \tag{3.4.54}$$

且 $\Delta\psi = \Delta\psi(1, k)$。利用表达式(3.4.53)消去 $\sin\gamma_b^{T,0} - \sin\gamma_b^{L,0}$，从式(3.4.52)可得在 Melnikov 函数的零点上，

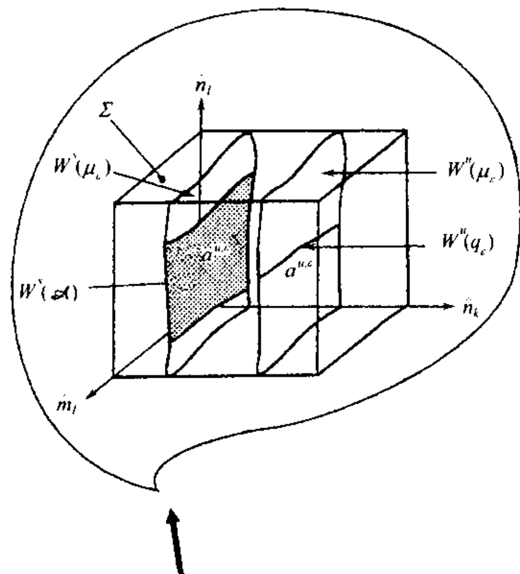
$$\Delta\mathscr{H} = (\tilde{A}(k) - \Delta\gamma)\chi_\alpha + B(k)\chi_\beta \tag{3.4.55}$$

其中 $\Delta\gamma = \Delta\gamma(1, k)$。因此，在 Melnikov 函数的零点上，$\Delta\mathscr{H}$线性依赖于 χ_α 和 χ_β，其系数仅依赖于 k。为了证明零点是简单的，我们仅对 $k = 1$ 证明，此时 Melnikov 函数是 χ_α, χ_β 的线性函数，利用式(3.4.47)和式(3.4.23)，得

$$\frac{\partial M}{\partial \chi_\alpha}\bigg|_{k=1} = M^{\mathrm{T}}\big|_{k=1} = -1.087 \tag{3.4.56}$$

$$\Delta\mathscr{H} = 0.785\chi_\alpha - 0.117\chi_\beta \tag{3.4.57}$$

我们看到在 $k=1$ 上，对于一切 χ_α,χ_β 值，$\partial M/\partial\chi_\alpha$ 是常数。进一步对于给定 $\chi_\alpha,\chi_\beta,\Delta\mathscr{H}$ 由式(3.4.57)确定，定义了 Melnikov 函数的一个简单零点。



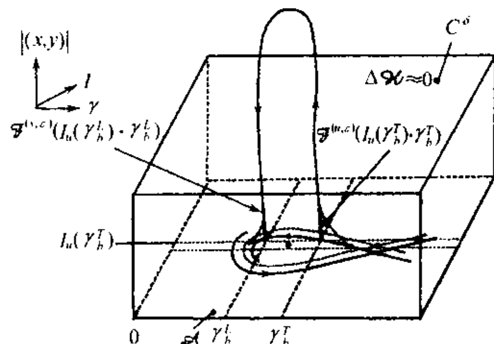


图 3.4.3　$W^s(\mathscr{A})\cap W^u(q_\varepsilon)$轨线示意图

我们可以综述一下：当两个距离消失时，q_ε 的同宿轨道当 $\varepsilon\to 0$时保持不变。这两个距离是 d(从 $W^u(q_\varepsilon)$到 $W^u_{loc}(\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\varepsilon)$的距离)和 $\Delta\mathscr{H}$(从"着陆点"到 $W^s(q_\varepsilon)$的距离)，这两个距离具有如下参数依赖

$$d(I_b^{T,\eta},\gamma_b^{T,\eta},\chi_\alpha,\chi_\beta,k,\eta) = \frac{\eta^2}{|\nabla K||_{z_0}}|M+\eta^2 M| \tag{3.4.58}$$

$$\begin{cases}\Delta\mathscr{H} = G(J_b^T,\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,k)+\eta\tilde{G}(J_b^T,\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,\chi_\beta,k,\eta)\\ I_b^{T,\eta} = 1+\eta I_b^T+O(\eta^2)\\ J_b^T = J_u(\gamma_b^{T,\eta})\end{cases} \tag{3.4.59}$$

其中 $J_u(\gamma_b^{T,\eta})$由式(3.2.13)给定。Melnikov 函数具有形式

$$M = [M^\Gamma+\chi_\alpha M^\alpha+\chi_\beta M^\beta] \tag{3.4.60}$$

其中

$$\begin{cases}M^\Gamma = M^\Gamma[I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta},k]\\ M^\alpha = M^\alpha[I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta});k]\\ M^\beta = M^\beta[I_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta});k]\end{cases} \tag{3.4.61}$$

引入函数 F 和 G

$$F \equiv M+\Delta\mathscr{H},\ G\equiv\Delta\mathscr{H}$$

F,G 对 η 展开，得

$$F = [A(k)\chi_\alpha+B(k)\chi_\beta]+\eta\tilde{F}$$

$$G = [\sin\gamma_b^{T,0}-\sin(\gamma_b^{T,0}+\Delta\gamma)-x_\alpha\Delta\gamma]+\eta\tilde{G}$$

这里 $\tilde{F},\tilde{G}$ 为$(\gamma_b^{T,0},\chi_\alpha,\chi_\beta,k)$的函数，

$$A(k) \equiv \bar{A}(k)-\Delta\gamma$$

其中 $\tilde{A}(k)$和 $B(k)$已由方程(3.4.54)给定,且

$$\Delta\gamma \equiv \Delta\gamma(1,k), \Delta\psi \equiv \Delta\psi(1,k)$$

$\tilde{F}$ 和 $\tilde{G}$ 还依赖于 $\Delta\mathscr{H}$,因此难于显式计算。

现寻求两个函数的共同零点,对于固定的 k 和 χ_α,寻求 χ_β 和 $\gamma_b^{T,0}$ 作为 η 的幂级数:

$$\begin{cases} \chi_\beta = \chi_\beta^0 + \eta\chi_\beta^1 + \cdots \\ \gamma_b^{T,\eta} = \gamma^{T,0} + \eta\gamma_b^{T,1} + \cdots \end{cases} \tag{3.4.62}$$

将上式代入 F, G,并展开到 $O(\eta^0)$:

$$A(k)\chi_\alpha + B(k)\chi_\beta^0 = 0 \tag{3.4.63}$$

$$\sin\gamma_b^{T,0} - \sin(\gamma_b^{T,0} + \Delta\gamma) - \chi_\alpha\Delta\gamma = 0 \tag{3.4.64}$$

而 $O(\eta^1)$阶有

$$B(k)\chi_\beta^1 = -\tilde{F}(\gamma_b^{T,0}, \chi_\alpha, \chi_\beta^0, k)$$

$$(\cos\gamma_b^{T,0} - \cos(\gamma_b^{T,0} + \Delta\gamma))\gamma_b^{T,1} = -\tilde{G}(\gamma_b^{T,0}, \chi_\alpha, \chi_\beta^0, k)$$

对于固定的 k 和 χ_α, q_ε 的同宿轨道当 $\varepsilon\to 0$ 时保持不变;如果选取 χ_β

$$\chi_\beta = E(k)\chi_\alpha + \eta\chi_\beta^1(k, \chi_\alpha) + \cdots \tag{3.4.65}$$

其中

$$E(k) \equiv -\frac{A(k)}{B(k)} \tag{3.4.66}$$

进一步,这条不变轨线的"起飞"(take off)角为

$$\gamma_b^{T,\eta} = \gamma_b^{T,0}(\chi_\alpha, k) + \eta\gamma_b^{T,1}(\chi_\alpha, k) + \cdots \tag{3.4.67}$$

对于固定的 k 和 χ_α,式(3.4.65)表示 Γ_H 值作为 χ_β 的函数是一条具顶点

$$\chi_\beta^0 = E(k)\chi_\alpha$$

的抛物线,它的曲率依赖于高阶项 $\tilde{F}$ 和 $\tilde{G}$,可由数值计算确定。

综述以上可得以下定理。

定理 3.4.2 存在开区间 g_K 以及 g_A 和小正数 η_0,使得 $\forall k \in g_K, \forall \chi_\alpha \in g_A, \forall \eta \in (0, \eta_0)$, χ_β 具形式

$$\chi_\beta = \chi_\beta(k, \chi_\alpha, \eta) = E(k)\chi_\alpha + O(\eta) \tag{3.4.68}$$

其中 $E(k)$为式(3.4.66)所给定,则存在不动点 q_ε 的一对称同宿轨道。进一步,这些轨道的每一个相交圆柱 $\mathscr{C}^\delta$ 位于不稳定纤维 $\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(z_b)$上的某个位置,其中"基本起飞"(base take-off)点 z_b 为

$$\begin{cases} I_b^{I,\eta} = 1 + O(\eta) \\ \gamma^{T,\eta} = \gamma_b^{T,0}(\chi_\alpha, k) + O(\eta) \end{cases} \tag{3.4.69}$$

这里"起飞"角 $\gamma_b^{T,0}(\chi_\alpha, k)$由式(3.4.67)给定,它描写同宿轨道对于参数 χ_α 和 k 的基本定性依赖关系。

3.5 q_ε 同宿轨道的数值计算

这一节我们用数值给出 q_ε 同宿轨道的构造。

3.5.1 周期解的数值计算

考虑常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{\varphi}(x), \quad x, \tilde{\varphi} \in R^N \tag{3.5.1}$$

设 $x(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant T$ 为具周期 T 的孤立的周期解,首先作变换 $\tau = tT$,使得周期为 1,且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = T\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x, T), x, \varphi \in R^N, T \in R \tag{3.5.2}$$

其中 $\chi(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$ 为具周期 1 的周期解,为了计算周期解,我们采用"多重靶"方法。

设式(3.5.2)的半群为 $G(t, t_0)$,式(3.5.2)的具初值 $x(t_0) = x_0$ 的解为 $x(t, t_0)$,则 $x(t, t_0) = G(t, t_0)x_0$。

考虑[0,1]的节点, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_M = 1, M \geqslant 1$,则求解如下方程等价于求解周期解 $x(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$

$$x_{k+1} = G(t_{k+1}, t_k)x_k, k = 0,1,\cdots,M-1;$$

$$x_M = x_0 \tag{3.5.3}$$

其中 $x_k = x(t_k)$。

3.5.2 同宿流形的计算

我们讨论如何计算鞍点型同宿轨道,设有 ODE

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi(x,\lambda), x,\varphi \in R^N, \lambda \in R \tag{3.5.4}$$

其中 λ 为自由参数,设 x_0 为式(3.5.4)在 $\lambda = \lambda_0$ 的不动点,$\nabla\varphi(x_0,\lambda)$非奇异,对 $\lambda > \lambda_0$ 具有一条周期轨道,但 $\lambda < \lambda_0$ 没有。设另外的标准横截条件满足,则存在一条同宿轨道,同宿于不动点 $x = x_0, \lambda = \lambda_0$。此时称之为具鞍点型的同宿轨道。可用延拓方法近似这条同宿轨道,从 Hopf 分叉点出发去尾随这条分叉,在此延拓法中,T 为自由参数。当 $T \gg T_*$,我们已作出同宿轨道的近似。通常当周期 $T \gg 1$ 时,计算变为病态,周期轨道变为极端不稳定,为了保持高精确度,我们可采用"多重靶"方法。

以下是同宿轨道计算的某些实例和结果。

图 3.5.1 中 q_ε 的同宿轨道作为 t 的函数,$\varepsilon\alpha = 0.001, \beta = 2\alpha$, $k = 1.02$,五条曲线为 I, arg(b), $|b|$, arg(c), $|c|$。

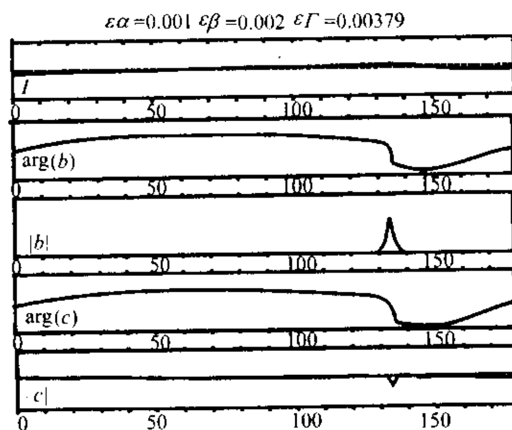


图 3.5.1 q_ε 对时间 t 的同宿轨道($\alpha = 0.001, \beta = 2\alpha, k = 1.02$)

图 3.5.2 为未扰动可积系统的同宿轨道,$I = 1.1$。

图 3.5.3 为 q_ε 的同宿轨道在 $b = 0$ 和 $c = 0$ 平面上的投影。

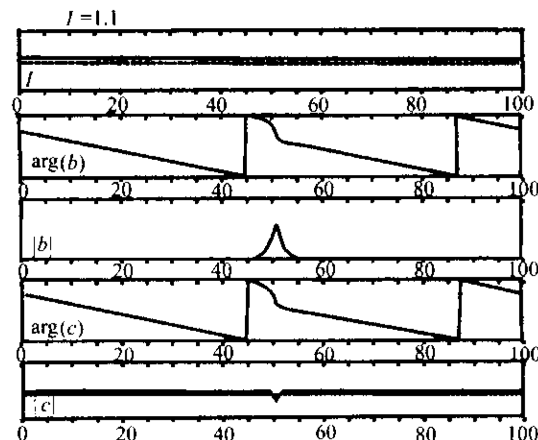


图 3.5.2 未扰动可积系统的一条同宿轨道(在 $I = 1.1$ 时)

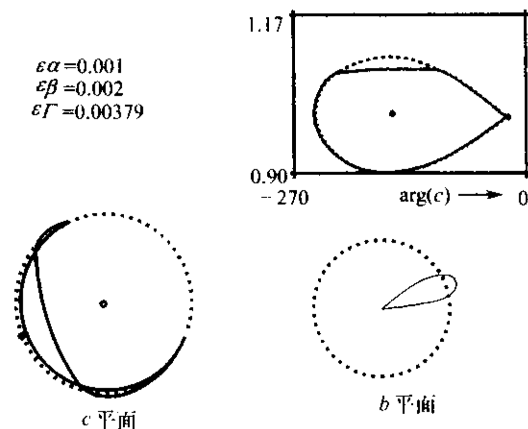


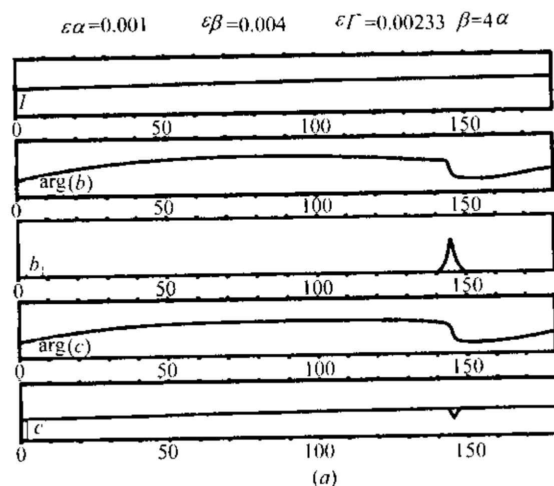
图 3.5.3 在 $b = 0$ 和 $c = 0$ 平面上 q_ε 的同宿轨道

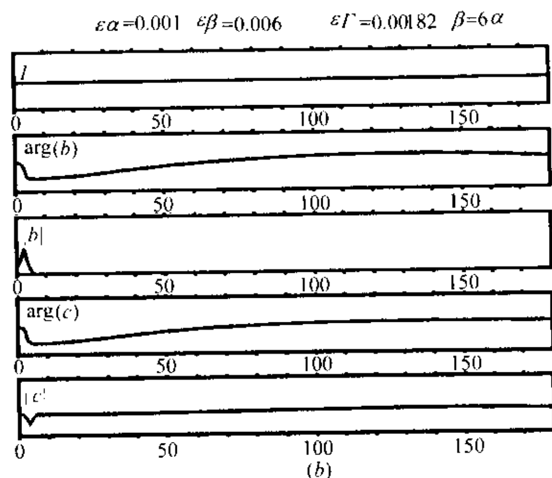
($\alpha = 0.001; \beta = 2\alpha; k = 1.02$)

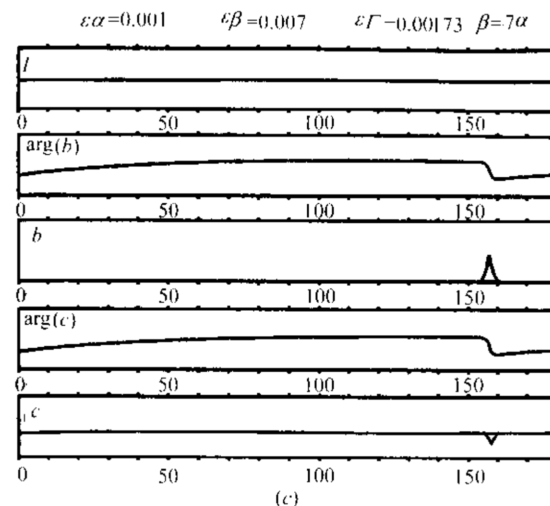
图 3.5.4(a)为 q_ε 同宿轨道 $\varepsilon\alpha = 0.001, k = 1.02, \beta = 4\alpha$。

图 3.5.4(b)为 q_ε 同宿轨道 $\varepsilon\alpha = 0.001$, $\varepsilon\beta = 0.004$, $\varepsilon T = 0.00173$。

图 3.5.4(c)为 q_ε 同宿轨道 $\varepsilon\alpha = 0.001$, $\varepsilon\beta = 0.007$, $\varepsilon T = 0.00173$。







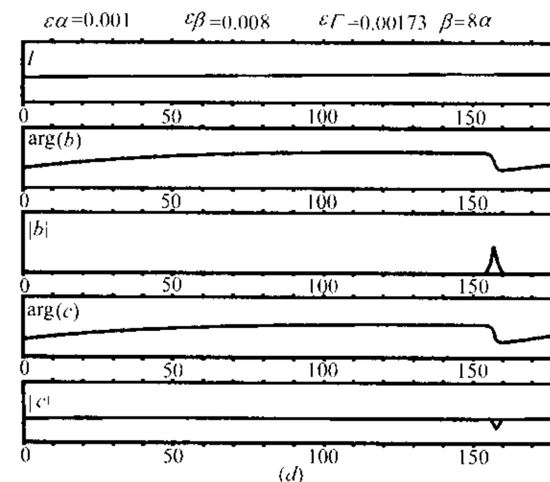


图 3.5.4　q_ε 对时间 t 的同宿轨道($\alpha = 0.001; k = 1.02$)

图 3.5.4(d)为 q_ε 同宿轨道 $\varepsilon\alpha = 0.001, k = 1.02, \beta = 7\alpha$。

图 3.5.5 为 q_ε 同宿轨道在 $b = 0, c = 0$ 平面上的投影，$\varepsilon\alpha = 0.001, k = 1.02$。

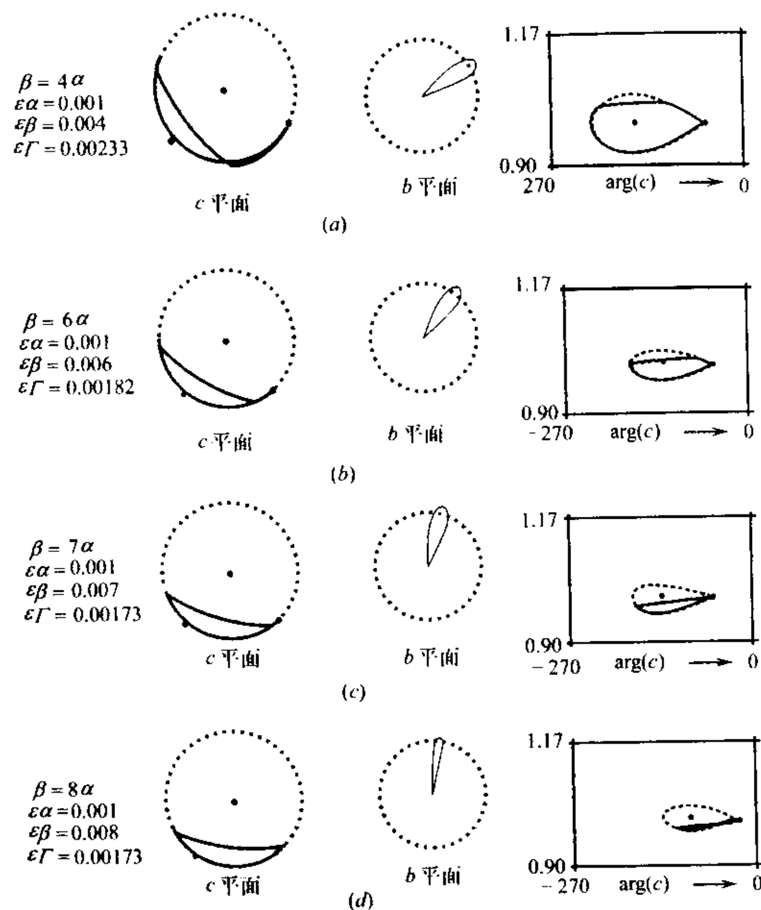


图 3.5.5 在 $b=0$ 和 $c=0$ 平面上 q_ε 的同宿轨道

($\alpha=0.001; k=1.02$),(a) $\beta=4\alpha$; (b) $\beta=6\alpha$; (c) $\beta=7\alpha$; (d) $\beta=8\alpha$。

图 3.5.6 为 q_ε 同宿轨道在 $b=0$ 和 $c=0$ 平面上的投影，$\beta=5\alpha$，$k=1.02$。

图 3.5.7 为 $\Gamma_H(\chi_\beta)$。

图 3.5.8 为 q_ε 的同宿轨道。

图 3.5.9 为 q_ε 的同宿轨道在 $b=0$ 和 $c=0$ 平面上的投影。

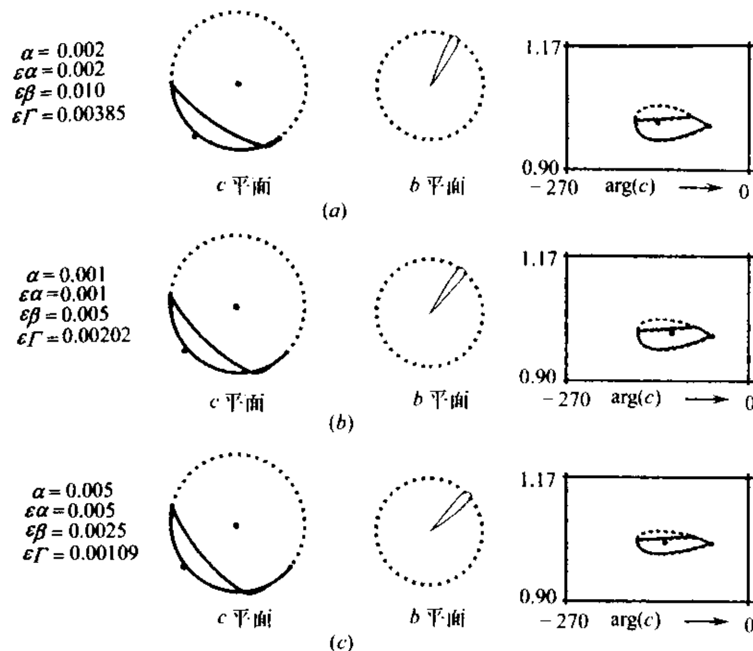


图 3.5.6 在 $b=0$ 和 $c=0$ 平面上 q_ε 的同宿轨道($\beta=5\alpha; k=1.02$)

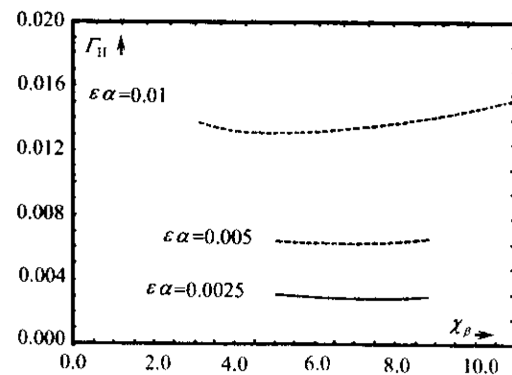
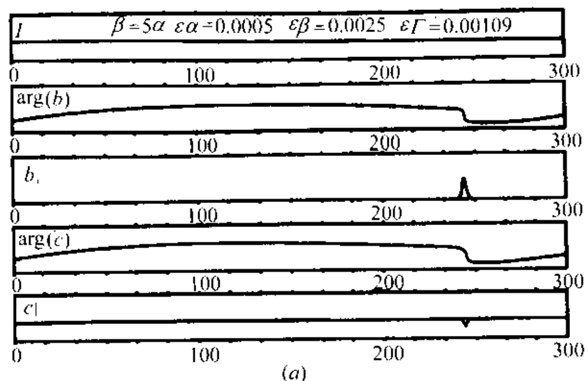
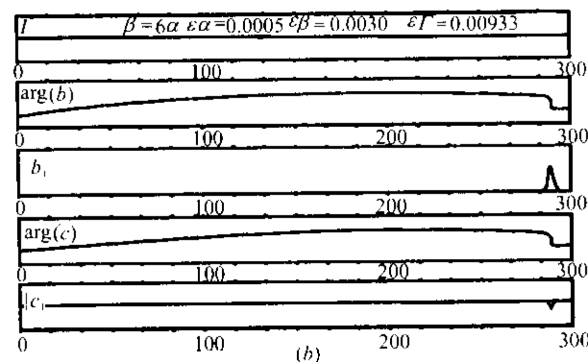


图 3.5.7 Γ_H 和 χ_β 的图





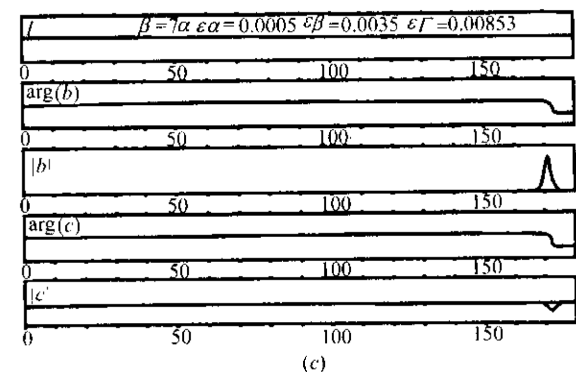


图 3.5.8　q_ε 关于 t 的同宿轨道($\alpha=0.005$; $k=1.02$)

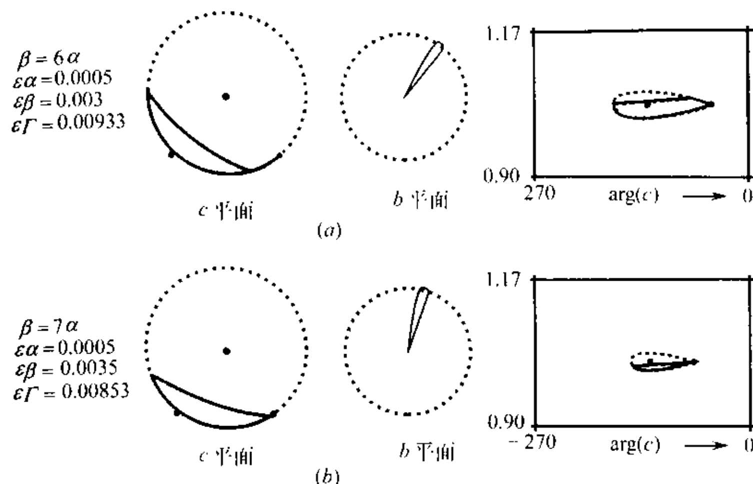


图 3.5.9　在 $b=0$ 和 $c=0$ 平面上 q_ε 的同宿轨道

($\alpha=0.0005$; $k=1.02$)

3.6　q_ε 的同宿轨道的动力学推论：混沌的存在性及其性质

这一节将讨论如何在 q_ε 的一对同宿轨道附近产生 Bernoulli 集，从而产生混沌。证明的技巧是在同宿轨道附近构造 Poincare 映照。这个映照是由两个映照组成的：一个是描述通过双曲不动点附近轨道的运动，另一个映照是描写在双曲不动点邻域外同宿轨道的运动。我们将证明这个映照具有 Cantor 不变集，且拓扑共轭偏移两个符号。为此，我们看到了同宿轨道的破裂及 smile 马蹄的构造。

设向量场依 q_ε 的局部坐标可写为

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -\lambda_1 s_1 + P(s_1, s_2, u_1, u_2; p) \\ \dot{s}_2 = -\lambda_2 s_2 + Q(s_1, s_2, u_1, u_2; p) \\ \dot{u}_1 = \mathcal{M}_1 u_1 + R(s_1, s_2, u_1, u_2; p) \\ \dot{u}_2 = \mathcal{M}_2 u_2 + S(s_1, s_2, u_1, u_2; p) \end{cases} \tag{3.6.1}$$

其中 P,Q,R,S 为 s_1,s_2,u_1,u_2 的非线性函数，且在$(s_1,s_2,u_1,u_2)=(0,0,0,0)$处为 0，$p$ 为参数。

假设 1(靠近原点的形态)：向量场(3.6.1)在原点线性化特征值具有如下排列

$$-\lambda_2 < -\lambda_1 < 0 < \mathscr{M}_1 < \lambda_1 < \mathscr{M}_2$$

由此可知，在原点具有二维稳定流形和二维不稳定流形，分别记为 $W^s(0)$和 $W^u(0)$。

假设 2(同宿轨道的存在性及对称性)：向量场式(3.6.1)在坐标变换$(s_1,s_2,u_1,u_2)\to(s_1,-s_2,u_1,-u_2)$下不变，在 $p=0$ 上式(3.6.1)具有相近于原点自己的同宿轨道，进一步设存在一对连接原点的对称的同宿轨道，用 Γ^+ 和 Γ^- 表示，且设同宿轨道进入和离开原点的邻域沿着“弱的”扩张和收缩方向，如图 3.6.1 所示。

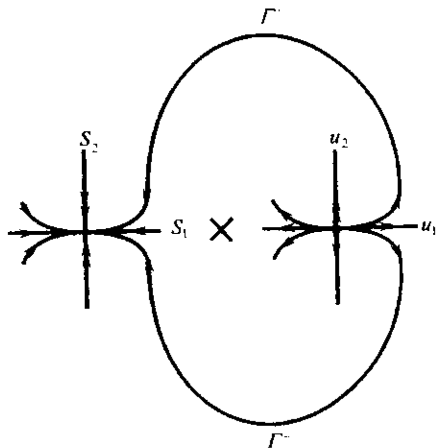


图 3.6.1　向量场式(3.6.1)的同宿轨道

假设 3(稳定与不稳定流形的不相连)：$W^s(0)$和 $W^u(0)$沿着 $\Gamma^+\cap\Gamma^-$不相连接，更详细地说，对 $\forall p\in\Gamma^+\cap\Gamma^-$，设

$$\operatorname{Codim}(\Gamma_pW^s(0)+\Gamma_pW^u(0))=1$$

其中 $\Gamma_pW^s(0)$和 $\Gamma_pW^u(0)$表示相应流形在 p 点的切空间。

假设 4(对 $p\neq0$，同宿轨道的破裂)：设对 $p\neq0$，同宿轨道破裂，如图 3.6.2 所示。

假设 5(非共振特征值：在原点线性化)：令

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=(-\lambda_1,-\lambda_2,-\mu_1,-\mu_2)$$

设如下非线性共振条件对于特征值成立

$$a_j\neq\sum_{k=1}^{4}l_ka_k,\qquad \forall j=1,2,3,4 \tag{3.6.2}$$

和一切非负整数 l_1,l_2,l_3,l_4 成立，且

$$2\leqslant\sum_{k=1}^{4}l_k<\infty \tag{3.6.3}$$

则从 Hartman 定理[139]可知存在 C^2 同构，它在原点附近线性化，在邻域外是恒等的。

在构造 Poincaré 映照之前，我们作某些有关 q_ε 同宿轨道之间的关系的附注：

(1) 对应于特征值 μ_2 和 $-\lambda_2$ 的方向沿着 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 以$O(1)$增长率增长。

(2) 在假设 2 中的对称性对于 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 不变流形的不变性是正确的。

(3) $W^s(0)$和 $W^u(0)$的不连接性可用两种距离度量来验证。

(4) 同宿轨道的破裂也可用两种距离测度来分析。

3.6.1　映照区域的构造

我们定义如下三维向量场的“横截面”，

$$\begin{cases}\Pi_0^+=\{(s_1,s_2,u_1,u_2)\mid s_1=h_0>0\\ -\delta<s_2<\delta,0<u_1<\delta,0<u_2<\delta\}\\ \Pi_0^-=\{(s_1,s_2,u_1,u_2)\mid s_1=h_0>0\\ -\delta<s_2<\delta,0<u_1<\delta,0>u_2>-\delta\}\\ \Pi_1\equiv\{(s_1,s_2,u_1,u_2)\mid u_1=h_1>0\}\end{cases} \tag{3.6.4}$$

令 $\Pi_0=\Pi_0^+\cup\Pi_0^-$，同宿轨道相交于这些横截面以下的点：

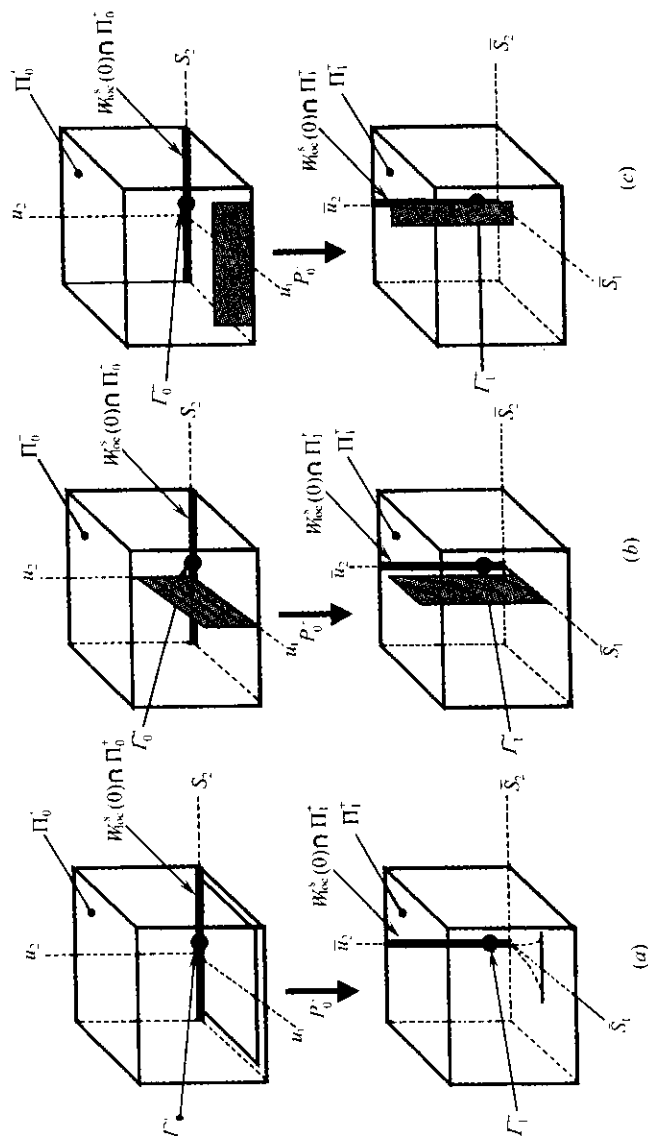


图 3.6.2 在 $u_2=0, u\geqslant 0$ 半平面上一个矩形在 P_0^+ 之下的像(a)，在 $s_2=0, u_1>0$ 半平面上一个矩形在 P_0^+ 之下的像(b)，在 $u_1=0, u_2>0$ 半平面上，一个对于 u_1 为正常数矩形中在 P_0^+ 之下的像(c)

$$\begin{cases} \Gamma_0^+ \equiv \Gamma^+ \cap \Pi_0^+ = \{s_1 = h_0, u_1 = u_2 = 0, s_2 = \xi_0 > 0\} \\ \Gamma_1^+ \equiv \Gamma^+ \cap \Pi_1 = \{u_1 = h_1, s_1 = s_2 = 0, u_2 = \xi_1 > 0\} \\ \Gamma_0^- \equiv \Gamma^- \cap \Pi_0^- = \{s_1 = h_0, u_1 = u_2 = 0, s_2 = -\xi_0 > 0\} \\ \Gamma_1^- \equiv \Gamma^- \cap \Pi_1 = \{u_1 = h_1, s_1 = s_2 = 0, u_2 = -\xi_1 > 0\} \end{cases} \tag{3.6.5}$$

其中 ξ_0,ξ_1 充分小，取 h_0,h_1 充分小。

3.6.2 靠近原点处映照 P_0 的构造

我们考虑从轨线式(3.6.1)从 Π_0 到 Π_1 的映照 P_0，为此，取 h_0，在 Π_0 中 δ 充分小，由 Π_1 的定义，取 h_1 充分小使得在 Π 充分小的坐标下充分接近原点，且 Π_0 的像含在 Π_1 中，由假设 5，对充分小 h_0,h_1，靠近原点的映照为式(3.6.1)的线性化流所给定。令 $\Pi_0^+ \equiv \Pi_0|_{\Pi_0^+}$，$\Pi_0^- \equiv \Pi_0|_{\Pi_0^-}$，在假设 2 对称性下，映照 $P_0^+:\Pi_0^+\to\Pi_1$ 转换为映照 $P_0^-:\Pi^-\to\Pi_1$。

在式(3.6.1)线性化下，从 Π_0^+ 到 Π_1 的时间为：

$$T=\frac{1}{\mu_1}\lg\frac{h_1}{u_1}$$

将此代入式(3.6.1)的线性化流，得到映照 $P_0^+:\Pi_0^+\to\Pi_1$，

$$P_0^+:\begin{pmatrix} h_0 \\ s_1 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} h_0\left(\dfrac{u_1}{h_1}\right)^{\lambda_1/\mu_1} \\ s_2\left(\dfrac{u_1}{h_1}\right)^{\lambda_2/\mu_1} \\ u_2\left(\dfrac{u_1}{h_1}\right)^{-\mu_2/\mu_1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ h_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

或记

$$\begin{cases} \bar{s}_1 = a u_1{}^{\lambda_1/\mu_1} \\ \bar{s}_2 = b s_2{}^{u_1\lambda_2/\mu_1} \\ \bar{u}_2 = c u_2 u_1{}^{\mu_2/\mu_1} \end{cases} \tag{3.6.6}$$

其中常数 $a,b,c>0$ 能从式(3.6.6)得到,注意这个映照对于 $u_1\leqslant 0$ 是没有定义的。为了了解这个映照的压缩性质,考察这个映照的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & D & E \end{pmatrix}$$

其中

$$A = a\frac{\lambda_1}{\mu_1}u_1^{\lambda_1/\mu_1-1}\quad ,B = bu_1^{\lambda_2/\mu_1}\quad ,C = b\frac{\lambda_2}{\mu_1}s_2u_1^{\lambda_2/\mu_1-1}$$

$$D = -c\frac{\mu_2}{\mu_1}u_2u_1^{-\mu_2/\mu_1-1},E = cu_1^{-\mu_2/\mu_1}$$

这个矩阵的特征值为

$$\frac{c}{2}\pm\sqrt{c^2+4AB}\text{ 和 }E$$

由假设 1 可知 $u_1\to 0$,有

$$A、B、C\to 0,E\to\infty$$

因此这个映照的一个特征值能任意大,而另两个特征值当 $|u_1|$ 充分小时为任意小;也可知依扩展方向的特征向量为常向量$(0.0,1)^{\mathrm{T}}$。其次我们想考察这个映照的一些几何性质:

(1) 半平面 $u_2=0,u_1>0$ 映照为半平面 $\bar{u}_2=0,\bar{s}_1>0$。进一步,具正(负)$\bar{s}_2$ 坐标平面上的点映为具正(负)$\bar{s}_2$ 坐标的点。至于在半平面内线的象有如下性质:

(a) 线 $u_1=\text{const},u_2=0$ 映照为线 $\bar{s}_1=au_1^{\lambda_1/\mu_1}=\text{const},u_2=0$,注意到它的长度被压缩,且 $u_1\to 0$ 时,这条线压缩为一点;

(b) 线 $s_2=\text{const},u_2=0$ 映照为曲线 $\bar{s}_2=\bar{b}s_2s_1^{\lambda_2/\mu_1}$,其中常数 $\bar{b}>0$能被计算出。这条曲线的长度可被压缩,依假设 1,$\lambda_2/\mu_1>1$,图 3.6.2(a)从几何上作了解释。

(2) 半平面 $s_2=0,u_1>0$ 映照为半平面 $\bar{s}_2=0,\bar{s}_1>0$,进一步,

在这个平面上具有正(负)u_2 坐标的点映照为具正(负)$\bar{u}_2$ 坐标的点,介于在这个象限中线的像有如下附注:

(a) 线 $u_1=\text{const},s_2=0$ 映照为线 $\bar{s}_1=au_1^{\lambda_1/\mu_1}=\text{const}$,线的长度被扩张;

(b) 线 $u_2=\text{const},s_2=0$ 映照为曲线 $\bar{u}_2=\tilde{c}u_2\bar{s}^{-\mu_2/\lambda_1}$,当 $\bar{s}_1\to 0$ 时,其长度为无界,常数$\tilde{c}>0$易被计算,图 3.6.2(b)作了几何上的说明。

(3) 半平面上一个平行于 $u_1=0,u_2>0$ 的矩形映照为半平面上平行于 $\bar{s}_1=0,\tilde{u}_2>0$ 的矩形,其中点的 s_2 和 u_1 坐标被压缩,点的 u_2 坐标被扩张,图 3.6.2(c)作了几何的说明。

(4) 正的 u_1 轴映照为正的 $\bar{s}_1$ 轴。

记在 Π_0^+ 中的矩形区域为 R^+(见图 3.6.3),利用 P_0^+ 的性质,容易验证 R^+ 依 u_1-s_2 方向是压缩的,沿 u_2 方向是扩张的。进一

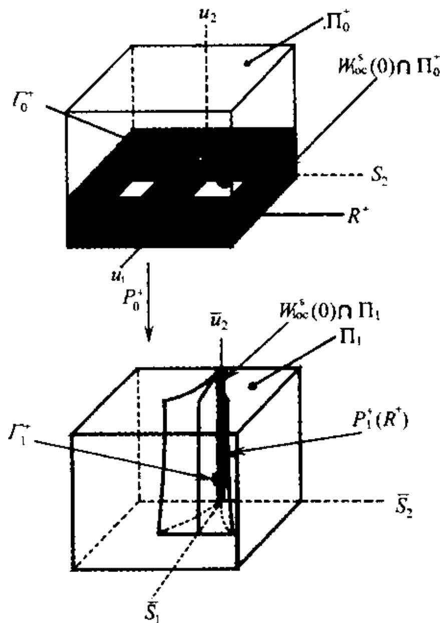


图 3.6.3 在原点附近区域 R^+ 上映射的几何性质

步由 λ 引理[140]可知，$P_0^+(R^+)$依 C^0-ε 逼近于 Π_1 中的 $\bar{u}_2>0$ 轴，R^+的像出现在图 3.6.3 中。

3.6.3　在原点邻域外映照沿同宿轨道的构造

从式(3.6.4)知，$W^s_{loc}(0)$同，Π_0^+ 相同于 $u_1=u_2=0$，$-\delta<s_2<\delta$，令 $W^u_{loc}(0)\cap\Pi_1$ 在式(3.6.1)流下向前流动，并考虑它和 Π_0^+ 相交，因原点同宿相连到 $p=0$，它必须同 $W^s_{loc}(0)\cap\Pi_0^+$ 相交在通过 Γ_0^+ 一条曲线上。由假设 3，这条曲线相交于 Π_0 中的 $u_2=0$ 平面，在 Γ_0^* 处拓扑横截，图 3.6.4 在几何上作了说明。

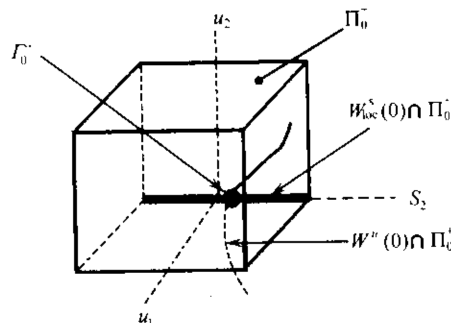


图 3.6.4　$W^u(0)\cap\Pi_0^+$ 和 $W^s_{loc}(0)\cap\Pi_0^+$ 相交

现考虑 $p=0$ 和 $p\neq0$ 情况。

1. $p=0$ 情况

对充分小 Π_1，映照 $P_1:\Pi_1\to\Pi_0^+$ 实为仿射变换，进一步由引理，$P_0^+(R^+)$依 C^0 的且 ε 逼近于在 Π_1 中的 $\bar{u}_2>0$ 轴。因此，$P_0\circ P_0^+(R^+)$依 $C^0-\varepsilon$ 逼近于 $W^u(0)\Pi_0^+$，具有两种可能方向，如图 3.6.5 所示。为确定起见，设图 3.6.5(*a*)发生，其余情况以后讨论。

2. $p\neq0$ 情况

设 $p>0$，同宿相连破裂，$P_1\circ P_0^+(R^+)$既和 Π_0^+ 相交也和 Π_0^- 相交，如图 3.6.6(*a*)所示。进一步设 $p<0$，同宿轨道破裂使得 $P_1\circ P_0^+(R^+)$又和 Π_0^+ 相交，如图 3.6.6(*b*)所示。

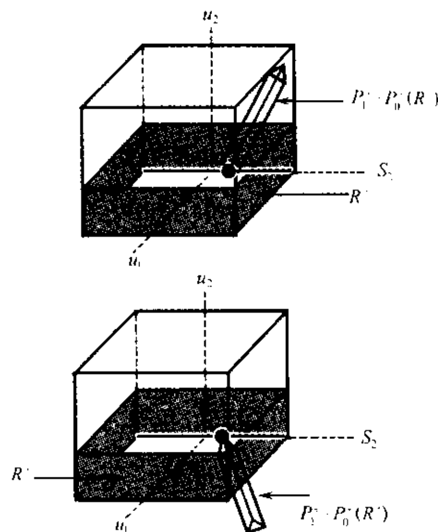


图 3.6.5　在相反映射作用下 R^+的像

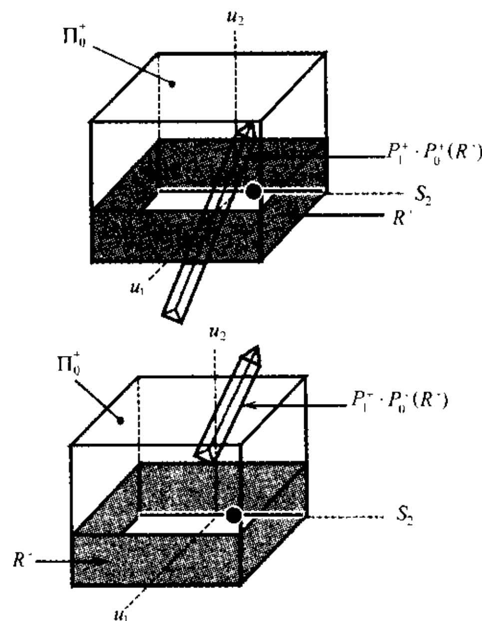


图 3.6.6　在通过改变参数同宿轨连接被打破的情况下 R^+在相反映射之下的像

3.6.4 全映照 $P \equiv P_0 \circ P_1 : \Pi_0 \to \Pi_0$

考虑两个矩形区域 $R^+ \subset \Pi_0^+$，$R^- \subset \Pi_0^-$，如图 3.6.7 所示。在 Poincaré 映照 P 下这些区域映照的像如图 3.6.7 所示。现同宿轨道已破裂，对 $p>0$，$P_0(R^+)$ 和 $P_0(R^-)$ 同 R^+，R^- 都相交（见图 3.6.7）。

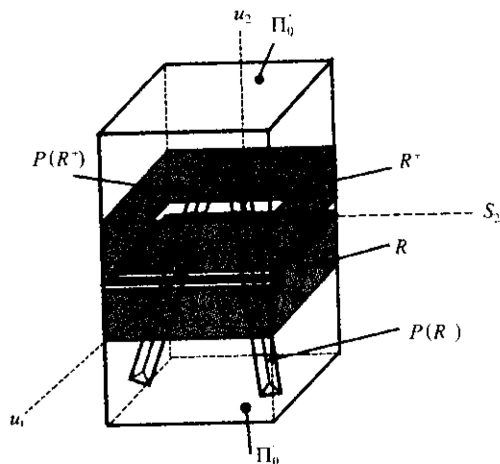


图 3.6.7 与 Poincare 映射相联系"马蹄映射"

对 $p>0$，取 R^+，R^- 比较小，我们可发现两个"水平板（horizontal slabs）"，在两个方向上压缩，在一个方向上扩张，且水平边界映照为水平边界，垂直边界映照为垂直边界。因此，作为高维广义的 Canley-Moster 条件[131]，Π_0 含有一个不变 Contor 集，它拓扑共轭于具两个符号的 Bernoulli 集。

定理 3.6.3 在上述假设下，对充分小 $p>0$，Poincaré 映照 P 具有一个不变 Contor 集，它拓扑共轭于具两个符号的 Bernoulli 集。

3.6.5 关于二模截断模型定理假设的验证

假设 1（在原点附近的性态）：式（3.6.1）中的特征值 λ_1，μ_1 对应于 q_ε 限制于 μ_ε 上线性化的两个 $o(\varepsilon)$ 特征值，在 3.2.2 节中，我们指出对充分小 ε，向量场的迹限制在 $\mathscr{A}$ 上是负的常数，因此有 $\mu_1-\lambda_1<0$，假设中其余特征值不等式从 λ_2，μ_2 为 $o(1)$ 得出。

假设 2（同宿轨道的存在性和对称性）：在 3.2 节开始时指出，扰动向量场在坐标变换 $(x,y,I,\gamma)\to(-x,-y,I,\gamma)$ 不变，我们的理论给出同宿轨道的存在性。我们证明 q_ε 的同宿轨道存在于 $\chi_\alpha-\chi_\beta$ 平面的一条曲线上，定理中参数 p 可看成在这条曲线上固定一点，横截于这条曲线运动的参数化。

假设 3（稳定，不稳定流形的不连接性）：二维流形 $W^s(q_\varepsilon)$ 和 $W_n(q_\varepsilon)$ 的距离可由式（3.4.48），式（3.4.51）分别定义的两个函数 $d(\Pi_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,\chi_\beta,k,\eta)$ 和 $\Delta\mathscr{H}$ 来测量，其中 χ_α，χ_β，k 为外参量，$\gamma_b^{T,\eta}$ 为描写在 $W^s(q_\varepsilon)$ 和 $W^u(q_\varepsilon)$ 点的变元，为了证明 $W^s(q_\varepsilon)$ 和 $W^u(q_\varepsilon)$ 沿着分叉不能相连，充分地证明对于外参量的固定值存在 $\gamma_b^{T,\eta}$，测量距离为 0，这个零点对于 $\gamma_b^{T,\eta}$ 是孤立的，因此流形不能局部相连，这由映照

$$\gamma_b^{T,\eta}\to(d(\Pi_u^\eta(\gamma_b^{T,\eta}),\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,\chi_\beta,k,\eta),\Delta\mathscr{H}(\gamma_b^{T,\eta};\chi_\alpha,k,\eta))$$

来刻画，η 充分小，条件是假定 $\cos\gamma_b^{T,\eta}\neq 0$。

假设 4（同宿轨道的破裂，$p\neq 0$）：为验证这个假设，重要的是了解在横截面 Π_0^+ 中不同不变流形的几何性质。

我们有

$$W_{\mathrm{loc}}^s(\mathscr{A})\cap\Pi_0^+=\{(s_1,s_2,u_1,u_2)\mid s_1=h_0,u_2>0,$$
$$s_2=0,u_1\geqslant 0\}$$

$$W_{\mathrm{loc}}^u(\mathscr{A})\cap\Pi_0^+=\{(s_1,s_2,u_1,u_2)\mid s_1=h_0,u_2=0,$$
$$s_2>0,u_1\geqslant 0\}$$

Melnikov 函数 M 是 $W^s(\mathscr{A})$ 和 $W^u(\mathscr{A})$ 之间距离的符号测量，由此可知对 $M>0$ 流形分裂，使得 $W^s(\mathscr{A})$ 落入 $W^u(\mathscr{A})$ 之中，对 $M<0$，流形分裂使得 $W^u(\mathscr{A})$ 落入 $W^s(\mathscr{A})$ 中，因此 Melnikov 函数测量扩张和压缩方向之间的分裂距离。对 $M>0$，$W^u(\mathscr{A})$ 转到 Π_0^+ 具有

负的 u_2 坐标，而对 $M<0$，$W^u(\mathscr{A})$ 转到 Π_0^+ 具有正的 u_2 坐标，因 $W^u(q_\varepsilon)$ 位于 $W^u(\mathscr{A})$ 中，因此 $W^u(q_\varepsilon)$ 具有和 $W^u(q_\varepsilon)\cap\Pi_0^+$ 中 u_2 分量的符号相同的性质，如图 3.6.8 所示。

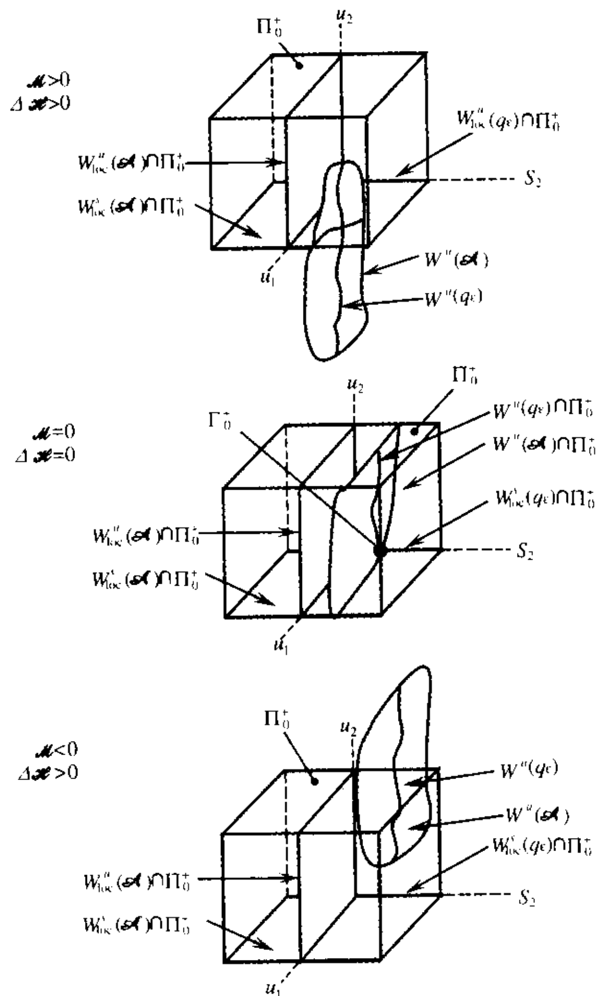


图 3.6.8 流形在 $M>0,\Delta\mathscr{H}>0$；$M=0,\Delta\mathscr{H}=0$；$M<0,\Delta\mathscr{H}>0$ 时与 Π_0^+ 的交线

距离度量 $\Delta\mathscr{H}$ 测量弱扩张与压缩方向的距离，$\Delta\mathscr{H}>0$，$W^u(q_\varepsilon)$ 转到 q_ε 的邻域具有 $u_1>0$，而 $\Delta\mathscr{H}<0$，$W^u(q_\varepsilon)$ 转到 q_ε 的邻域具有 $u_1<0$。因此对 $M>0,\Delta\mathscr{H}>0$，同宿轨道分裂。

假设 5（非共振特征值，在原点附近线性化）：特征值随参数 χ_α,χ_β 和 k 变化。因此，对任意小的参数变化，能保证非共轭条件在特征值上成立。

现我们解释一般参数 p 的性质，图 3.6.9 中我们给出 Melnikov 函数 M 的零点，$\Delta\mathscr{H}(\eta=0)$ 的零点集（对固定的 $k=1$，在平面

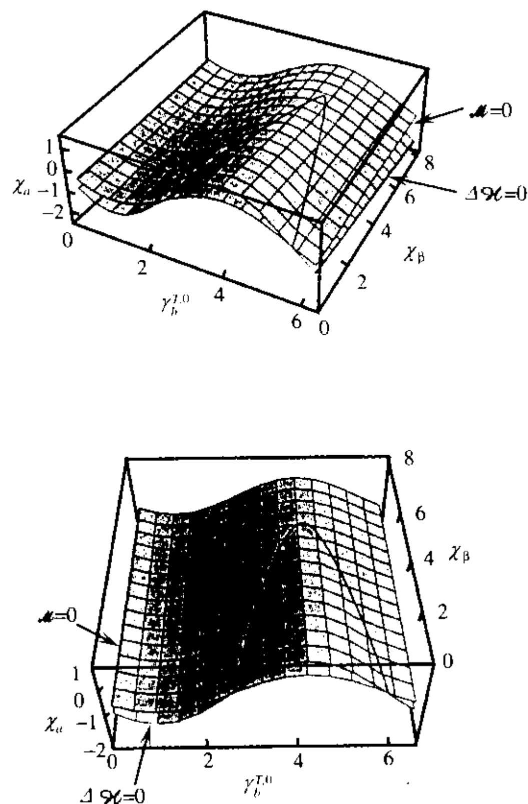


图 3.6.9 在 $M=0$ 和 $\Delta\mathscr{H}=0$ 时图的两种情况

$\gamma_b^{T,\eta}-\chi_\alpha-\chi_\beta$ 空间中，这两个函数的零点集沿指出的曲线相交，沿着这条曲线上的任何点 $p=0$)，因此，从上面的讨论中，零点集横截于这条曲线运动使之在 $M>0$ 和 $M<0$ 区域运动，在参数的变化中满足假设 4 的要求。

第四章　具外力和阻尼的 Sine-Gordon 方程的同宿轨道

对于如下具外力项和阻尼的 Sine-Gordon 方程：

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=\varepsilon[-\hat{\alpha}u_t+\hat{\Lambda}u_{txx}+\hat{\Gamma}\sin\omega t]$$

有周期偶边界条件

$$u\left(x-\frac{1}{2}L,t\right)=u\left(x\frac{1}{2}L,t\right),u(x,t)=u(-x,t)$$

的动力系统性质已经做了详尽的研究。其中，$0<\varepsilon\hat{\alpha}\ll 1$，$0<\varepsilon|\hat{\Lambda}|\ll 1$，$\omega=1-\varepsilon\tilde{\omega}$，$L$ 固定，ε 和 $\tilde{\omega}$ 均为正常数。如果对上述扰动的 Sine-Gordon 方程寻求如下形式的解：

$$u_\varepsilon=2\sqrt{\varepsilon\tilde{\omega}}[B(X,T)e^{i\omega t}+B^*(X,T)e^{-i\omega t}]+O(\varepsilon)$$

其中，$X=\sqrt{2\varepsilon\tilde{\omega}}x$，$T=\varepsilon\tilde{\omega}t$，将它代入具扰动的 Sine-Gordon 方程，可得如下具扰动的非线性 Schrödinger 方程：

$$-iB_T+B_{XX}+(|B|^2-1)B=\varepsilon(i\alpha B-i\Lambda B_{XX}+i\bar{\Gamma})$$

这里，$\hat{\alpha}=2\varepsilon\tilde{\omega}\alpha$，$\hat{\Lambda}=\Lambda$，$\hat{\Gamma}=8\varepsilon^{3/2}\tilde{\omega}^{3/2}\bar{\Gamma}$。这个方程定义在 X 的区间 $\left[-\frac{1}{2}L_X,\frac{1}{2}L_X\right]$ 上，其中 $L_X=\sqrt{2\varepsilon\tilde{\omega}}L$。

如果考虑两个 F 氏模截断，即令

$$B(X,T)=\frac{1}{\sqrt{2}}c(T)+b(T)\cos kX,\qquad k=\frac{2\pi}{L_X}$$

将此解代入方程中，并忽略高阶 Fourier 模项，可得如下两个模的方程：

$$-i\dot{c}+\left(\frac{1}{2}\mid c\mid^2+\frac{1}{2}\mid b\mid^2-1\right)c+$$

$$\frac{1}{2}(cb^*+bc^*)b=i\varepsilon\alpha c+i\varepsilon\Gamma-$$

$$i\dot{b}+\left[\frac{1}{2}\mid c\mid^2+\frac{3}{4}\mid b\mid^2-(1+k^2)\right]b+$$

$$\frac{1}{2}(cb^*+bc^*)c=i\varepsilon\beta b$$

这里 $\Gamma=\sqrt{\alpha}\bar{\Gamma}$, $\beta=(\alpha+\Lambda k^2)$。

因此,我们可以考虑如下更一般的方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=JD_xH(x,I)+\varepsilon g^x(x,I,\mu,\varepsilon)\\ \dot{I}=\varepsilon g^I(x,I,\gamma,\mu,\varepsilon)\\ \dot{\gamma}=D_IH(x,I)+\varepsilon g^\gamma(x,I,\gamma,\mu,\varepsilon)\end{cases}\tag{4.0.1}$$

$$(x,I,\gamma)\in R^2\times R\times S^1,\qquad J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

4.1 未扰动方程组的结构

我们考虑未扰动方程组的情况,即 $\varepsilon=0$

$$\begin{cases}\dot{x}=JD_xH(x,I)\\ \dot{I}=0\\ \dot{\gamma}=D_IH(x,I)\end{cases}\tag{4.1.1}$$

$$(x,I,\gamma)\in R^2\times R\times S^1$$

我们注意到上述方程组中,I 和 γ 是不耦合的,而 I 和 γ 的动力系统是很简单的。

假设 1 对一切 $I\in[I_1,I_2]$,方程

$$\dot{x}=JD_xH(x,I)\tag{4.1.2}$$

具有一个双曲不动点 $\bar{x}_0(I)$,和它相连的有一条同宿轨道 $x^h(t,I)$,即

$$\lim_{t\to\pm\infty}x^h(t,I)=\bar{x}_0(I)$$

由式(4.1.2)和假设1,我们能够描绘出方程(4.1.1)在整个四维相空间中的相空间结构。

4.1.1 法向双曲不变流形 $\mathcal{M}$

容易验证如下点集

$$\mathcal{M}=\{(x,I,\gamma)\mid x=\bar{x}_0(I),I_1\leqslant I\leqslant I_2\}$$

为二维的具有边界的法向双曲不变流形,$\mathcal{M}$ 的边界 $\partial\mathcal{M}$ 为两个圆:$\{(x,I,\gamma)\mid x=\bar{x}_0(I),I=I_1\}$ 和 $\{(x,I,\gamma)\mid x=\bar{x}_0(I),I=I_2\}$ 所给定。因 $\dot{I}=0$,向量场式(4.1.1)在边界上恒等于0。不变性从假设1推出,它说明向量场式(4.1.1)正切于 $\mathcal{M}$。“法向双曲”意味着在线性动力系统中扩张率和收缩率依 $\mathcal{M}$ 的补方向控制着 $\mathcal{M}$ 的正切方向。对我们来说,重要的是,法向双曲集在扰动下是不变的。

4.1.2 在 $\mathcal{M}$ 上的动力学

未扰动系统限制在 $\mathcal{M}$ 上为

$$\dot{I}=0,\dot{\gamma}=D_IH(\bar{x}_0(I),I)\tag{4.1.3}$$

这个方程组能被平凡求解,轨线为

$$I=\text{const},\gamma(t)=(D_IH(\bar{x}_0(I),I))t+\gamma_0\tag{4.1.4}$$

因此,如 $D_IH(\bar{x}_0(I),I)\neq0$,则 $I=\text{const}$ 标志周期轨道,如 $D_IH(\bar{x}_0(I),I)=0$,则 $I=\text{const}$ 标志着不动点的圆。我们称 $D_IH(\bar{x}_0(I),I)=0$ 的 I 值为共振 I 值。再对未扰动系统作如下假设:

假设 2(共振) 存在 $I\in[I_1,I_2]$ 的一个值,记为 I^r,对于它有 $D_IH(\bar{x}_0(I^r),I^r)=0$。

4.1.3 $W^s(\mathcal{M})$, $W^u(\mathcal{M})$ 和同宿流形

具边界的二维法向双曲不变流形有着三维的稳定流形 $W^s(\mathcal{M})$ 和不稳定流形 $W^u(\mathcal{M})$,这从式(4.1.1)的假设1以及 $\mathcal{M}$ 的法向双曲性可以看出。进一步,由式(4.1.2)同宿轨道的存在性推出 $W^s(\mathcal{M})$ 和 $W^u(\mathcal{M})$ 沿着一个三维的同宿流形(记为 Γ)相交

(非横截地)。在 $\Gamma \equiv W^s(\mathcal{M}) \cap W^u(\mathcal{M})$ 中的轨线能表示为

$$(x^h(t,I), I, \gamma(t,I,\gamma_0)) = \int_0^t D_I H(x^h((s,I),I)\mathrm{d}s + \gamma_0) \tag{4.1.5}$$

这条轨线当 $t \to \pm\infty$ 时逼近于 $\mathcal{M}$ 中的一条轨线，因 $x^h(t,I) \to \tilde{x}_0(I)(t \to \pm\infty)$。由于式(4.1.1)是自治系统,具有对 t 的平移不变性,因此

$$(x^h(t - t_0, I), I, \gamma(t - t_0, I, \gamma_0)) \tag{4.1.6}$$

也是式(4.1.1)的一条轨线。现考虑式(4.1.1)的 x 分量,令 $x^h(0,I)$ 为同宿于 $\tilde{x}_0(I)$ 的同宿轨道上的一个参考点,则由解的惟一性,t_0 是从点 $x^h(-t_0,I)$ 到达参考点 $x^h(0,I)$ 的惟一飞行时间。因此,同宿于 $\tilde{x}_0(I)$ 的同宿轨道 $x^h(t,I)$ 能和 R 上的点一对一地对应起来,由此可知对于所有四维方程组,同宿流形 Γ 能被参数化为

$$\begin{aligned}\Gamma = \{(x,I,\gamma) \mid x &= x^h(-t_0,I), \gamma = \\ &\gamma(-t_0,I,\gamma_0), I_1 \leqslant I \leqslant I_2, t_0 \in \\ &R, 0 \leqslant \gamma_0 \leqslant 2\pi\}\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

同宿流形的参数化推出:变量 t_0 沿着同宿流形移动相当于沿一条相同的轨道移动。

4.1.4 Γ 上的动力学及其和 $\mathcal{M}$ 上动力学的关系

当 $x^h(t,I) \to \tilde{x}_0(I)$ 和 I 保持常数时,我们注意表达式

$$\Delta\gamma = \gamma(+\infty, I, \gamma_0) - \gamma(-\infty, I, \gamma_0) \tag{4.1.8}$$

对于 $D_I H(\tilde{x}_0(I), I) \neq 0$ 的 I 值,$\Delta\gamma$ 是不确定的;对于共振 I 值,$\Delta\gamma$ 是确定的,因为积分是收敛的(积分的收敛性来自 $x^h(t,I) \to \tilde{x}_0(I)$ 指数快地收敛,$t \to \pm\infty$,因此,在共振值上,$D_I H(x^h(t,I), I)$ 指数快地趋于 0,$t \to \pm\infty$)。因共振值 I 表示在 $\mathcal{M}$ 上不动点的圆,轨道 $(x^h(t,I^r), I^r, \gamma(t,I^r,\gamma_0))$ 是相连于不动点共振圆的不同点的典型的异宿轨道(这种连接是同宿的,如 $\Delta\gamma = 2\pi n$,对某些整数 n)。数 $\Delta\gamma$ 给出了异宿轨线沿着不动点圆的端点之间的位相差,如图 4.1.1 所示。

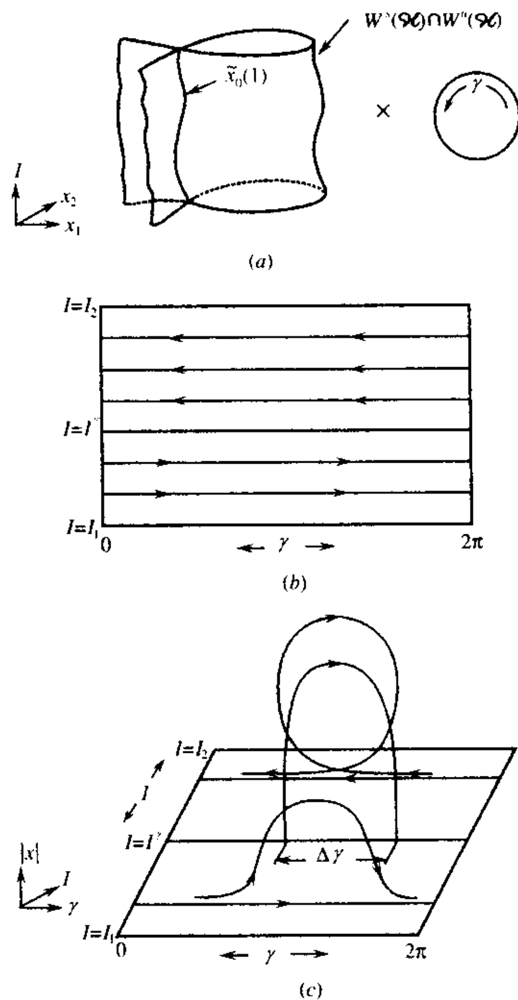


图 4.1.1 $\mathcal{M}$ 及其稳定与不稳定流形的几何性(a);$\mathcal{M}$ 的动力学行为(b);$\mathcal{M}$ 上同宿到周期轨的轨道和共轭上鞍点的异宿轨道(c)

4.2 扰动系统的结构

对于未扰动系统,我们只采用一个坐标系(x,I,γ),但在扰动系统中,我们得考虑两种坐标系(x,I,γ)和(x,h,γ)。

4.2.1 $\mathcal{M}$, $W^s(\mathcal{M})$和 $W^u(\mathcal{M})$在扰动下的不变性

定义集合

$$U^\delta = \{(x,I,\gamma) \mid |x - x_0(I)| \leqslant \delta, \tilde{I}_1 \leqslant I \leqslant \tilde{I}_2\} \tag{4.2.1}$$

其中,$I_1 \leqslant \tilde{I}_1 < \tilde{I}_2 \leqslant I_2$。如果 $I_1 = \tilde{I}_1$ 和 $I_2 = \tilde{I}_2$,可知 U^δ 为 $\mathcal{M}$ 的一个邻域。对于未扰动系统,我们定义 $\mathcal{M}$ 的局部稳定和不稳定流形。

$$W^s_{loc}(\mathcal{M}) \equiv W^s(\mathcal{M})) \cap U^\delta, \quad W^u_{loc}(\mathcal{M}) = W^u(\mathcal{M}) \cap U^\delta$$

定理 4.2.1 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小,使得 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,$\mathcal{M}$ 作为一个 C^r,具边界的局部不变二维法向双曲流形 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 是不变的,$\mathcal{M}_\varepsilon$ 具有如下性质:

(1) $\mathcal{M}_\varepsilon \in C^r(\varepsilon,\mu)$

(2) $\mathcal{M}_\varepsilon$ 作为 C^r 流形 ε 逼近于 $\mathcal{M}$,能表示 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 为

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x,I,\gamma) \mid x = x_\varepsilon(I,\gamma,\mu) = x_0(I) + \varepsilon \tilde{x}_1(I,\gamma,\mu) + O(\varepsilon^2), \tilde{I}_1 \leqslant I \leqslant \tilde{I}_2\} \tag{4.2.2}$$

进一步,存在 δ_0 充分小(依赖于 ε)使得对 $0<\delta<\delta_0$,存在 U^δ 中的局部不变流形 $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$和 $W^u_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$,具有以下性质:

(3) $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$和 $W^u_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon) \in C^r(\varepsilon,\mu)$

(4) $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon) \cap W^u_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon) = \mathcal{M}_\varepsilon$

(5) $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)(W^u_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon))$是通过 $W^s_{loc}(\mathcal{M})(W^u_{loc}(\mathcal{M}))$的一个图,它是 ε 逼近于 $W^s_{loc}(\mathcal{M})(W^u_{loc}(\mathcal{M}))$

(6) 令$(x^s_\varepsilon(t), I^s_\varepsilon(t), \gamma^s_\varepsilon(t))$(或$(x^u_\varepsilon(t), I^u_\varepsilon(t), \gamma^u_\varepsilon(t))$)表示一条轨线,它是在 $t=0$ 时在 $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)(W^u_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon))$中,则当 $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$时,或者

(a) $(x^s_\varepsilon(t), I^s_\varepsilon(t), \gamma^s_\varepsilon(t))$(或$(x^u_\varepsilon(t), I^u_\varepsilon(t), \gamma^u_\varepsilon(t))$)越过$\partial U^\delta$,或者

(b) $|x^s_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(I,\gamma,\mu)| \to 0$($|x^u_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(I,\gamma,\mu)| \to 0$)。

我们把 $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$和 $W^u_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$分别称为 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 的局部稳定流形和局部不稳定流形。

证:来自 Fenichel 的不变流形理论[38,39,40]。

附注 1:局部不变流形意味着具初始条件的轨线在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 上能离开 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 仅能越过 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 的边界。

附注 2:$\mathcal{M} \in C^r(\varepsilon,\mu)(r \geqslant 2)$是重要的,它使得我们能在流形上对 ε,μ 作 Taylor 展开。

沿着扰动向量场(0,1)微分$x_\varepsilon(I,\gamma,\mu)$,可得$x_\varepsilon(I,\gamma,\mu)$必须满足的拟线性微分方程

$$JD_xH(x_\varepsilon,I) + \varepsilon g^x(x_\varepsilon,I,\gamma,\mu,\varepsilon) = \varepsilon(D_I x_\varepsilon) g^I(x_\varepsilon,I,\gamma,\mu,\varepsilon) + (D_\gamma x_\varepsilon)(D_I H(x_\varepsilon,I)) + \varepsilon g^\gamma(x_\varepsilon,\gamma,\mu,\varepsilon) \tag{4.2.3}$$

我们能对式(4.2.3)关于 ε 微分,得到$x_\varepsilon(I,\gamma,\mu)$的导数满足的方程。我们得到$x_I(I,\gamma,\mu)$满足常微分方程

$$-(D_\gamma x_I) D_I H(x_0(I),I) + JD_x^2 H(x_0(I),I)\, x_I = (D_I x_0(I)) g^I(x_0(I),I,\gamma,\mu,0) - g^x(x_0(I),I,\gamma,\mu,0) \tag{4.2.4}$$

我们指出一种特殊情况很重要,此时式(4.2.4)可立即求解。即在共振值 $I = I^r$ 上有 $D_I H(x_0(I^r),I^r) = 0$,式(4.2.4)能归结为代数方程求解

$$x_I = (JD_x^2(x_0(I^r), I^r)^{-1}[D_I x_0(I^r) g^I(x_0(I^r), I^r, \gamma, \mu, 0) - g^x(x_0(I^r), I^r, \gamma, \mu, 0)] \tag{4.2.5}$$

容易发现 $D_I x_0(I)$ 满足隐式微分方程

$$D_x H(x(I), I) = 0$$

简单计算可得

$$D_I x_0(I) = -(D_x^2 H(x_0(I), I))^{-1}(D_I D_x H(x_0(I), I)) \tag{4.2.6}$$

式(4.2.5)、式(4.2.6)以后是有用的，$D_x^2 H(x_0(I), I)$ 的可逆性来自 $x_0(I)$ 的双曲线性。

附注 3：我们分别定义 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的整体稳定流形和不稳定流形为 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$ 和 $W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)$。令 $\phi_t(\cdot)$ 表示式(4.0.1)所形成的流，定义

$$\begin{aligned} W^s(\mathscr{M}_\varepsilon) &= \bigcup_{t\leq 0} \phi_t(W^s_{loc}(\mathscr{M}_\varepsilon) \cap U^\delta) \\ W^u(\mathscr{M}_\varepsilon) &= \bigcup_{t\geq 0} \phi_t(W^u_{loc}(\mathscr{M}_\varepsilon) \cap U^\delta) \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

4.2.2 在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上的动力学

我们想讨论在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上的动力学。对于扰动向量场(0,1)，我们将引入 (x, h, γ) 坐标，扰动向量场限制在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon g^I(x_\varepsilon(I, \gamma, \mu), I, \gamma, \mu, \varepsilon) \\ \dot{\gamma} &= D_I H(x_\varepsilon(I, \gamma, \mu), I) + \\ &\quad \varepsilon g^\gamma(x_\varepsilon(I, \gamma, \mu), I, \gamma, \mu, \varepsilon) \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

式(4.2.8)对 ε 作幂级数展开得

$$\left\{\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon g^I(x_0(I), I, \mu, 0) + \\ &\quad \varepsilon^2[\langle D_x g^I(x_0(I), I, \gamma, \mu, 0), x_I(I, \gamma)\rangle + \\ &\quad D_\varepsilon g^I(x_0(I), I, \gamma, \mu, 0)] \\ \dot{\gamma} &= D_I H(x_0(I), I) + \\ &\quad \varepsilon[\langle D_x(D_I H(x_0(I), I)), x_I(I, \gamma)\rangle + \\ &\quad g^\gamma(x_0(I), I, \gamma, \mu, 0)] + O(\varepsilon^2) \end{aligned}\right. \tag{4.2.9}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示通常的欧氏内积。我们研究式(4.2.9)在共振 $I = I^r$ 时的动力学。为了得到更简单的方程，我们引入变元变换

$$I = I^r + \sqrt{\varepsilon} h, \qquad \gamma = \gamma \tag{4.2.10}$$

将式(4.2.10)代入式(4.2.9)，在 I 的 Taylor 展开式中考虑 $O(\sqrt{\varepsilon})$，再作时间尺度变换 $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$，可得方程

$$\begin{aligned} h' &= g^I + \sqrt{\varepsilon} G(h, \gamma, \mu) + O(\varepsilon) \\ \gamma' &= (\langle D_x(D_I H), D_I x_0\rangle + D_I^2 H) h + \\ &\quad \sqrt{\varepsilon} F(h, \gamma, \mu) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

这里“′”表示对 τ 的导数。

$$G(h, \gamma, \mu) = (\langle D_x(g^I), D_I x_0\rangle + D_I g^I) h$$

$$\begin{aligned} F(h, \gamma, \mu) &= \frac{1}{2}[\langle D_x(D_x D_I H) D_I x_0, D_I x_0\rangle + \\ &\quad \langle D_x(D_I H), D_I^2 x_0\rangle + 2\langle D_x(D_I^2 H), D_I x_0\rangle + \\ &\quad D_I^3 H] h^2 + \langle D_x(D_I H), x_I\rangle + g^\gamma \end{aligned}$$

以上所有函数取值在 $x_0(I) = x_0(I^r), I = I^r, \gamma, \mu, \varepsilon = 0$。

当 $\varepsilon = 0$ 时，式(4.2.11)为可积 Hamilton 方程组

$$\begin{aligned} h' &= g^I = -D_\gamma \mathscr{H} \\ \gamma' &= (\langle D_x(D_I H), D_I x_0\rangle + D_I^2 H) h = D_h \mathscr{H} \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

其中

$$\mathscr{H}(h, \gamma) = (\langle D_x(D_I H), D_I x_0\rangle + D_I^2 H) \cdot \frac{1}{2} h^2 - \int_{\gamma_0}^{\gamma} g^I d\bar{\gamma}$$

为 Hamilton 函数，可积 Hamilton 结构对于了解 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上共振集附近动力系统的定性结构是有用的。

从动力学系统在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上考虑，我们仅关心在共振 $I = I^r$ 的 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 邻域里的状态。引入中心在 $I = I^r$ 的环

$$\mathscr{M}_\varepsilon \equiv \{(x,h,\gamma) \mid x = \boldsymbol{x}_\varepsilon(I^r + \sqrt{\varepsilon}h,\gamma,\mu), \mid h \mid < C\}$$

其中 $C>0$ 为某常数。选择 C 充分大使得环面包含未扰动同宿轨道。在 h-γ 坐标中,共振面(即环 $\mathscr{M}_\varepsilon$)为 $o(1)$宽度,三维稳定与不稳定流形 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$与 $W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)$分别是 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$和 $W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)$的子集。

从扰动理论的观点,我们想对 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的动力系统和在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上相同区域内未扰动系统进行比较,为此定义"未扰动环"

$$\mathscr{M}_0 \equiv \{(x,h,\gamma) \mid x = \boldsymbol{x}_0(I^r), \mid h \mid < C\}$$

它的三维稳定流形 $W^s(\mathscr{M}_0)$和不稳定流形 $W^u(\mathscr{M}_0)$沿着分叉相连。

对可积 Hamilton 系统式(4.2.12)再作假设。

假设 3: 对 $\mu=\mu_0$ 存在 $\gamma_c(\mu_0)$和 $\gamma_s(\mu_0)$使得 $q_0=(h,\gamma)=(0,\gamma_s(\mu_0))$是式(4.2.12)的双曲鞍点型不动点,$p_0=(h,\gamma)=(0,\gamma_c(\mu_0))$是式(4.2.12)中心型的不动点。进一步,$q_0$ 相连一个同宿轨道,p_0 仅是同宿轨道内部的一个不动点,如图 4.2.1 所示。

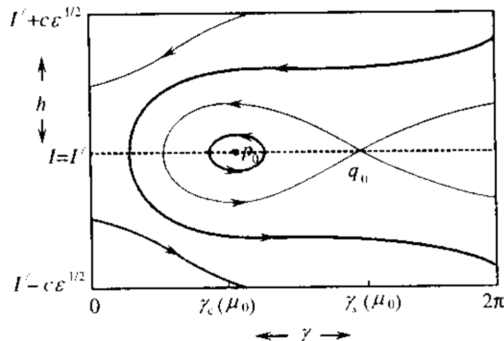


图 4.2.1 限制到 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上与首阶 Hamiltonian 向量场相关的动力学行为

附注 1:可能出现在共振点有同宿轨道相连接的多于一个鞍点——中心对的情况,如图 4.2.2 所示。

附注 2:因在 p_0,q_0 处线性化向量场的矩阵是可逆的,这些不动点包含在含 μ_0 的参数值开集上是存在的。

附注 3:分界线的方程容易从 Hamilton 式(4.2.12)得到,利用

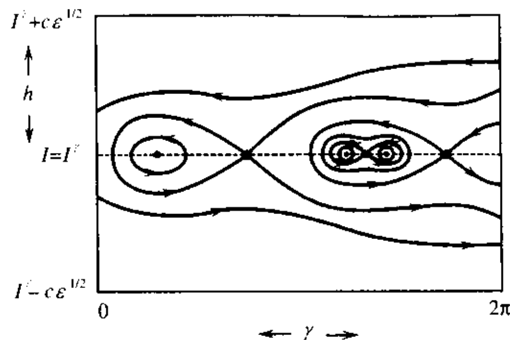


图 4.2.2 在共振附近限制到 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上关于首阶 Hamiltonian 向量场动力学行为的其他可能性

$\mathscr{H}$的水平集的能量确定了分界线,它等于鞍点 q_0 的能量,即

$$\mathscr{H}(h,\gamma,\mu_0) - \mathscr{H}(0,\gamma_s(\mu_0),\mu_0) = 0 \qquad (4.2.13)$$

引理 4.2.2 对 ε 充分小

(1) q_0 保持为式(4.2.11)的鞍点稳定型双曲不动点,表示为 q_ε。

(2) 如

$$\langle D_x(D_I H), D_\gamma \boldsymbol{x}_I\rangle + D_\gamma g^\gamma + D_I g^I + \langle D_x g^I, D_I \boldsymbol{x}_0\rangle < 0 \qquad (4.2.14)$$

在相连于 q_0 的同宿轨道内部成立,则 p_0 变成式(4.2.11)的双曲汇点,记为 p_ε,如图 4.2.3 所示。

(3) p_0 逼近于 p_ε 以阶 $o(\sqrt{\varepsilon})$,q_0 以 $o(\sqrt{\varepsilon})$逼近 q_ε。

证:(1) 由双曲不动点的不变性得到。

(2) 由量

$$(\langle D_x(D_I H), D_\gamma \boldsymbol{x}_I\rangle + D_\gamma g^\gamma + D_I g^I + \langle D_x g^I, D_I \boldsymbol{x}_0\rangle)$$

正好为 $D_\gamma F + D_h G$,它是式(4.2.11)线性化迹的最高次项。由程序分析,使用 Bendixson 准则以及某些简单相平面分析技巧即得结果[133]。

(3) 由隐函数定理得到。

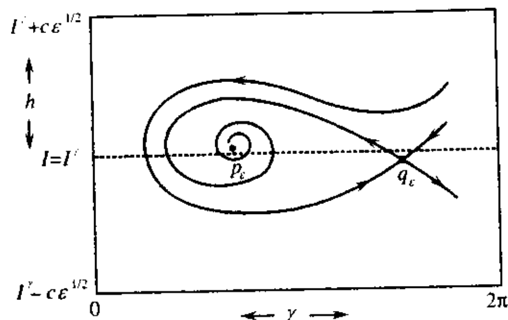


图 4.2.3 在引理 4.2.2 的条件下,限制到 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上在向量场的共振附近的动力学行为

在式(4.2.12)中相连于 q_0 的同宿轨道所围成的区域是汇点 p_ε 的吸引盆的一个好的近似。

引理 4.2.3 设引理 **4.2.2** 的条件式(4.2.14)成立,p 表示与未扰动同宿轨道有一个 $O(1)$ 距离(在 h-γ 坐标系中)的轨线所界区域中的任意一点,则 ε 充分小时,对于扰动动力系统式(4.2.11)经过 p 的轨线在 $\tau\to\infty$ 时渐近地逼近 p_ε。

证:在引理 4.2.2 的条件式(4.2.14)下,q_ε 的稳定流形形成 p_ε 的吸引盆的边界。由标准的平面 Melnikov 分析表明,q_ε 的稳定与不稳定流形被一个 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 大小的未扰动同宿轨道管状邻域所分离(除 q_0 的一个小的固定邻域外),如图 4.2.4 所示。

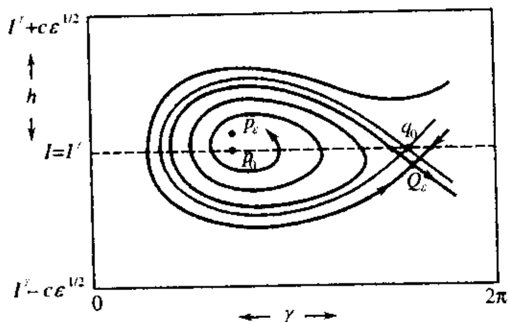


图 4.2.4 p_ε 的吸引盘以及与共振附近未扰动结构的对比

4.2.3 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$和 $W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)$的纤维:奇异扰动性质

定理 4.2.1 提供了在 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$和 $W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)$上轨道渐近性质的描述,引理 4.2.2 和引理 4.2.3 讨论了在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上的动力学。现在,我们想把这些结果捆绑在一起,特别地,我们要特征化在 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$和 $W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)$中的轨线利用它们在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的渐近性。这是一个奇性扰动理论中的精细问题,因为与快的横截于 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的动力学相比较,动力学在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上是慢的,在没有重新标度时间的情况下,再写这些方程为

$$\begin{cases} \dot{h} = \sqrt{\varepsilon}g^I + \varepsilon G(h,\gamma,\mu) + O(\varepsilon^{3/2}) \\ \dot{\gamma} = \sqrt{\varepsilon}(\langle D_x(D_IH), D_I x_0\rangle + D_I^2 H)h + \\ \qquad \varepsilon F(h,\gamma,\mu) + O(\varepsilon^{3/2}) \end{cases} \tag{4.2.15}$$

注意到,对 $\varepsilon=0$,式(4.2.15)归结为

$$\dot{h} = 0, \qquad \dot{\gamma} = 0 \tag{4.2.16}$$

于是在整个相空间的动力学能写为

$$\begin{cases} \dot{x} = JD_xH(x,I^r) + \sqrt{\varepsilon}D_I(JD_xH(x,I^r))h + \\ \qquad \frac{1}{2}\varepsilon D_I^2(JD_xH(x,I^r))h^2 + \\ \qquad \varepsilon g^x(x,I^r,\gamma,\mu,0) + O(\varepsilon^{3/2}) \\ \dot{h} = \sqrt{\varepsilon}g^I(x,I^r,\gamma,\mu,0) + \\ \qquad \varepsilon D_I g^I(x,I^r,\gamma,\mu,0) + O(\varepsilon^{3/2}) \\ \dot{\gamma} = D_IH(x,I^r) + \sqrt{\varepsilon}D_I^2H(x,I^r)h + \\ \qquad \frac{1}{2}\varepsilon D_I^3H(x,I^r)h^2 + \\ \qquad \varepsilon g^\gamma(x,I^r,\gamma,\mu,0) + O(\varepsilon^{3/2}) \end{cases} \tag{4.2.17}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,式(4.2.17)归结为

$$\begin{cases} \dot{x} = JD_x(x, \Gamma) \\ \dot{h} = 0 \\ \dot{\gamma} = D_I H(x, \Gamma) \end{cases} \tag{4.2.18}$$

对于上述方程,有某些性质需要指出:

(1) 从式(4.2.16)我们看到,当 $\varepsilon = 0$ 时,在 $\mathscr{A}$ 上的共振邻域(关于式(4.2.10)所标度的变元)完全由不动点构成,因此,可在式(4.2.10)中作变元变换使不动点的圆变为中心在 $I = \Gamma$ 上的不动点环。

(2) 对小的 $\varepsilon(\varepsilon \neq 0)$,粗略地讲,动力学在 x 变化的特征在扰动的影响下并不改变很多,定理 4.2.1 已给出详细的描述,但动力学在环上是极不相同的。事实上,$\varepsilon = 0$ 时,在环面上不存在动力学(它由不动点所构成),而对于小的 ε,典型的共振结构产生,如同式(4.2.15)的研究,考虑慢时间 $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$。

我们利用纤维理论来分析上述方程。

先举一个例子进行分析,考虑扰动方程

$$\dot{\xi} = -\varepsilon\xi, \quad \dot{\eta} = -\eta \tag{4.2.19a}$$

有解

$$\xi(t) = \xi_0 e^{-\varepsilon t}, \quad \eta(t) = \eta_0 e^{-t} \tag{4.2.20a}$$

未扰动方程

$$\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} = -\eta \tag{4.2.19b}$$

有解

$$\xi(t) = \xi_0, \quad \eta(t) = \eta_0 e^{-t} \tag{4.2.20b}$$

ξ 轴是关于扰动和未扰动问题的不变流形,ξ-η 平面的剩余部分是它的稳定流形。同我们的问题相联系,ξ 轴类似于我们的环。而 ξ-η 平面的剩余部分类似于我们环面的稳定流形,可采用 Fenichel 的纤维理论和奇性摄动理论来处理我们的问题。

定理 4.2.4 存在 $\delta_0 > 0, \varepsilon_0 > 0$ 使得对给定的任何点 $(\bar{h}, \bar{\gamma}) \in \mathscr{A}_\varepsilon$,存在一维曲线族,称之为稳定纤维,它能表示为图

$$x_2 = x_2(x_1; \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon}), h = h(x_1; \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon})$$

$$\gamma = \gamma(x_1; \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon})$$

其中 $x \equiv (x_1, x_2)$,点 $(\bar{h}, \bar{\gamma})$ 称为纤维的基点。这些图被如下参数确定:任何 $0 < \delta \leqslant \delta_0, 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, |x_1| \leqslant \delta, \mu \in R^1$。这些曲线具有如下性质:

(1) 它们对 x_1 为 C^r 的,对 $(\bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon})$ 为 C^{r-1} 的。

(2)
$$x_2(\boldsymbol{x}_{1\varepsilon}(\Gamma + \sqrt{\varepsilon}\bar{h}, \bar{\gamma}, \mu); \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon}) = \boldsymbol{x}_{2\varepsilon}(\Gamma + \sqrt{\varepsilon}\bar{h}, \bar{\gamma}, \mu)$$

$$h(\boldsymbol{x}_{1\varepsilon}(\Gamma + \sqrt{\varepsilon}\bar{h}, \bar{\gamma}, \mu); \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon}) = \bar{h}$$

$$\gamma(\boldsymbol{x}_{1\varepsilon}(\Gamma + \sqrt{\varepsilon}\bar{h}, \bar{\gamma}, \mu); \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon}) = \bar{\gamma}$$

其中,$\mathscr{A}_\varepsilon$ 对于适当限制的 I 值为 $\boldsymbol{x}_\varepsilon(I, \gamma, \mu) = (\boldsymbol{x}_{1\varepsilon}(I, \gamma, \mu), \bar{x}_{2\varepsilon}(I, \gamma, \mu))$ 的图,见定理 4.2.1。

(3) $W^s_{loc}(\mathscr{A}_\varepsilon)$ 为基点在 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 的所有稳定纤维的并集。

(4) 设 $(\bar{h}(t), \bar{\gamma}(t))$ 为 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 中的轨线,满足 $(\bar{h}(0), \bar{\gamma}(0)) = (\bar{h}, \bar{\gamma})$,让 $(x_1(t), x_2(t), h(t), \gamma(t))$ 是 $W^s_{loc}(\mathscr{A}_\varepsilon)$ 中的一条轨线且满足

$$x_2(0) = x_2(x_1(0); \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon}), h(0) = h(x_1(0); \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon}),$$

$$\gamma(0) = \gamma(x_1(0); \bar{h}, \bar{\gamma}, \mu, \sqrt{\varepsilon})$$

即轨线从纤维的基点 $(\bar{h}, \bar{\gamma})$ 开始,且

$$|(x(t), h(t), \gamma(t)) - [\boldsymbol{x}_\varepsilon(\Gamma + \sqrt{\varepsilon}\bar{h}(t), \bar{\gamma}(t), \mu), \bar{h}(t), \bar{\gamma}(t)]| \leqslant Ce^{-\lambda t}$$

$\forall t > 0$,某常数 $C, \lambda > 0, (\bar{h}(t), \bar{\gamma}(t)) \in \mathscr{A}_\varepsilon$。

换言之,从稳定纤维出发的轨线渐近于 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 中的轨线,它从这条纤维的基点开始,只要通过这个基点的轨线保留在 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 中。

(5) 纤维族形成一个不变族:在时间流的映照下,纤维映照为纤维。解析地看,若设$(x_1(t),x_2(t),h(t),\gamma(t))$满足

$$x_2(0) = x_2(x_1(0);\bar{h},\bar{\gamma},\mu,\sqrt{\epsilon}),$$

$$h(0) = h(x_1(0);\bar{h},\bar{\gamma},\mu,\sqrt{\epsilon}),$$

$$\gamma(0) = \gamma(x_1(0);\bar{h},\bar{\gamma},\mu,\sqrt{\epsilon})$$

则

$$x_2(t) = x_2(x_1(t),\bar{h}(t),\bar{\gamma}(t),\mu,\sqrt{\epsilon})$$

$$h_2(t) = h(x_1(t),\bar{h}(t),\bar{\gamma}(t),\mu,\sqrt{\epsilon})$$

$$\gamma(t) = \gamma(x_1(t),\bar{h}(t),\bar{\gamma}(t),\mu,\sqrt{\epsilon})$$

(6) 当$\epsilon=0$时,未扰动纤维对应于未扰动异宿轨道,因此扰动与未扰动纤维是C^r的且$\sqrt{\epsilon}$逼近。

证:直接来自 Femichel 的结果[39,40,41]。

附注1:可得到对于$W^u(\mathcal{A}_\epsilon)$纤维的同样的结果。

附注2:解是纤维的拟线性偏微分方程能被得到,这些方程是类似于定理4.2.1中给定的方程。

命题 4.2.5 $W^u_{loc}(p_\epsilon)$为C^r,ϵ接近于$W^u_{loc}(p_0)$。

证:这个结果来自通常的不稳定流形定理的一般化,因为p_0不是双曲的,通常的结论需要做一些改进[141]。

4.3 连接 p_ϵ 的同宿轨道的存在性

我们将用几何结构发展起来的方法证明我们的主要结果:相连于共振域内不动点p_ϵ的同宿轨道的存在性。这个证明分两步,第一步证明,$W^u(p_\epsilon)\subset W^s(\mathcal{A}_\epsilon)$。粗略地讲,在$W^u(p_\epsilon)$中轨线从环$\mathcal{A}_\epsilon$的一个邻域离开又回到这个环面上。第二步我们证明这条轨线实际上在$t\to\infty$时渐近于p_ϵ。第一步涉及一个逼近,它类似于高维 Melnikov 理论。第二步涉及$W^s(\mathcal{A}_\epsilon)$的纤维并要求从第一步推出在$W^u(p_\epsilon)$中的轨线渐近于$\mathcal{A}_\epsilon$中的轨线,这条轨线不必在$p_\epsilon$的吸引域内。

4.3.1 $W^u(p_\epsilon)\subset W^s(\mathcal{A}_\epsilon)$:高维 Melnikov 理论

我们的目的是考察$W^u(p_\epsilon)$是否和$W^s(\mathcal{A}_\epsilon)$相交。

第一步,对于未扰动系统,发展一单参数的未扰动同宿轨道,再置"同宿坐标"的运动系在同宿流形上。

未扰动异宿轨道在$W^s(\mathcal{A}_0)\cap W^u(\mathcal{A}_0)$中的参数化已在前面4.1.2节中给出。固定$I=\Gamma$,$\gamma_0=\int_{-\infty}^{0}D_IH(x^h(s,\Gamma),\Gamma)ds+\gamma_c(\mu_0)$,此时$\gamma(-\infty,\Gamma,\gamma_0)=\gamma_c(\mu_0)$。余下来的坐标在$W^u(p_0)$参数化中为$t_0$,$t_0$沿$W^u(p_0)$运动。

$\epsilon=0$时,一维$W^u(p_0)$位于三维$W^s(\mathcal{A}_0)$中。我们将决定在什么条件下,对于扰动问题,这种情况仍然成立。我们利用发展起来的相应扰动流形之间距离的扰动测度方法来做这件事。距离测度利用了作为可积结构基础的整体几何学。特别地,让$p=(x^h(-t_0,\Gamma),\Gamma,\gamma(-t_0,\Gamma,\gamma_0))$表示$W^u(p_0)\cap W^s(\mathcal{A}_0)$的特殊点。考虑在$p$点的三维超平面$\Pi_p$,它是由向量$\boldsymbol{n}(p)=(D_xH(p),D_IH(p)-D_I(\tilde{x}_0(\Gamma),\Gamma),0)$,$\hat{\boldsymbol{I}}$和$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$所张成,这里$\hat{\boldsymbol{I}}$和$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$分别表示$I$和$\gamma$方向的单位向量,$\boldsymbol{n}(p)$表示$\Gamma$在$P$点的法向量。变化$t_0\in R$使之在超平面上运动到$W^u(p_0)\cap W^s(\mathcal{A}_0)$的所有点。$W^u(p_0)$在每一点上与超平面相交,横截相交于一点上,$W^s(\mathcal{A}_0)$横截相交于超平面于二维曲面上的每一点(见图4.3.1)。我们研究$W^u(P_\epsilon)$和$W^s(\mathcal{A}_\epsilon)$在点$\in\Pi_p$之间的距离测度。

第二步,$W^u(p_\epsilon)$和$W^s(\mathcal{A}_\epsilon)$的不变性,以及这些流形和$\Pi_p$横截相交的不变性。

对ϵ充分小,$W^u(p_0)$和$W^s(\mathcal{A}_0)$不变,$W^u(p_\epsilon)$,$W^s(\mathcal{A}_\epsilon)$也保持。进一步,$W^u_{loc}(p_0)$,$W^s_{loc}(\mathcal{A}_0)$为$C^r$且分别$\epsilon$-逼近于$W^u_{loc}(p_\epsilon)$和$W^s_{loc}(\mathcal{A}_\epsilon)$。利用简单的 Gronwall 估计,易知在$\mathcal{A}_0$的邻域之外,$W^u(p_0)$中的轨线$\epsilon$逼近于$W^u(p_\epsilon)$的轨线(有限时间间隔)。进一

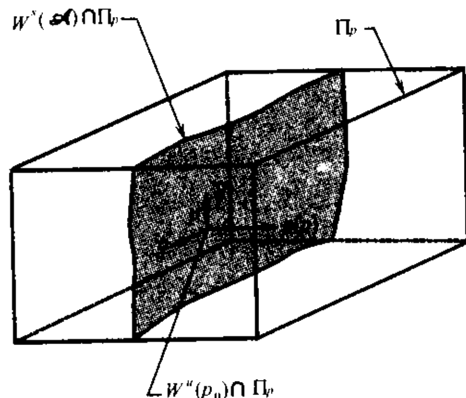


图 4.3.1　未扰动系统中的同宿坐标

步，由横截相交的不变性，在 $\mathscr{M}_0$ 的邻域之外，在每点 $p=(x^h(-t_0,I^\gamma),I^\gamma,\gamma(-t_0,I^\gamma,\gamma_0))\in W^u(p_0)\cap W^s(\mathscr{M}_0)$，$W^u(p_\varepsilon)$ 横截相交于 Π_p 的一点。$W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$ 在一个二维曲面上与 Π_p 横截相交（见图 4.3.2）。

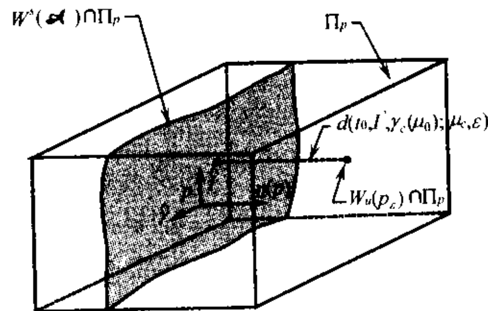


图 4.3.2　扰动系统中流形的分裂测度

第三步，得到 Melnikov 函数和几何解释。

已知 $W^u(p_\varepsilon)$ 和 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$ 之间在点 $p(x^h(-t_0,I^\gamma),I^\gamma,\gamma(-t_0,I^\gamma,\gamma_0))\in\Pi_p$ 的距离为

$$d(t_0,I^\gamma,\gamma_c(\mu_0);\mu_0,\varepsilon)=\frac{\varepsilon M(t_0,I^\gamma,\gamma_c(\mu_0);\mu_0)}{\|\boldsymbol{n}(p)\|}+O(\varepsilon^2)$$

其中

$$\begin{aligned}M(t_0,I^\gamma,\gamma_c(\mu_0);\mu_0)=&\int_{-\infty}^{\infty}(\langle D_xH,g^x\rangle+(D_IH)(g^I))\cdot\\&(q_0(t-t_0,I^\gamma,\gamma_c(\mu_0)),\mu_0,0)\mathrm{d}t-\\&(D_IH(x_0(I^\gamma),I^\gamma))\cdot\\&\int_{-\infty}^{\infty}g^I(q_0(t-t_0,I^\gamma,\gamma_c(\mu_0)),\mu_0,0)\mathrm{d}t\\q_0(t-t_0,I^\gamma,\gamma_c(\mu_0))=&(x^h(t-t_0,I^\gamma),I^\gamma,\gamma(t-t_0,I^\gamma,\gamma_0)=\\&\int_{-\infty}^{t-t_0}D_IH(x^h(s,I^\gamma),I^\gamma)\mathrm{d}s+\gamma_c(\mu_0))\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

这是用标准的 Melnikov 技巧得到的。关于 Melnikov 函数的如下特征值得注意：

(1) 若在式(4.3.1)中，$t\to t+t_0$，则 t_0 不再出现于 Melnikov 函数。

(2) 如果一维 $W^u(p_\varepsilon)$ 和三维 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$ 相交于一个点上，由解的惟一性定理，它们必须相连在一维轨道上。因 $W^u(p_\varepsilon)$ 是不变的，这就推出 $W^u(p_\varepsilon)$ 被包含在 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$ 中。

定理 4.3.1　设在 $\mu=\mu_0$ 上式(4.2.14)成立，且

(1) $M(I^\gamma,\gamma_c(\mu_0),\mu_0)=0$,

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}M(I^\gamma,\gamma_c(\mu_0),\mu_0)$ 具有秩 1，

则 $W^u(p_\varepsilon)\subset W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$。

4.3.2　$W^u(p_\varepsilon)\cap W^s(p_\varepsilon)$：$p_\varepsilon$ 的一条同宿轨道

设 $W^u(p_\varepsilon)\subset W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$，则由命题 4.2.5 可知存在点

$$\hat{p}_\varepsilon=\partial U^\delta\cap W^u_{\mathrm{loc}}(p_\varepsilon),\quad \hat{p}_0=\partial U^\delta\cap W^u_{\mathrm{loc}}(p_0)$$

使得

$$|\hat{p}_\varepsilon-\hat{p}_0|=O(\sqrt{\varepsilon})$$

如图 4.3.3 所示。因 $W^u(p_\varepsilon)\subset W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$，在 $t=0$ 时通过点 $\hat{p}_\varepsilon$ 的轨线将回到 U^δ(在某些有限飞行时间之后)。标记此点为

$$p_\varepsilon^T \equiv \partial U^\delta \cap W^u(p_\varepsilon)$$

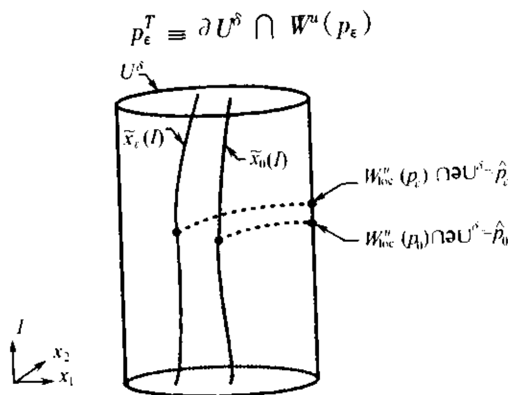


图 4.3.3　离开 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的一个邻域的轨线(离开点为 $\hat{p}_\varepsilon$ 和 $\hat{p}_0$)

对于未扰动问题必有

$$p_0^T = \partial U^\delta \cap W^u(p_0)$$

因为从 ∂U^δ 到 ∂U^δ 的飞行时间是有限的，易由简单的 Gronwall 型估计得到

$$|\,p_0^T - p_\varepsilon^T\,| = O(\sqrt{\varepsilon})$$

如图 4.3.4 所示。

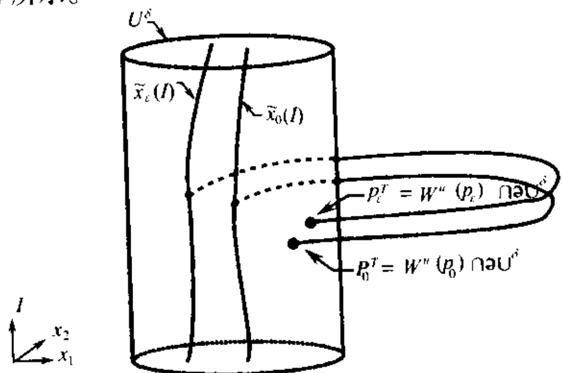


图 4.3.4　返回 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的一个邻域的轨线(回到点 p_ε^T 和 p_0^T)

我们已经证明了存在一条轨道，它离开 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的邻域，然后又回到 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 的邻域，其中利用了法向双曲不变流形的扰动理论和广义 Melnikov 型分析。下面要证明这条轨线当 $t\to\infty$ 时渐近于 p_ε。为此，我们必须利用纤维。从定理 4.2.4 和定理 4.3.1，知 p_0^T 和 p_ε^T 在纤维上，分别标记这些纤维的基点为 p_0^∞ 和 p_ε^∞。由定理 4.3.1

$$|\,p_0^\infty - p_\varepsilon^\infty\,| = O(\sqrt{\varepsilon})$$

进一步，在 p_0^∞ 的 h-γ 坐标上，有

$$p_0^\infty \equiv (0,\gamma^\infty(\mu_0)) = (0,\gamma_c(\mu_0)+\Delta\gamma)$$

其中 $\Delta\gamma$ 为式(4.1.8)所给定。现在在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 中，p_ε 的吸引域为相连于 q_0 的 Hamilton 水平集所近似(引理 4.2.3)。进一步，在 h-γ 坐标下，由 Hamilton 的水平集所围成的面积为 $O(1)$。因此，从定理 4.2.4，对 ε 充分小，如果 P_0^∞ 被包含在相连 q_0 的闭同宿轨道之内(q_0 与闭同宿轨道的距离为 $O(1)$)，p_ε^∞ 在 $t\to\infty$ 时渐近逼近于 p_ε，则从定理 4.3.1 知，通过 p_ε^T 的轨线渐近逼近于 $p_\varepsilon(t\to\infty)$，如图 4.3.5 所示。

这种情况可直接进行验证，从前面可知，相连 q_0 的同宿轨道为

$$\mathscr{H}(h,\gamma,\mu) - \mathscr{H}(0,\gamma_s(\mu_0),\mu_0) = 0$$

这条曲线所界区域像一条“鱼”。角度值 γ，这条鱼的尾巴在 $\gamma=\gamma_s(\mu_0)$ 上，鱼的鼻子位于 $\gamma=\gamma_n(\mu_0)$，其中 $\gamma_n(\mu_0)$ 为方程

$$\mathscr{H}(0,\gamma,\mu_0) - \mathscr{H}(0,\gamma_s(\mu_0),\mu_0) = 0$$

的解。在图 4.3.6 中，我们解释四种最一般的可能性$(a)\sim(d)$。

定理 4.3.2　设在 $\mu=\mu_0$ 时假设 3 和式(4.2.14)成立，且

(1) $M(\Gamma,\gamma_c(\mu_0),\mu_0)=0$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}M(\Gamma,\gamma_c(\mu_0),\mu_0)$具有秩 1。

如下情况之一满足：

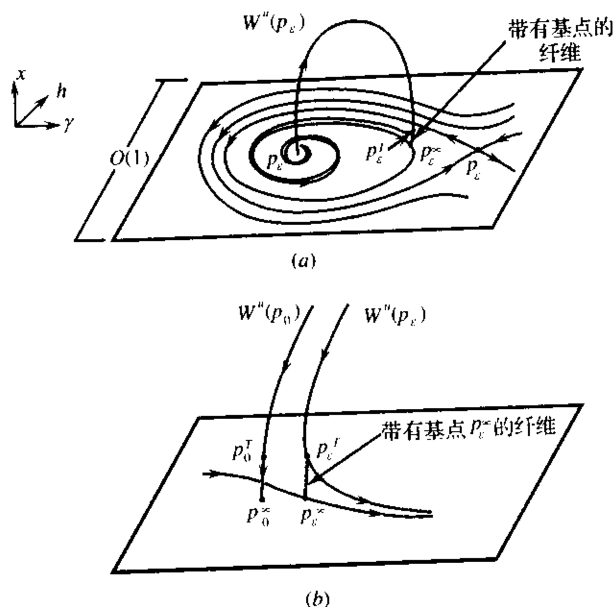


图 4.3.5 在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 邻域内一条轨线的返，它同宿到 $p_\varepsilon(a)$ 扰动和未扰动纤维(b)

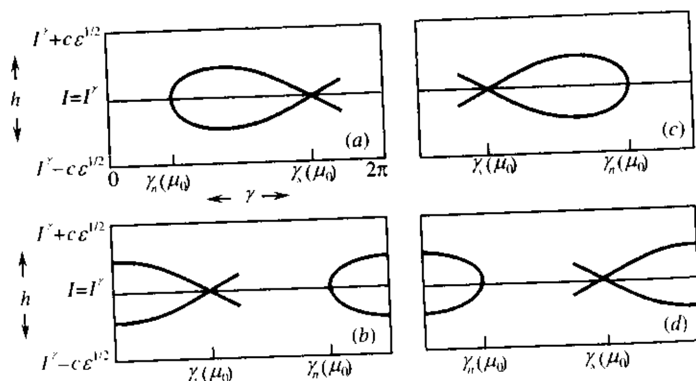


图 4.3.6 在 $\mathcal{M}_0$ 上与 p_0 连接的未扰动同宿轨道的可能几何结构

(a) $\gamma_n(\mu_0)<\gamma^\infty(\mu_0)<\gamma_s(\mu_0)$

(b) $0\leqslant\gamma^\infty(\mu_0)<\gamma_s(\mu_0)$或 $\gamma_n(\mu_0)<\gamma^\infty(\mu_0)\leqslant 2\pi$

(c) $\gamma_s(\mu_0)<\gamma^\infty(\mu_0)<\gamma_n(\mu_0)$

(d) $0\leqslant\gamma^\infty(\mu_0)<\gamma_n(\mu_0)$或 $\gamma_s(\mu_0)<\gamma^\infty(\mu_0)<2\pi$

则(0.1)具有"简单的"相连于 p_ε 的同宿轨道。进一步，如(1)不成立，则不存在相连于 p_ε 的同宿轨道。如(1)和(2)中适当的(a)～(d)角不等式不成立，则不存在"简单的"相连于 p_ε 的同宿轨道。

4.4 混沌：Silnikov 定理

同宿轨道的扰动是产生混沌(依 Smale 马蹄意义下)的一般机制。相连于不动点的同宿轨道在自治常微分方程中能或不能产生混沌动力学，对于不动点的稳定性附加条件是必要的(特别，有关稳定和不稳定流形的维数)以及稳定不稳定流形相交的几何性质(相交面的维数)有关。

定理 4.4.1 考虑四维自治 $C^r(r\geqslant 3)$常微分方程，具有双曲不动点相连于同宿轨道，设在不动点线性化的矩阵具有形式

$$\begin{pmatrix} -\rho & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

其中 $\rho,\lambda>0,\omega\neq 0,\nu>0,\nu>\rho,\lambda\neq\nu$。则一个三维 Poincaré 映照(它为充分接近于同宿轨道所确定)具有不变 Cantor 集，在其上拓扑共轭于符号可数集的平移。

关于这个定理的几点评注：

(1) 从定理假设中，可看出不动点具有一个三维稳定流形和一维不稳定流形。

(2) 在我们的问题中，$-\rho\pm i\omega$ 表示向量场的特征值，限制在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 上。由此可知，$-\rho$ 和 ω 为 $O(\varepsilon)$特征值。$-\lambda$ 和 ν 表示横截

于 $\mathscr{C}_\varepsilon$ 的线性增长率，同时 $-\lambda$ 是 $O(1)$的，进而有 $\nu>\rho>0$。我们仅需验证 $\lambda\neq\nu$，而这也是清楚的。

(3) 如系统稍微扰动一下，同宿轨道破裂，则 Poincaré 映照具有一个不变 Cantor 集，在其上拓扑共轭于有限数符号的整个平移。这种混沌在扰动下是稳定的。

(4) 如 $\lambda>\nu$，则在 Poincaré 映照的不动 Cantor 集上的轨道具有一个正的 Lyapunov 指数和两个负的 Lyapunov 指数。如 $\lambda<\nu$，则轨线具有两个正的 Lyapunov 指数和一个负的 Lyapunov 指数。

(5) 存在其他可能的产生混沌的机制。例如相连于 q_ε 的同宿轨道(它具有二维稳定与不稳定流形)如同含有 p_ε 和 q_ε 的异宿圈。

4.5 在具外力、阻尼项非线性 Schrödinger 方程中的应用

考虑二模近似具阻尼、外力项的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -i\dot{c}+\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|b|^2-1\right)c+\\ \quad\frac{1}{2}(cb^*+c^*b)b=i\varepsilon\alpha c+i\varepsilon\Gamma\\ -i\dot{b}+\left[\frac{1}{2}|c|^2+\frac{3}{4}|b|^2-(1+k^2)\right]b+\\ \quad\frac{1}{2}(cb^*+c^*b)c=i\varepsilon\beta b\end{cases}\tag{4.5.1a}$$

在式(4.5.1a)中让 $\varepsilon=0$ 得到未扰动方程组

$$\begin{aligned} &-i\dot{c}+\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|b|^2-1\right)c+\frac{1}{2}(cb^*+c^*b)b=0\\ &-i\dot{b}+\left[\frac{1}{2}|c|^2+\frac{3}{4}|b|^2-(1+k^2)\right]b+\\ &\frac{1}{2}(cb^*+c^*b)c=0\end{aligned}\tag{4.5.1b}$$

直接验证知，未扰动方程组具有如下两个守恒积分

$$\begin{aligned} H_0=&\frac{1}{8}|c|^4+\frac{1}{2}|b|^2|c|^2+\\ &\frac{3}{16}|b|^4-\frac{1}{2}(1+k^2)|b|^2-\\ &\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{8}(b^2c^{*2}+b^{*2}c^2)\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

$$I=\frac{1}{2}(|c|^2+|b|^2)\tag{4.5.3}$$

未扰动系统具有下面的 Hamilton 形式

$$\dot{c}=-2i\frac{\partial H}{\partial c^*},\quad \dot{b}=-2i\frac{\partial H}{\partial b^*}\tag{4.5.4}$$

显然，在如下坐标变换下

$$(c,b)\to(-c,b),(c,b)\to(c,-b),(c,b)\to(c,b)e^{i\chi}\tag{4.5.5}$$

未扰动方程组是不变的，其中 χ 为任意实数。

方程组(4.5.1)不具有(0.1)形式，在(0.1)形式下我们的理论可以应用。因此，引入如下坐标变换

$$c=|c|e^{i\gamma},\quad b=(x+iy)e^{i\gamma}\tag{4.5.6}$$

在这些坐标之下，未扰动方程组变为

$$\begin{cases}\dot{x}=-k^2y-\frac{3}{4}x^2y+\frac{1}{4}y^3=\frac{\partial H_0}{\partial y}\\ \dot{y}=(k^2-2I)x+\frac{7}{4}x^3+\frac{3}{4}xy^2=-\frac{\partial H_0}{\partial x}\\ \dot{I}=0=\frac{\partial H_0}{\partial\gamma}\\ \dot{\gamma}=1-I-x^2=-\frac{\partial H_0}{\partial I}\end{cases}\tag{4.5.7a}$$

守恒积分为

$$H_0 = \frac{1}{2}I^2 - I - \frac{7}{16}x^4 - \frac{3}{8}x^2y^2 + \frac{1}{16}y^4 + \left(I - \frac{1}{2}k^2\right)x^2 - \frac{1}{2}k^2y^2$$

和 I。

扰动方程组为

$$\begin{cases} \dot{x} = -k^2y - \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y^3 + \varepsilon\left[\Gamma\frac{y}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}}\sin\gamma - \beta x\right] \\ \dot{y} = (k^2 - 2I)x + \frac{7}{4}x^3 + \frac{3}{4}xy^2 - \varepsilon\left[\Gamma\frac{x}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}}\sin\gamma + \beta y\right] \\ \dot{I} = -\varepsilon[\Gamma\sqrt{2I - x^2 - y^2}\cos\gamma + (\beta - \alpha)(x^2 + y^2) + 2\alpha I] \\ \dot{\gamma} = 1 - I - x^2 + \varepsilon\Gamma\frac{1}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}}\sin\gamma \end{cases} \tag{4.5.7b}$$

具有一般形式

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial y} - \varepsilon\beta x \\ \dot{y} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial x} - \varepsilon\beta y \\ \dot{I} = \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - 2\varepsilon\alpha I - \varepsilon(\beta - \alpha)(x^2 + y^2) \\ \dot{\gamma} = -\frac{\partial H_0}{\partial I} - \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial I} \end{cases} \tag{4.5.8}$$

这里

$$H_1 = -\Gamma\sqrt{2I - x^2 - y^2}\sin\gamma$$

4.5.1 未扰动可积结构

我们要证明式(4.5.7a)具有不变流形结构，为此考虑式(4.5.7a)的 x-y 分量，可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = -k^2y - \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y^3 \\ \dot{y} = (k^2 - 2I)x + \frac{7}{4}x^3 + \frac{3}{4}xy^2 \end{cases} \tag{4.5.9}$$

注意到式(4.5.9)对一切 I 的值有一个不动点$(x,y)=(0,0)$，这是对称性的结果，由式(4.5.5)给出。简单的线性分析表明$(x,y)=(0,0)$对于 $I>k^2/2$ 是鞍点。进一步对 Hamilton 水平集进行考察，它含有原点，且由 $H(x,y,I)-H(0,0,I)=0$ 给出。它表明在此范围里对于每一个 I，原点具有一对对称同宿轨道。因此，我们有

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,I,\gamma)\mid_{x=y=0}, I > \frac{1}{2}k^2\right\} \tag{4.5.10}$$

和

$$W^s(\mathcal{M}) \cap W^u(\mathcal{M}) = \{(x,y,I,\gamma) \mid H(x,y,I) - H(0,0,I) = 0\} \tag{4.5.11}$$

由式(4.5.5)的对称性表明，从一条同宿轨道推出一对同宿轨道。在图 4.5.1 中，我们注意到式(4.5.9)在相平面中的像是 I 的函数，同时在 $I=4k^2$ 处，一个和相连于原点的同宿轨道相关的整体分叉产生了。在图 4.5.2 中，仅仅表明了不变流形结构对我们是重要的。

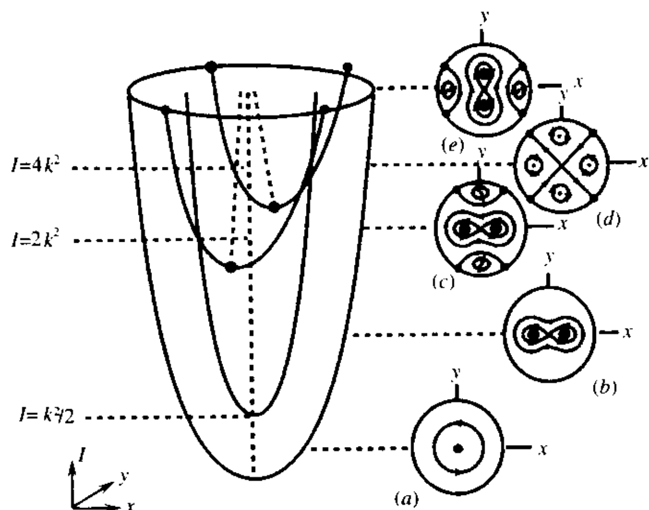


图 4.5.1 式(4.5.9)的相图,注意在 $I=4k^2$ 分叉

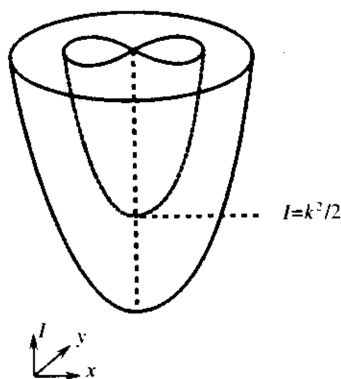


图 4.5.2 不变流形结构

4.5.1.1 同宿轨道的分析表示

在计算 Melnikov 函数时,重要的是要有同宿轨道的分析表达式,它和原点相连且作为 I 的函数。令

$$x + iy = \sqrt{2B}e^{i\theta} \tag{4.5.12}$$

在这些坐标下,未扰动方程(4.5.7a)变成

$$\begin{cases} \dot{B} = -2B(I-B)\sin 2\theta \\ \dot{\theta} = k^2 - I(1+\cos 2\theta) + B\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta\right) \\ \dot{I} = 0 \\ \dot{\gamma} = 1 - I - B(1+\cos 2\theta) \end{cases} \tag{4.5.13}$$

Hamilton 量 H_0 变换为

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{2}I^2 - I - \frac{3}{4}B^2 + (I-k^2)B + B(I-B)\cos 2\theta \tag{4.5.14}$$

由连续性,Hamilton 在同宿轨道(同宿于 $\mathcal{M}$)的值是同于这个 Hamilton 在 $\mathcal{M}$ 上的值,它为 $\frac{1}{2}I^2 - I$。令式(4.5.14)等于这个值,并消去公共因子 B,可得

$$B = I - \frac{4k^2 - I}{3 + 4\cos 2\theta} \tag{4.5.15}$$

将式(4.5.15)代入式(4.5.13)中 θ 的分量,给出 θ 在同宿轨道上的方程

$$\dot{\theta} = I(1+\cos 2\theta) - k^2 \tag{4.5.16}$$

其次,令

$$\psi = \gamma + \theta \tag{4.5.17}$$

再加上式(4.5.16)和式(4.5.13)中 $\dot{\gamma}$ 的分量可得 $\dot{\psi}$ 在同宿轨道上的如下方程

$$\dot{\psi} = 1 - I - \frac{1}{4}B \tag{4.5.18}$$

方程式(4.5.15)、式(4.5.16)和式(4.5.18)提供我们必要(充分简单)的求解同宿轨道的关系。方程(4.5.16)能直接积分得到在同宿轨道上的 $\theta(t)$。利用这个结果能从式(4.5.15)得到 $B(t)$,由式(4.5.12)可得到 $x(t)$,$y(t)$,由式(4.5.18)直接积分能得到在同宿轨道上的 $\psi(t)$,从式(4.5.17)能得到 $\gamma(t)$。在计算这些积分时,

分两种情况讨论：$I > 4k^2$ 和 $\frac{1}{2}k^2 < I < 4k^2$。

$I > 4k^2$，具初始条件 $\theta(t=0) = \frac{1}{2}\pi, \psi(t=0) = \psi_0$，此时有

$$B = \frac{4k^2(2I - k^2)}{(I - 4k^2)\cosh(2k\sqrt{2I - k^2}t) + I + 3k^2} \tag{4.5.19}$$

$$\cos\theta = \frac{k}{\sqrt{2I - k^2}}\tanh(k\sqrt{2I - k^2}t) \tag{4.5.20}$$

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{7k^2}{2I - k^2}}\tanh(k\sqrt{2I - k^2}t)\right) + (1 - I)t + \psi_0 \tag{4.5.21}$$

$\frac{1}{2}k^2 < I < 4k^2$，具初始条件 $\theta(t=0) = 0, \psi(t=0) = \psi_0$，此时有

$$B = \frac{4k^2(2I - k^2)}{(4k^2 - I)\cosh(2k\sqrt{2I - k^2}t) + I + 3k^2} \tag{4.5.22}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2I - k^2}}{k}\tanh(k\sqrt{2I - k^2}t) \tag{4.5.23}$$

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{2I - k^2}{7k^2}}\tanh(k\sqrt{2I - k^2}t)\right) + (1 - I)t + \psi_0 \tag{4.5.24}$$

4.5.1.2 同宿轨道同宿于不动点圆

从式(4.5.7a)和式(4.5.10)可知未扰动方程限制在 μ 上为

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\gamma} = 1 - I \tag{4.5.25}$$

因此，式(4.5.25)具有一个共振 $I = 1$。前面已讨论过，这个共振作为 μ 上的不动点圆，是清楚的，我们想用同宿轨道的表达式去计算位相差 $\Delta\gamma$。

$0 < k < \frac{1}{2}$，从式(4.5.20)、式(4.5.21)取 $I = 1$ 得

$$\psi(-\infty) = \frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{7k^2}{2 - k^2}}\right) + \psi_0 \tag{4.5.26}$$

$$\psi(\infty) = -\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{7k^2}{2 - k^2}}\right) + \psi_0 \tag{4.5.27}$$

$$\theta(-\infty) = \pi - \mathrm{arccot}\left(\frac{k}{\sqrt{2 - k^2}}\right) \tag{4.5.28}$$

$$\theta(\infty) = \mathrm{arccot}\left(\frac{k}{\sqrt{2 - k^2}}\right) \tag{4.5.29}$$

利用式(4.5.17)得

$$\gamma(-\infty) = \gamma_0 - \frac{1}{2}\pi + \mathrm{arccot}\left(\frac{k}{\sqrt{2 - k^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{7k^2}{2 - k^2}}\right) \tag{4.5.30}$$

$$\gamma(+\infty) = \gamma_0 + \frac{1}{2}\pi - \mathrm{arccot}\left(\frac{k}{\sqrt{2 - k^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{7k^2}{2 - k^2}}\right) \tag{4.5.31}$$

因此有

$$\Delta\gamma \equiv \gamma(+\infty) - \gamma(-\infty) = \pi - 2\mathrm{arccot}\left(\frac{k}{\sqrt{2 - k^2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{7k^2}{2 - k^2}}\right) \tag{4.5.32}$$

在图 4.5.3 中，我们画 $\Delta\gamma$ 作为 k 的函数(对应于这种情况)。从图中可以看出，$\Delta\gamma$ 是单调函数，当 $k \to 0$ 时 $\Delta\gamma \to 0$；当 $k \to 1/2$ 时，$\Delta\gamma \to -\infty$。

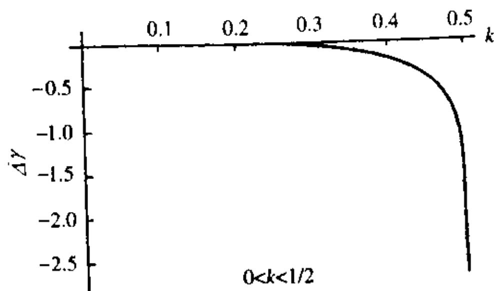


图 4.5.3　$\Delta\gamma$ 作为 k 的函数图形，$0<k<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<k<\sqrt{2}$，此时，利用式(4.5.23)、式(4.5.24)取 $I=1$ 给出

$$\psi(-\infty)=\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{2-k^2}{7k^2}}\right)+\psi_0 \tag{4.5.33}$$

$$\psi(\infty)=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{2-k^2}{7k^2}}\right)+\psi_0 \tag{4.5.34}$$

$$\theta(-\infty)=-\arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right) \tag{4.5.35}$$

$$\theta(\infty)=\arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right) \tag{4.5.36}$$

利用式(4.5.17)得

$$\gamma(-\infty)=\gamma_0+\arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right)+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{2-k^2}{7k^2}}\right) \tag{4.5.37}$$

$$\gamma(\infty)=\gamma_0-\arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right)-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{2-k^2}{7k^2}}\right) \tag{4.5.38}$$

因此有

$$\Delta\gamma=\gamma(+\infty)-\gamma(-\infty)=-2\arctan\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right)-\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{2-k^2}{7k^2}}\right) \tag{4.5.39}$$

在图 4.5.4 中，画出了 $\Delta\gamma$ 作为 k 的函数(对应这种情况)。由图中可以看出 $\Delta\gamma$ 为单调函数，当 $k\to\frac{1}{2}$ 时，$\Delta\gamma\to-\infty$；当 $k\to\sqrt{2}$ 时，$\Delta\gamma\to0$，且函数永远是负的。

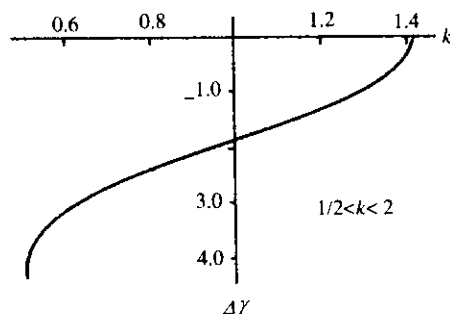


图 4.5.4　$\Delta\gamma$ 作为 k 的函数图形，$\frac{1}{2}<k<\sqrt{2}$

4.5.2　在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上靠近共振的动力学

我们考虑扰动向量场限制在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上靠近 $I=1$ 的动力学。对于这个例子，因为 $x=y=0$ 在扰动下是不变的，则扰动法向双曲不变流形和未扰动流形正好一致。因此，在 4.2 节中的一般性理论可以简化。考虑扰动向量场式(4.5.7b)限制在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 上为

$$\begin{cases}\dot{I}=-\varepsilon(\Gamma\sqrt{2I}\cos\gamma+2\alpha I)\\ \dot{\gamma}=1-I+\dfrac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{2I}}\sin\gamma\end{cases} \tag{4.5.40}$$

我们关心式(4.5.40)靠近 $I=1$ 的动力学,即环面在中心为 $I=1$ 的柱面上(关于 $I-\gamma$ 坐标),引入变换 $I=1+\sqrt{\varepsilon}h$, $\tau=\sqrt{\varepsilon}t$, 在 $\sqrt{\varepsilon}=0$处依$\sqrt{\varepsilon}$作 Taylor 展开,则方程(4.5.40)变为

$$\begin{aligned} h' &= -\sqrt{2}\Gamma\cos\gamma - 2\alpha - \\ &\quad \sqrt{\varepsilon}\left(2\alpha + \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}\cos\gamma\right)h + O(\varepsilon) \\ \gamma' &= -h + \sqrt{\varepsilon}\frac{\Gamma}{\sqrt{2}}\sin\gamma + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.5.41}$$

这里"′"表示对 τ 的微分。

令 $\varepsilon\to 0$,式(4.5.41)变为

$$h' = -\sqrt{2}\Gamma\cos\gamma - 2\alpha, \quad \gamma' = -h \tag{4.5.42}$$

方程(4.5.42)正好是一个有一个常数转矩的摆的方程。对应的 Hamilton 函数为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}h^2 - \sqrt{2}\Gamma\sin\gamma - 2\alpha\gamma \tag{4.5.43}$$

简单分析表明,式(4.5.42)具有两个不动点,它的坐标必须满足

$$h = 0, \quad \cos\gamma = -\sqrt{2}\frac{\alpha}{\Gamma} \tag{4.5.44}$$

因此,在(h,γ)坐标中,两个不动点为

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(0, \pi - \arccos\sqrt{2}\frac{\alpha}{\Gamma}\right), \\ q_0 &= \left(0, \pi + \arccos\sqrt{2}\frac{\alpha}{\Gamma}\right) \end{aligned} \tag{4.5.45}$$

其中 p_0 为中心,q_0 为鞍点,这两个不动点在 $\alpha=\Gamma/\sqrt{2}$处结合为鞍一结点分叉。进一步,鞍点有同宿轨道相连自己。图 4.5.5 为式(4.5.42)的相图。图 4.5.6 为方程(4.5.41)的相图。

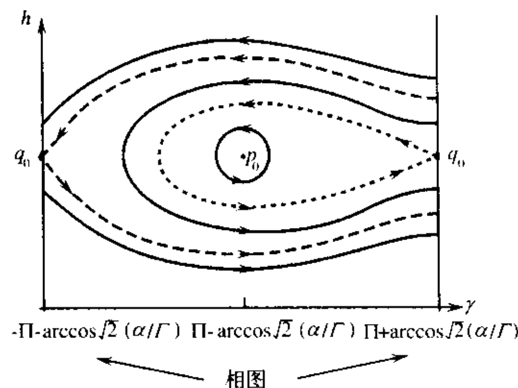


图 4.5.5 方程组(4.5.42)的相图

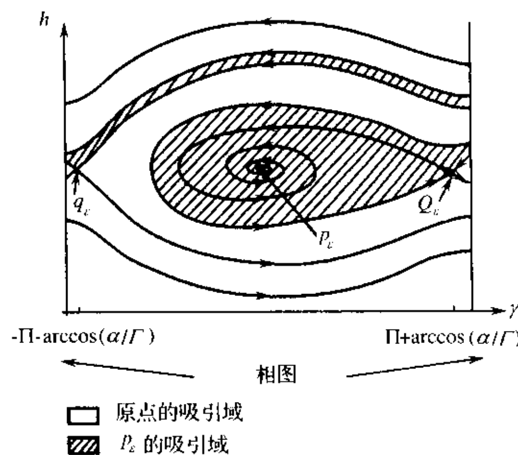


图 4.5.6 方程组(4.5.41)的相图

4.5.3 Melnikov 函数的计算

由式(4.3.1),Melnikov 函数的积分为

$$\frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial H_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial H_0}{\partial I}(x,y,I) - \frac{\partial H_0}{\partial I}(0,0,I)\right)\frac{\partial H_1}{\partial \gamma} -$$

$$\beta\left(x\frac{\partial H_0}{\partial x} + y\frac{\partial H_0}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial H_0}{\partial I}(x,y,I) - \frac{\partial H_0}{\partial I}(0,0,I)\right)\cdot$$

$$[2\alpha I+(\beta-\alpha)(x^2+y^2)] \tag{4.5.46}$$

简单计算给出

$$\frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial H_1}{\partial y}-\frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial H_1}{\partial x}=-\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial H_1}{\partial \gamma}\frac{\partial H_0}{\partial I} \tag{4.5.47}$$

其中已用到 $\dot{I}=0$，于是 Melnikov 函数简化为

$$-\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial H_0}{\partial I}(0,0,I)\frac{\partial H_1}{\partial \gamma}-\beta(\dot{x}y-\dot{y}x)-\left(\frac{\partial H_0}{\partial I}(x,y,I)-\frac{\partial H_0}{\partial I}(0,0,I)\right)\cdot[2\alpha I+(\beta-\alpha)(x^2+y^2)] \tag{4.5.48}$$

其中，我们用到了

$$\dot{x}=\frac{\partial H_0}{\partial y},\ \dot{y}=-\frac{\partial H_0}{\partial x}$$

让 $I=1$，有$\frac{\partial H_0}{\partial I}(0,0,I)=0$，式(4.5.48)变为

$$-\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t}+\beta(x\dot{y}-y\dot{x})+2\alpha\dot{\gamma}+(\beta-\alpha)(x^2+y^2)\dot{\gamma} \tag{4.5.49}$$

其中用到了

$$\dot{\gamma}=-\frac{\partial H_0}{\partial I}$$

现积分式(4.5.49)，围绕着未扰动异宿轨道(在 $I=1$，且轨道在 $t\to-\infty$时渐近于 p_0)。我们分别考察式(4.5.49)中的每一项。

式(4.5.49)的第一项能被直接积分

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\Gamma[\sin\gamma(+\infty)-\sin\gamma(-\infty)] \tag{4.5.50}$$

因 $\Delta\gamma\equiv\gamma(+\infty)-\gamma(-\infty)$，由式(4.5.50)可得

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\Gamma[\sin\gamma(-\infty)(\cos\Delta\gamma-1)+\cos\gamma(-\infty)\sin\Delta\gamma] \tag{4.5.51}$$

从式(4.5.44)和式(4.5.45)有

$$\begin{cases}\sin\gamma(-\infty)=\sqrt{1-2\left(\frac{\alpha}{\Gamma}\right)^2}\\ \cos\gamma(-\infty)=-\sqrt{2}\frac{\alpha}{\Gamma}\end{cases} \tag{4.5.52}$$

代人式(4.5.51)得

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\Gamma\left[\sqrt{1-2\left(\frac{\alpha}{\Gamma}\right)^2}(\cos\Delta\gamma-1)-\sqrt{2}\frac{\alpha}{\Gamma}\sin\Delta\gamma\right] \tag{4.5.53}$$

容易看到式(4.5.49)中第三项能直接积分为

$$2\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\gamma}\mathrm{d}t=2\alpha\Delta\gamma \tag{4.5.54}$$

现考察式(4.5.49)的第二项和第四项。式(4.5.12)对时间微分，易得

$$x\dot{y}-y\dot{x}=2B\dot{\theta} \tag{4.5.55}$$

取式(4.5.12)的模得

$$x^2+y^2=2B \tag{4.5.56}$$

由这两个关系式和式(4.5.17)得

$$\dot{\theta}=\dot{\psi}-\dot{\gamma}=\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2} \tag{4.5.57}$$

或者

$$\dot{\gamma}=\dot{\psi}-\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2} \tag{4.5.58}$$

将式(4.5.58)代入式(4.5.49)第四项,联合式(4.5.49)第二项的结果有

$$\beta(x\dot{y}-y\dot{x})+(\beta-\alpha)(x^2+y^2)\dot{\gamma}=$$
$$\alpha(x\dot{y}-y\dot{x})+(\beta-\alpha)(x^2+y^2)\dot{\psi} \qquad (4.5.59)$$

我们积分式(4.5.59)中的其他两项(沿着异宿轨道)。式(4.5.59)的第一项积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x\dot{y}-y\dot{x})\mathrm{d}x=2\int_{-\infty}^{\infty}B\dot{\theta}\mathrm{d}t \qquad (4.5.60)$$

利用式(4.5.15),在 $I=1$ 上有

$$B=1-(4k^2-1)\frac{1}{3+4\cos\theta}$$

将它代入式(4.5.60)得

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x\dot{y}-y\dot{x})\mathrm{d}t=2\Delta\theta-2(4k^2-1)\cdot$$
$$\int_{\theta(-\infty)}^{\theta(+\infty)}\frac{\mathrm{d}\theta}{3+4\cos\theta} \qquad (4.5.61)$$

其中 $\Delta\theta\equiv\theta(+\infty)-\theta(-\infty)$,在 $0<k<\frac{1}{2}$ 时能从式(4.5.28)、式(4.5.29)得到,在 $\frac{1}{2}<k<\sqrt{2}$ 时能从式(4.5.35)、式(4.5.36)得到。积分式(4.5.61)最后一项可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x\dot{y}-y\dot{x})\mathrm{d}t=2\Delta\theta-2(4k^2-1)\Delta\psi \qquad (4.5.62)$$

这里 $\Delta\psi=\psi(+\infty)-\psi(-\infty)$,从式(4.5.26)、式(4.5.27)和式(4.5.34)有

$$\Delta\psi=-\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\sqrt{\frac{7k^2}{2-k^2}},\quad 0<k<\frac{1}{2}$$

或

$$\Delta\psi=-\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arth}\sqrt{\frac{2-k^2}{7k^2}},\quad \frac{1}{2}<k<\sqrt{2} \qquad (4.5.63)$$

最后,积分式(4.5.59)最后一项,首先由式(4.5.56)、式(4.5.18)可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)\dot{\psi}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}B^2\mathrm{d}t \qquad (4.5.64)$$

利用 $B(t)$ 的表达式(4.5.19)($0<k<1/2$)和式(4.5.22)($1/2<k<\sqrt{2}$)得

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}B^2\mathrm{d}t=\frac{8}{7}\left[k\sqrt{2-k^2}+(1+3k^2)\Delta\psi\right] \qquad (4.5.65)$$

其中 $\Delta\psi$ 已为式(4.5.63)给定。

利用式(4.5.53)、式(4.5.54)、式(4.5.59)、式(4.5.62)、式(4.5.64)和式(4.5.65),Melnikov 函数变成

$$M(a,b,k)=\left[\sqrt{1-a^2}(\cos\Delta\gamma-1)-a\sin\Delta\gamma\right]+$$
$$4ak^2\Delta\psi+(b-a)\frac{4}{7}\cdot$$
$$\left[k\sqrt{2-k^2}+(1+3k^2)\Delta\psi\right] \qquad (4.5.66)$$

这里 $a=\sqrt{2}\frac{\alpha}{\Gamma}$,$b=\sqrt{2}\frac{\beta}{\Gamma}$。

4.5.4 同宿于 p_ε 的同宿轨道的存在性

为了证明同宿于 p_ε 的同宿轨道的存在性,必须证明 Melnikov 函数具有简单零点。这个条件对于证明同宿轨道的存在性是充分的,这条轨线当 $t\to-\infty$ 时渐近于 p_ε,而当 $t\to+\infty$ 时渐近于 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 上的一条轨线。为了验证这条轨线是渐近于 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 的一条轨线——它在 $t\to+\infty$ 时逼近 p_ε,需要证明未扰动异宿轨道当 $t\to-\infty$ 时渐近于 p_0,而当 $t\to+\infty$ 时在一个 γ 值上回到不动点圆上。为了简

化计算,取 $k=1$,利用式(4.5.39)、式(4.5.63)和式(4.5.66),条件 $M(a,b,1)=0$ 给出

$$b=-11.20\sqrt{1-a^2}-1.14a \tag{4.5.67}$$

由此可知,对于 $a\in(0,1)$,存在 b 值(永远是负的),使得 Melnikov 函数为 0,进一步,容易验证这个零点是简单的。

其次,我们证明 p_ε 的不稳定流形在适当的位置上回到 $\mathscr{M}_\varepsilon$。由式(4.5.39),$k=1$,有

$$\Delta\gamma=-1.87 \tag{4.5.68}$$

鱼的鼻子的位置由求解以下方程(见式(4.2.13))得到

$$\mathscr{H}(0,\gamma_n)-\mathscr{H}(0,\pi+\arccos a)=\sin(\pi+\arccos a)-\sin\gamma_n+a(\pi+\arccos a-\gamma_n)=0 \tag{4.5.69}$$

其中 $\mathscr{H}$ 为式(4.5.43)所给定,$a=\sqrt{2}\alpha/\Gamma$。易知式(4.5.69)精确地有两个解,其一表示为 γ_{q_0},这个方程能用 Newton 方法求解。在图 4.5.7 中,当 $a\in(0,1)$时,我们标出了 γ_n,γ_{q_0}和 $\gamma_{p_0}+\Delta\gamma$(注意:$\gamma_{p_0}$是 p_0 的 γ 坐标)。

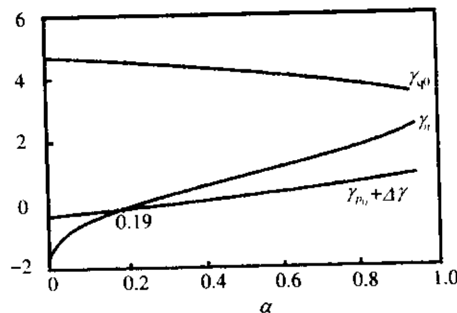


图 4.5.7 γ_{q_0}、γ_n、$\gamma_{p_0}+\Delta\gamma$ 作为 $a=\sqrt{2}\alpha/\Gamma$ 的函数图形

$\Delta\gamma$ 仅依赖于 k,特别地,它不依赖于 a 或 b,γ_{q_0}和 γ_{p_0}仅依赖于 a,这些事实允许我们简单地用图 4.5.7 表示出来,对于 $a\in(0,0.19)$有

$$\gamma_n<\gamma_{p_0}+\Delta\gamma<\gamma_{q_0}$$

定理 4.5.1 对 ε 充分小,$\alpha/\Gamma<0.13$,$\beta/\Gamma=-7.92\sqrt{1-2(\alpha/\Gamma)^2}-1.14\alpha/\Gamma$,$p_\varepsilon$ 具一个同宿轨道。

图 4.5.8 给出了到 p_ε 的同宿轨道存在的参数曲线。

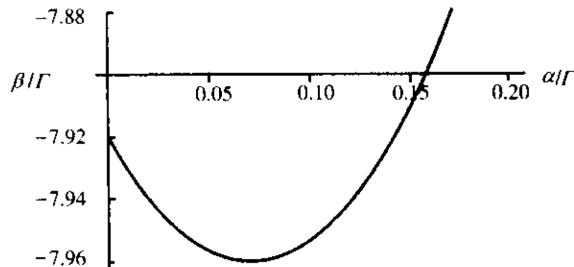


图 4.5.8 在 $\beta/\Gamma-\alpha/\Gamma$ 平面上,同宿到 p_ε 的轨道的参数值,$\alpha/\Gamma<0.13$

4.5.5 在物理空间中混沌的几何解释

定理 4.4.1 推出靠近同宿轨道的轨线结构是混沌的,是指一个定义在靠近同宿轨道的三维 Poincaré 映照具有一个不变 Cantor 集,在其上动力系统是拓扑共轭于作用于符号的可数集上的位移映照。这个结果没能清楚地解释这个混沌在动力系统的物理空间中是如何运动的。为此,我们必须叙述一些有关 Poincaré 映照在同宿轨道附近的构造,从而我们在符号动力学意义下几何地解释混沌运动。这里,我们考虑 Poincaré 映照的几何结构和相应的 Smale 马蹄,以及符号动力学。

引入 p_ε 的局部坐标如下:

$$\begin{cases}\dot{x}=-\rho x-\omega y+F^x(x,y,z,w)\\ \dot{y}=\omega x-\rho y+F^y(x,y,z,w)\\ \dot{z}=-\lambda z+F^z(x,y,z,w)\\ \dot{w}=\nu w+F^w(x,y,z,w)\end{cases} \tag{4.5.70}$$

这里参数和 ε 为固定,在这些适当值上 p_ε 的同宿轨道是存在的。

坐标(x,y)可以想象为$\mathcal{M}_\varepsilon$上的坐标。式(4.5.71)在坐标变换$(x,y,z,w)\to(x,y,-z,-w)$是不变的。

在同宿轨道附近分析轨线的结构的方法是标准的,定义

$$\Pi_0^+ = \{(x,y,z,w) \mid \delta e^{-2\pi\rho/\omega} \leqslant x \leqslant \delta, y = 0, 0 < w \leqslant \delta, -\delta \leqslant z \leqslant \delta\}$$

$$\Pi_0^- = \{(x,y,z,w) \mid \delta e^{-2\pi\rho/\omega} \leqslant x \leqslant \delta, y = 0, -\delta \leqslant w \leqslant 0, -\delta \leqslant z \leqslant \delta\}$$

$$\begin{cases} \Pi_1^+ = \{(x,y,z,w) \mid w = \delta\} \\ \Pi_1^- = \{(x,y,z,w) \mid w = -\delta\} \end{cases} \tag{4.5.71}$$

如图 4.5.9 所示。引入简单的符号 $\Pi_0 = \Pi_0^+ \cup \Pi_0^-$。Poincaré 映照:$\Pi_0\to\Pi_0$。$\Pi_0$ 将由两个映照组成,一个映照 $P_0^+:\Pi_0^+\to\Pi_1^+$,另一个为 $P_0^-:\Pi_0^-\to\Pi_1^-$,对 δ 充分小,它实质上是由线性化向量场所形成的流所给定。$P_1^+:\Pi_1^+\to\Pi_0^+$,$P_1^-:\Pi_1^-\to\Pi_0^-$,对于 δ 充分小,它们实质上为环绕不动点的邻域之外的同宿轨道所给定,是一个仿射变换。

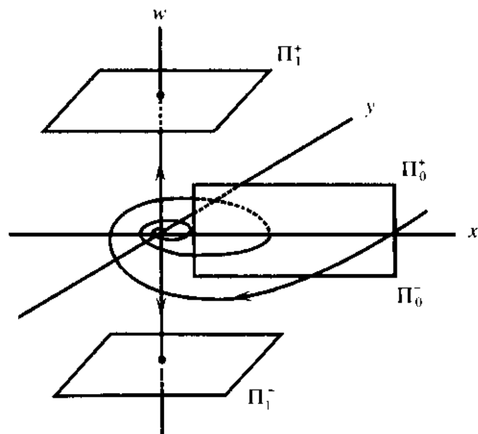


图 4.5.9 横截面 Π_0^+,Π_0^-,Π_1^+ 和 Π_1^-

Poincaré 映照 $P:\Pi_0\to\Pi_0$,$P = P_1^+\circ P_0^+ \cup P_1^-\circ P_0^-$,如图 4.5.10 所示。

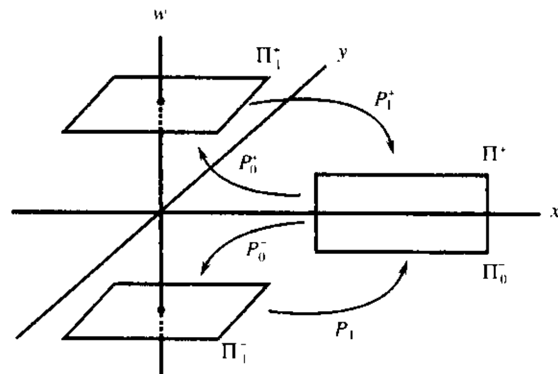


图 4.5.10 映射 P_0^+,P_0^-,P_1^+ 和 P_2^-

现将表明如何用这个映照构造 smale 马蹄,考虑区域

$$\begin{aligned} R_k^+ &= \{(x,y,z,w) \mid \delta e^{-2\pi\rho/\omega} \leqslant x \leqslant \delta, -\delta < z \leqslant \delta, \delta e^{-2\pi(k+1)\nu/\omega} \leqslant w \leqslant \delta e^{-2\pi k\nu/\omega}\} \\ R_k^- &= \{(x,y,z,w) \mid \delta e^{-2\pi\rho/\omega} \leqslant x \leqslant \delta, -\delta < z \leqslant \delta, -\delta e^{-2\pi(k+1)\nu/\omega} \geqslant w \geqslant -\delta e^{-2\pi k\nu/\omega}\} \end{aligned} \tag{4.5.72}$$

如图 4.5.11 所示,其中 k 固定且充分大。在映照 P 下,R_k^+ 的像

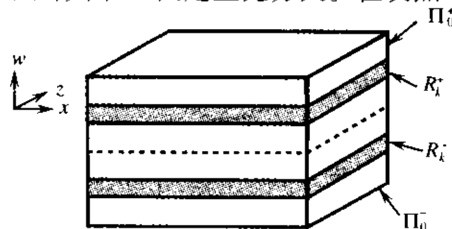


图 4.5.11 区域 R_k^+ 和 R_k^-

相交R_k^+(见图4.5.12)。类似地,对于R_k^-在P下的像相交R_k^-(用对称性)。最重要的,$P(R_k^+)$和R_k^+,R_k^-都相交,对于$P(R_k^-)$有类似结果。因此,我们能够找到R^+和R^-中的小区域,分别用H^+、H^-表示,它们伸张,压缩并映照成它们自己,如图5.13所示。不变的Cantor集是H^+,H^-的向前向后迭代的交,在符号动力学中符号取+和-,因此,在相平面上运动,"+"在符号序列中对应于运动接近于同宿轨道具有正的z和w坐标,而"-"在符号序列中对应于运动接近于同宿轨道具有负的z和w坐标。可见,混沌是清楚的,它随机跳跃于两个同宿轨道之中。

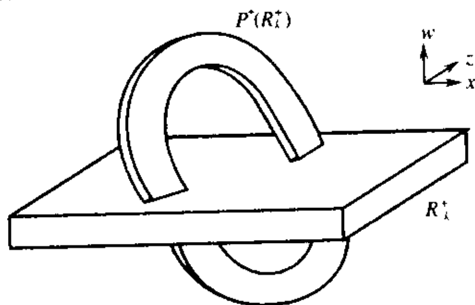


图4.5.12 R_k^+和它的像$P^+(R_k^+)$相交

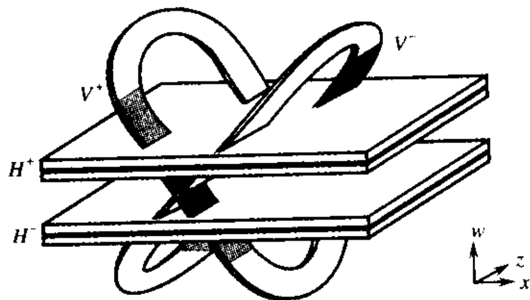


图4.5.13 三维马蹄

第五章 具扰动非线性 Schrödinger 方程同宿轨道的不变性

5.1 前 言

考虑扰动非线性 Schrödinger 方程

$$iq_t = q_{xx} + 2(q\bar{q} - \omega^2)q + i\varepsilon(\hat{D}q - \Gamma) \qquad (5.1.1)$$

这里$q(x,t)$是关于x的2π周期偶函数,D是一个有界耗散算子,它被假定具有形式

$$\mathrm{D}q = -\alpha q + \beta\,\mathrm{B}q \qquad (5.1.2)$$

其中B是二阶算子∂_{xx}的一个 Fourier 截断,即有

$$\mathrm{B}\cos kx = \begin{cases} -k^2\cos kx, & 若\ k < K \\ 0, & 若\ k \geqslant K \end{cases} \qquad (5.1.3)$$

$\omega\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,$\alpha$、$\beta$、$\Gamma$为参数,$\varepsilon>0$是一个充分小的耗散扰动参数,$-\varepsilon\Gamma$表示一种传动力,$-\varepsilon\alpha q$为阻尼项,$\varepsilon\beta q_{xx}$为扩散项。

对于方程(5.1.1)的初值问题,容易得到 Sobolev 空间$H_{e,p}^1$上的适定性。$H_{e,p}^1$由偶的2π周期函数构成,这些函数及其一阶导数平方可积。具体地,我们有

定理 5.1.1 对于所有$q_0\in H_{e,p}^1$和所有$t\in(-\infty,+\infty)$,方程(5.1.1)存在惟一解$q(t,q_0,\varepsilon)$关于t连续且取值在$H_{e,p}^1$里使得$q|_{t=t_0}=q_0$,而且$q(t,\cdot,\cdot)$连续地依赖于q_0和ε。

定理证明是能量方法的标准应用[126],流$F^t(q_0;\varepsilon)=q(t,q_0;\varepsilon)$能被看作$H_{e,p}^1$上的一个光滑动力系统。

在 $\varepsilon=0$ 时,没有扰动的方程具有周期解(空间无关解),其相图是一组圆圈套,其中所有不动点构成不动点圆 S_ω。而且这些圆圈存在同宿轨道(实际上是异宿轨道)。

当 $\varepsilon>0$ 时,原来的不动点圆 S_ω 被打破,而在它附近产生一个鞍点 Q 和一个收点 P,我们将证明关于鞍点 Q 的同宿轨道的存在性。

证明步骤主要包括:

(1) 空间无关解分析。

(2) 在 S_ω 的一个邻域里,构造 S_ω 的中心稳定流形、中心不稳定流形和它们的稳定与不稳定叶层结构(纤维表示),以及鞍点 Q 的稳定与不稳定流形。

(3) 利用 Melnikov 方法去研究从 Q 的不稳定流形出发并进入到 S_ω 的扰动中心稳定流形的轨道的存在性。

(4) 运用 S_ω 的中心稳定流形的叶层结构和无扰动同宿轨道的相移,证明前面提到的轨道进入了 Q 的稳定流形。

5.2 空间无关解分析和在不变平面上的运动

5.2.1 在不变平面上的运动

对于方程

$$iq_t = q_{xx} + 2[q\bar{q} - \omega^2]q + i\varepsilon[\mathrm{D}q - 1] \tag{5.2.1}$$

引入一个常值平面 Π_c

$$\Pi_c \equiv \{q(x,t) \mid \partial_x q(x,t) = 0\}$$

这个平面关于扰动和无扰动流都是不变的,并且在 Π_c 上,方程(5.2.1)变为

$$iq_t = 2[q\bar{q} - \omega^2]q - i\varepsilon(\alpha q + 1) \tag{5.2.2}$$

其中耗散算子D作用在 Π_c 上时有

$$\mathrm{D}q = -\alpha q$$

这里 α 为正常数。对式(5.2.2)作极坐标变换

$$q \equiv \sqrt{I}\exp[i\theta]$$

得到方程(5.2.2)的等价形式

$$\begin{cases} I_t = -2\varepsilon[\alpha I + \sqrt{I}\cos\theta] \\ \theta_t = -2(I - \omega^2) + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{I}}\sin\theta \end{cases} \tag{5.2.3}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,在 Π_c 上的未扰动轨道是相互套入的圆圈,S_ω 为由 $I=\omega^2$ 所给出的不动点圆。而对于 $\varepsilon>0$,在 Π_c 上的扰动轨道与未扰动轨道极不相同(见图 5.2.1)。首先,仅有三个不动点:O,

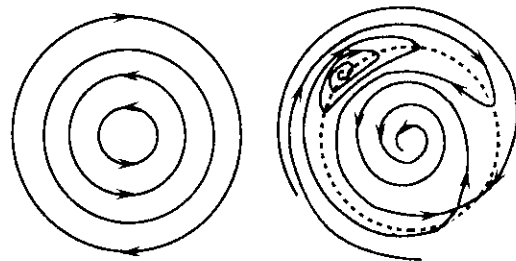


图 5.2.1 常微分方程相平面图

它是原点的变形;Q,一个鞍点——它是不动点圆 S_ω 的变形;P,一个螺线极点,它也是不动点圆 S_ω 的变形。这些不动点和它们对应的增长率由下面的式子给出

$$\begin{cases} I_0 = \varepsilon^2\left[\dfrac{1}{4\omega^4}\right] + O(\varepsilon^4) \\ \theta_0 = -\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\dfrac{\alpha}{2\omega^2} + O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_p = \omega^2 + \dfrac{\varepsilon}{2\omega}\sqrt{(1-\alpha^2\omega^2)} + O(\varepsilon^2) \\ \theta_p = -\arctan\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} - \pi + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{5.2.4}$$

$$\begin{cases} I_q = \omega^2 - \dfrac{\varepsilon}{2\omega}\sqrt{(1-\alpha^2\omega^2)} + O(\varepsilon^2) \\ \theta_q = \arctan\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} - \pi + O(\varepsilon) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = \pm i - \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2) \\ \sigma_p = \pm 2i\sqrt{\varepsilon\omega}[1-\alpha^2\omega^2]^{1/4} - \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^{3/2}) \\ \sigma_q = \pm 2\sqrt{\varepsilon\omega}[1-\alpha^2\omega^2]^{1/4} - \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^{3/2}) \end{cases} \quad (5.2.5)$$

虽然,在 $\varepsilon>0$ 时,未扰动问题的不动点圆 S_ω 不能保持下来,但对于小的 ε,S_ω 附近的运动仍然很慢。引入变量 J

$$J = I - \omega^2$$

方程组(5.2.3)变为

$$\begin{aligned} J_t &= -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] \\ \theta_t &= -2J + \frac{\varepsilon}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

5.2.2 在 Π_c 上关于 Q 的稳定流形

为了描述接近 Q 的稳定流形的流,我们重新标度坐标

$$\tau = \nu t\ ,\ J = \nu j \quad (5.2.7)$$

这里 $\nu=\sqrt{\varepsilon}$。这种重新标度是受到式(5.2.5)中增长率的启示,在这种标度之下,方程组(5.2.3)变为

$$\begin{cases} j_\tau = -2[\alpha(\omega^2+\nu j) + (\omega^2+\nu j)^{1/2}\cos\theta] \\ \theta_\tau = -2j + \nu(\omega^2+\nu j)^{-1/2}\sin\theta \end{cases} \quad (5.2.8)$$

式(5.2.8)可以写成矩阵形式

$$y_\tau = Y(y;\nu) \quad (5.2.9)$$

这里 $y\equiv(j,\theta)^{\mathrm T}$,$Y=(Y_1,Y_2)^{\mathrm T}$ 由式(5.2.8)所确定。利用这些变量,点 Q 有坐标 $y_q=(j_q,\theta_q)$

$$j_q = -\nu\frac{(1-\alpha^2\omega^2)^{1/2}}{2\omega} + O(\nu^3)$$

$$\theta_q = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}\right) - \pi + O(\nu^2)$$

关于平衡点 y_q,线性化式(5.2.8)并设 $\tilde y = y - y_q$,则有

$$\tilde y_\tau = Y'(y_q;\nu)\tilde y + O(\tilde y^2)$$

其中 $Y'(y_q;\nu)$ 为式(5.2.8)的线性化方程组的系数矩阵,它的表值为

$$\begin{bmatrix} -\nu[2\alpha + (\omega^2+\nu j_q)^{-1/2}\cos\theta_q & 2(\omega^2+\nu j_q)^{1/2}\sin\theta_q \\ -2-\dfrac{1}{2}\varepsilon(\omega^2+\nu j_q)^{-3/2}\sin\theta_q & \nu(\omega^2+\nu j_q)^{-1/2}\cos\theta_q \end{bmatrix}$$

简单计算可得 $Y'(y_q;\nu)$的特征值

$$\begin{cases} \lambda = -2\sqrt{\omega}(1-\alpha^2\omega^2)^{1/4} - \nu\alpha + O(\nu^2) \\ \mu = 2\sqrt{\omega}(1-\alpha^2\omega^2)^{1/4} - \nu\alpha + O(\nu^2) \end{cases} \quad (5.2.10)$$

它们有特征向量 $e_1(\nu)$和 $e_2(\nu)$,这些特征向量光滑地依赖于 ν,并且

$$e_1(0) = \left(-\frac{\sigma}{2},1\right)^{\mathrm T}$$

$$e_2(0) = \left(\frac{\sigma}{2},1\right)^{\mathrm T}$$

这里,$\sigma=2\sqrt{\omega}(1-\alpha^2\omega^2)^{1/4}$。

由正则扰动理论和稳定流形定理知:对于 ε 充分小,存在一个不依赖于 ε 的 Q 的开邻域 U,使得在 U 里,Q 的稳定流形是 ν 的光滑函数[66]。因此,Q 的局部稳定流形的一部分能被参数化

$$y = y_*(s;\nu)\ ,\ s = \exp[\lambda\tau] \quad (5.2.11)$$

对于 $0\leqslant s\leqslant s_* = \exp[\lambda\tau_*]$,$s_*$ 很小且与 ε 无关。同时,系统式

(5.2.8)是如下保守系统的一个 $O(\nu)$扰动

$$\begin{cases} j_\tau = -2[\alpha\omega^2 + \omega\cos\theta] \\ \theta_\tau = -2j \end{cases}$$

这个保守系统有鞍点 $Q_0(j_0,\theta_0)$

$$\begin{cases} j_0 = 0 \\ \theta_0 = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}\right) - \pi \end{cases}$$

Q 也是 Q_0 的一个 $O(\nu)$扰动。这个保守系统有能量

$$E(j,\theta) = \frac{1}{2}j^2 - \omega(\sin\theta + \alpha\omega\theta) \tag{5.2.12}$$

于是曲线 $E(j,\theta)=E(j_0,\theta_0)$是保守系统的稳定流形,我们用 C_0^s:$y_0(\tau)=(j_0(\tau),\theta_0(\tau))$来表示它。对于固定的 τ_0,任意 $\tau\in[\tau_0,\tau_*]$,Q 的稳定流形由下式给出

$$y = y_0(\tau) + O(\nu)$$

因此,假若我们用 C_ε^s 表示 Q 的稳定流形对应于 $\tau\in[\tau_0,\infty)$部分,则 C_ε^s 能被 s 参数化($s\in[0,s_0]$)

$$y = y_*(s;\nu)\ ,\ s = \exp[\lambda\tau]$$

这里 y_*是 s 和 ν 的光滑函数。当 $\tau>\tau_0$ 时,曲线 y_*是 $O(\nu)$接近 y_0 的,并满足方程

$$(\lambda s)y_{*s} = Y_*$$

其中 $Y_* = Y(y_*;\nu)$(见图 5.2.2)。

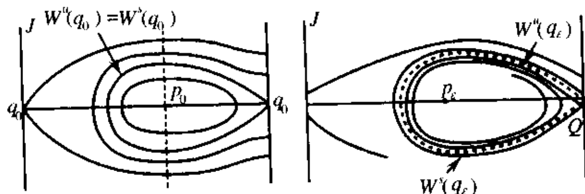


图 5.2.2 在(j,θ)坐标系下的相平面图

因为$|y_{0s}|$是有界的且$|y_{0s}|>0$,所以有

$$m(s;\nu) \equiv |y_{*,s}(s;\nu)| \geqslant m_0,\qquad 0\leqslant s\leqslant s_0$$

其中 m_0 是不依赖 ε 的正常数,曲线 C_ε^s 的单位切向量为

$$\boldsymbol{t} = \frac{y_{*s}}{m} = \frac{Y_*}{(\lambda s)m} \tag{5.2.13}$$

为了刻画 C_ε^s 附近的流,进一步引入坐标(r,s),这里 r 是曲线 C_ε^s 在法线方向的距离测度。设

$$y = y_*(s;\nu) + r\boldsymbol{n}(s;\nu) \tag{5.2.14}$$

这里$\boldsymbol{n}(s;\nu)$是曲线 $y_*(s;\nu)$的单位法向量。$\boldsymbol{n}(s;\nu)$与单位切向量之间有关系:

$$\boldsymbol{n}_s = \kappa(s,\nu)\boldsymbol{t}$$

其中 $\kappa(s,\nu)$是光滑函数。由式(5.2.14)有

$$\begin{aligned} y_\tau &= y_{*\tau}(s;\nu) + r_\tau\boldsymbol{n} + r\boldsymbol{n}_\tau = \\ &y_{*s}(s;\nu)s_\tau + r_\tau\boldsymbol{n} + r\boldsymbol{n}_s s_\tau = \\ &(m\boldsymbol{t} + r\kappa\boldsymbol{t})s_\tau + r_\tau\boldsymbol{n} = \\ &(m+\kappa r)\boldsymbol{t}s_\tau + \boldsymbol{n}r_\tau \end{aligned}$$

上式两端分别与$\boldsymbol{n}$和$\boldsymbol{t}$ 作内积,得

$$r_\tau = y_\tau\cdot\boldsymbol{n} = Y\cdot\boldsymbol{n}$$

$$s_\tau = \frac{y_\tau\cdot\boldsymbol{t}}{m+\kappa r} = \frac{Y\cdot\boldsymbol{t}}{m+\kappa r}$$

把上式右端关于 r 展开

$$Y\cdot\boldsymbol{n} = Y\cdot\boldsymbol{n}|_{r=0} + [Y\cdot\boldsymbol{n}]_r|_{r=0}\cdot r + O(r^2)$$

这里

$$\begin{aligned} Y\cdot\boldsymbol{n}|_{r=0} &= Y(y;\nu)\cdot\boldsymbol{n}|_{r=0} = \\ &Y(y_*;\nu)\cdot\boldsymbol{n} = \\ &Y_*\cdot\boldsymbol{n} = (\lambda s)m\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \end{aligned}$$

$$[Y\cdot \boldsymbol{n}]_r = Y_r\cdot \boldsymbol{n} = [Y'(y;\nu)y_r]\cdot \boldsymbol{n} = [Y'(y;\nu)\cdot \boldsymbol{n}]\cdot \boldsymbol{n}$$

$$[Y\cdot \boldsymbol{n}]_r|_{r=0} = [Y'(y_*;\nu)\cdot \boldsymbol{n}]\cdot \boldsymbol{n} = (Y'_*\cdot \boldsymbol{n})\cdot \boldsymbol{n}$$

即
$$Y\cdot \boldsymbol{n} = [(Y'_*\cdot \boldsymbol{n})\cdot \boldsymbol{n}]r + O(r^2)$$

同样地

$$\frac{Y\cdot \boldsymbol{t}}{m+\kappa r} = \frac{Y_*\cdot \boldsymbol{t}}{m} + \left[\frac{(Y'_*\cdot \boldsymbol{n})\cdot \boldsymbol{t}}{m} - \frac{\kappa|Y_*|}{m^2}\right]r + O(r^2)$$

注意到

$$Y_*\cdot \boldsymbol{t} = (\lambda s)m$$

于是,式(5.2.9)可重写为关于(r,s)的方程组:

$$\begin{cases} r_\tau = a(s;\nu)r + O(r^2) \\ s_\tau = \lambda s + b(s;\nu)r + O(r^2) \end{cases} \tag{5.2.15}$$

这里 a,b 是(s,ν)的光滑函数,$0<s<s_0$。在(r,s)坐标之下,C_ε^s 对应于 $r=0$,且 C_ε^s 上的流由 $s_\tau=\lambda s$ 给出。

进一步,因为 e_1 是在 Q 点的特征值λ 对应的特征向量,从而在 Q 点处e_1 与 C_ε^s 相切,由于在 Q 点处μ 对应的特征向量为e_2,则 e_1、e_2 标准正交化后正好是$\boldsymbol{n}$和$\boldsymbol{t}$,简单计算可得

$$a(0,\nu) = (Y'(y_q;\nu)\cdot \boldsymbol{n})\cdot \boldsymbol{n} = \mu$$

虽然(r,s)方程组比原方程组(5.2.8)更简单,但它还不是描述 C_ε^s 附近流的最好形式。这是因为在 s_τ 方程中出现了耦合 r 的线性项,即 $b(s;\nu)r$。为了了解这一项对于 $r=0$ 与 $r\neq 0$ 是怎样剧烈影响 s 流的,我们取 $a=\mu$ 和 b 为常数,从 $r=0$ 到 $r\neq 0$,s 流就从以λ 指数率衰减变为以μ 指数率增长。鉴于这种原因,我们引入一个新的变量 β,它的线性流在 $\tau\to\infty$时将不受 r 方程的影响。当 s 相当小,我们令

$$s = \beta + (h_0 + h_1\beta)r \tag{5.2.16}$$

这里常数 h_0 和 h_1 被选择为

$$h_0 = \frac{b_0}{\mu-\lambda}$$

$$h_1 = \frac{b_1 - h_0 a_1}{\mu}$$

其中 $a=\mu+a_1 s+O(s^2)$,$b=b_0+b_1 s+O(s^2)$。关于(r,β)坐标,方程组为

$$\begin{aligned} r_\tau &= a(\beta;\nu)r + O(r^2) \\ \beta_\tau &= \lambda\beta + c(\beta;\nu)r + O(r^2) \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

这里,在 C_ε^s 上有$|c(\beta;\nu)|\leqslant c_0|\beta|^2$,即 $0\leqslant\beta\leqslant s_0$。

注:为了得到满足相关要求的方程组(5.2.17),我们作变量代换式(5.2.16),把式(5.2.16)先代入式(5.2.15)中的第一个方程得

$$r_\tau = a(\beta + (h_0+h_1\beta)r;\nu)r + O(r^2)$$

把 $a(\beta+(h_0+h_1\beta)r;\nu)$在 $r=0$ 展开为 $a(\beta;\nu)+O(r)$,从而有

$$r_\tau = a(\beta;\nu)r + O(r^2)$$

由式(5.2.16),$s_\tau=\beta_\tau+(h_0+h_1\beta)r_\tau+h_1\beta_\tau r$。代入式(5.2.15)中第二个方程,得

$$\begin{aligned}\beta_\tau(1+h_1 r) &= \lambda[\beta+(h_0+h_1\beta)r] - (h_0+h_1\beta)r_\tau + b(\beta+(h_0+h_1\beta)r;\nu)r + O(r^2) = \\ &\lambda\beta(1+h_1 r) + [\lambda h_0 - a(\beta;\nu)(h_0+h_1\beta) + b(\beta;\nu)]r + O(r^2)\end{aligned}$$

即

$$\beta_\tau = \lambda\beta + \frac{[\lambda h_0 - a(\beta;\nu)(h_0+h_1\beta) + b(\beta;\nu)]r}{1+h_1 r} + \frac{O(r^2)}{1+h_1 r} = \lambda\beta + c(\beta;\nu)r + O(r^2)$$

这里 $c(\beta;\nu)=\lambda h_0-a(\beta;\nu)(h_0+h_1\beta)+b(\beta;\nu)$。我们选取

$$h_0=\frac{b_0}{\mu-\lambda},\quad h_1=\frac{b_1-h_0a_1}{\mu}$$

其中 $a(\beta;\nu)=\mu+a_1\beta+O(\beta^2)$, $b(\beta;\nu)=b_0+b_1\beta+O(\beta^2)$。从而有 $|c(\beta;\nu)|\leqslant c_0|\beta|^2$。

在方程组(5.2.17)之下，C_ϵ^s 上的流对应于 $r=0,\beta_*=\beta_0e^{\lambda\tau}$。我们在 C_ϵ^s 上对式(5.2.17)线性化，其线性化方程组为

$$\delta r_\tau=a_*\delta r$$

$$\delta\beta_\tau=\lambda\delta\beta+c_*\delta r$$

这里 $\delta r=r-0,\delta\beta=\beta-\beta_*$。方程组(5.2.17)有这样的好处：上面的线性化方程组与关于 Q 的线性化方程组有相似的增长和收缩率。

5.3 在不动点圆邻域里的方程组

5.3.1 基本方程组

为了研究在不动点圆 S_ω 的一个邻域里非线性问题解的动力学行为，我们把式(5.2.1)用坐标 (J,θ,f) 表示，J,θ 为平面 Π_c 上引入的极坐标变量，f 属于 Π_c 的正交补，这些坐标用如下的方式所确定。

首先，设

$$q\equiv[\rho(t)+f(x,t)]\exp\{i\theta(t)\}\tag{5.3.1}$$

这里 ρ 和 θ 是平面 Π_c 上的极坐标，$f\in\Pi_c^\perp$ 且有空间均值零。即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\mathrm{d}x=0$$

我们用 $\langle f\rangle$ 记上式的左端。

其次，对于未扰动流，L^2 范是一个常值运动(constant of motion)。因此，我们用 q 的 L^2 范来代替 ρ，即

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}q\bar{q}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\rho+f)(\rho+\bar{f})\mathrm{d}x=$$

$$\rho^2+\langle f\bar{f}\rangle\tag{5.3.2}$$

由于我们是在不动点圆 S_ω 的一个邻域里讨论问题，而 S_ω 对应于 $I=\omega^2$。故引入变量 J 是方便的

$$J=I-\omega^2\tag{5.3.3}$$

利用 (J,θ,f) 变量，式(5.2.1)变形为

$$\begin{cases}J_t=-2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2)+\rho\cos\theta]+\varepsilon Q_1(f)\\ \theta_t=-2J+\dfrac{\varepsilon}{\rho}\sin\theta+Q_2(f)+\dfrac{1}{\rho}C_2(f)\\ if_t=\mathscr{L}_\varepsilon f+W_\varepsilon f+\rho Q_3(f)+C_3(f)+\dfrac{1}{\rho}C_2(f)f\end{cases}\tag{5.3.4}$$

这里
$$\rho=\sqrt{J+\omega^2-\langle f\bar{f}\rangle}$$

$$\mathscr{L}_\varepsilon f=f_{xx}+i\varepsilon\,\mathrm{D}f+2\omega^2(f+\bar{f})$$

$$W_\varepsilon f=2J(f+\bar{f})+\varepsilon\frac{\sin\theta}{\rho}f$$

且

$$Q_1(f)=2\langle f(\mathrm{D}+\alpha)\bar{f}\rangle$$

$$Q_2(f)=-\langle(f+\bar{f})^2\rangle$$

$$Q_3(f)=4(f\bar{f}-\langle f\bar{f}\rangle)+2(f^2-\langle f^2\rangle)$$

$$C_2(f)=-\langle f\bar{f}(f+\bar{f})\rangle$$

$$C_3(f)=2(f\bar{f}f-\langle f\bar{f}f\rangle)-\langle f^2+\bar{f}^2+6f\bar{f}\rangle f-2\langle f\bar{f}\rangle\bar{f}$$

在以上式子中，$\langle\cdot\rangle$ 表示一个周期上的空间平均值。

注：关于方程组(5.3.4)的推导，叙述如下。

方程(5.2.1)两端同乘以 $\bar{q}$，再作 $\langle\cdot\rangle$ 运算得

$$\frac{1}{2}i\frac{dI}{dt} = -\langle q_x\bar{q}_x\rangle + 2\langle(q\bar{q}-\omega^2)q\bar{q}\rangle - i\varepsilon\alpha\langle q\bar{q}\rangle + i\varepsilon\langle\bar{q}(D+\alpha)q\rangle - i\varepsilon\langle q\rangle$$

上式取虚部有

$$\frac{1}{2}\frac{dI}{dt} = -\varepsilon\alpha\langle(\rho+f)(\rho+f)\rangle + \varepsilon\langle f(D+\alpha)f\rangle - \varepsilon\rho\cos\theta$$

即

$$J_t = -2\varepsilon[\alpha(\omega^2+J)+\rho\cos\theta] + \varepsilon Q_1(f)$$

这里 $\rho=\sqrt{J+\omega^2-\langle f\bar{f}\rangle}$, $Q_1(f)=2\langle f(D+\alpha)f\rangle$。又由式(5.3.1)

$$q_t = (\rho_t+f_t)e^{i\theta} + i(\rho+f)\theta_t e^{i\theta}$$

代入方程(5.2.1)得

$$i(\rho_t+f_t)-(\rho+f)\theta_t = f_{xx} + 2[(\rho+f)(\rho+\bar{f})-\omega^2](\rho+f) + i\varepsilon D(f+\rho) - i\varepsilon e^{-i\theta}$$

对上式作〈·〉运算

$$i\rho_t - \rho\theta_t = 2J\rho + 2\langle f\bar{f}f\rangle + 2\rho\langle f^2+f\bar{f}\rangle - i\varepsilon\cos\theta - \varepsilon\sin\theta$$

再取实部得

$$\theta_t = -2J + \frac{\varepsilon}{\rho}\sin\theta + Q_2(f) + \frac{1}{\rho}C_2(f)$$

其中 $Q_2(f)=-\langle(f+\bar{f})^2\rangle$, $C_2(f)=-\langle(f+\bar{f})\bar{f}f\rangle$。这里已利用了以下关系式

$$\begin{cases} f = \dfrac{f+\bar{f}}{2} + \dfrac{f-\bar{f}}{2} \\ 2\langle f\bar{f}f\rangle = \langle(f+\bar{f})\bar{f}f\rangle + \langle(f-\bar{f})\bar{f}f\rangle \\ 2\rho\langle f^2+f\bar{f}\rangle = \rho\langle(f+\bar{f})^2\rangle + \rho\langle(f+\bar{f})(f-\bar{f})\rangle \end{cases}$$

进一步,我们有

$$if_t - f\theta_t = f_{xx} + 2[\rho^2-\omega^2+\rho(f+\bar{f})+f\bar{f}](\rho+f) - 2J\rho - 2\langle f\bar{f}f\rangle - 2\rho\langle f^2+f\bar{f}\rangle + i\varepsilon Df$$

把 $f\theta_t$ 移到右端,并代入 θ_t 得

$$if_t = f_{xx} + i\varepsilon Df + 2\omega^2(f+\bar{f}) + 2J(f+\bar{f}) + \frac{\varepsilon}{\rho}\sin\theta f + \rho[4(f\bar{f}-\langle f\bar{f}\rangle)+2(f^2-\langle f^2\rangle)] + \frac{1}{\rho}C_2(f)f + 2(f\bar{f}f-\langle f\bar{f}f\rangle) - \langle f^2+\bar{f}^2-6f\bar{f}\rangle f - 2\langle f\bar{f}\rangle f$$

即 $if_t = \mathscr{L}_\varepsilon f + W_\varepsilon f + \rho Q_3(f) + C_3(f) + \frac{1}{\rho}C_2(f)f$。

这样,便得到方程组(5.3.4)。

对于 J、f 充分小且在零的固定邻域里取值,则式(5.3.4)可视为式(5.2.6)的一个扰动,进而有

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2)+\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] + \mathscr{E}_1(J,\theta,f;\varepsilon) \\ \theta_t = -2J + \varepsilon(J+\omega^2)^{-1/2}\sin\theta + \mathscr{E}_2(J,\theta,f;\varepsilon) \\ if_t = \mathscr{L}_\varepsilon f + W_\varepsilon f + \omega Q_3(f) + \mathscr{E}_3(J,\theta,f;\varepsilon) \end{cases} \tag{5.3.5}$$

这里 $W_\varepsilon f = 2J(f+\bar{f}) + \varepsilon\sin\theta f/\sqrt{J+\omega^2}$。并且 $\mathscr{E}_k(k=1,2,3)$ 是 θ 的 2π 周期函数,有阶为

$$\begin{cases} \mathscr{E}_1(J,\theta,f;\varepsilon) = O(\varepsilon f^2) \\ \mathscr{E}_2(J,\theta,f;\varepsilon) = O(f^2) \\ \mathscr{E}_3(J,\theta,f;\varepsilon) = O(Jf^2+f^3) \end{cases} \tag{5.3.6}$$

5.3.2 规范形式

对于方程组(5.3.4),Q 是一个临界点。在构造一条到 Q 的同宿轨道的过程中,我们需要估计 Q 的局部稳定流形的大小。变量(J,θ)的大小由曲线 C_ε^s 确定($C_\varepsilon^s = W^s(Q)\cap\Pi_\varepsilon$)。为了估计 f

的大小，必须使用方程组(5.3.5)中的 f 方程，而它里面有一个麻烦的二次项 $Q_3(f)$，不过，这一项是非共振的且能使用规范形式变换将它消掉。

1. 二次共振

为了消去二次项 $Q_3(f)$，我们必须分析线性方程

$$if_t = f_{xx} + 2\omega^2(f + \bar{f}) \tag{5.3.7}$$

的二次共振性。方程(5.3.7)对应于 $\varepsilon = 0$ 时方程组(5.3.4)中 f 方程的线性部分。

简单计算可得到方程(5.3.7)的色散关系

$$\lambda_k = k\sqrt{k^2 - 4\omega^2}, \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

从而，方程(5.3.7)是二次共振便意味着存在非零整数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1 + k_2 = k_3,\ \lambda_1 \pm \lambda_2 = \pm \lambda_3$$

同时成立，这里 $\lambda_j = \lambda_{k_j}(j = 1,2,3)$。

我们验证是否满足上面的共振条件。

对 λ 方程两端平方，并代入 $k_3 = k_1 + k_2$ 得

$$2k_1^2 + 3k_1k_2 + 2k_2^2 - 4\omega^2 = \pm\sqrt{k_1^2 - 4\omega^2}\sqrt{k_2^2 - 4\omega^2}$$

上式两端再平方有

$$[(k_1 + k_2)^2 + k_1^2 + k_2^2 - 6\omega^2](k_1 + k_2)^2 = 0$$

由于 $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，上式只能在 $k_1 + k_2 = k_3 = 0$ 时成立，而 $f \in \Pi_c^{\perp}$，则 $k_3 \neq 0$，因此，线性方程(5.3.7)在空间 $\Pi_c^{\perp}$ 中不具有二次共振性。

2. 规范形式变换

为了给出规范形式变换，我们对 f 作 Fourier 展开

$$f(x) = \sum_{k \neq 0} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

二次项 $Q_3(f)$ 由两项构成

$$f^2(x) - \langle f^2 \rangle = \sum_{l+k \neq 0} \hat{f}(k)\hat{f}(l)e^{i(k+l)x}$$

$$|f(x)|^2 - \langle |f|^2 \rangle = \sum_{l+k \neq 0} \hat{f}(k)\bar{\hat{f}}(-l)e^{i(k+l)x}$$

现在，我们给出一个关于 x 平移不变的二次近似恒等映射

$$\begin{cases} g = f + K(f,f) \\ K(f,h) = K_{11}(f,h) + K_{1\bar{1}}(f,\bar{h}) + \\ \qquad\qquad k_{\bar{1}1}(\bar{f},h) + K_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{h}) \end{cases} \tag{5.3.8}$$

这里 K 是 $\Pi_c^{\perp} \times \Pi_c^{\perp}$ 到 $\Pi_c^{\perp}$ 的有界双线性映射。

$$K_{11}(f,h) = \iint K_{11}(x - y_1, x - y_2)f(y_1)h(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$$K_{1\bar{1}}(f,\bar{h}) = \iint K_{1\bar{1}}(x - y_1, x - y_2)f(y_1)\bar{h}(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$K_{\bar{1}1}$ 和 $K_{\bar{1}\bar{1}}$ 有类似的表达式。利用 Fourier 展开，这些双线性映射能被写作

$$K_{11}(f,h) = \sum_{k+l \neq 0} \hat{K}_{11}(k,l)\hat{f}(k)\hat{h}(l)e^{i(k+l)x}$$

$$K_{1\bar{1}}(f,\bar{h}) = \sum_{k+l \neq 0} \hat{K}_{1\bar{1}}(k,l)\hat{f}(k)\bar{\hat{h}}(-l)e^{i(k+l)x}$$

$$K_{\bar{1}1}(\bar{f},h) = \sum_{k+l \neq 0} \hat{K}_{\bar{1}1}(k,l)\bar{\hat{f}}(-k)\hat{h}(l)e^{i(k+l)x}$$

$$K_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{h}) = \sum_{k+l \neq 0} \hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}(k,l)\bar{\hat{f}}(-k)\bar{\hat{h}}(-l)e^{i(k+l)x}$$

注：如果二次项 $Q_3(f)$ 是形如 $mf^2 + nf\bar{f} + p\bar{f}^2$ 的式子，则 $K(f,f)$ 可直接设为 $af^2 + bf\bar{f} + c\bar{f}^2$。但是，这里的 $Q_3(f)$ 是形如 $m(f - \langle f^2 \rangle) + n(f\bar{f} - \langle f\bar{f} \rangle) + p(\bar{f}^2 - \langle \bar{f}^2 \rangle)$ 的式子，故我们利用 Fourier 展开式把这样的项 $f^2 - \langle f^2 \rangle, f\bar{f} - \langle f\bar{f} \rangle, \bar{f}^2 - \langle \bar{f}^2 \rangle$ 写成一个级数

展式。而 $K_{11}(f,h), K_{\bar{1}1}(\bar{f},h),\cdots$ 也有相应的 Founier 展式，于是，我们借助于 K_{ab} 来定义 $K(f,f)(a,b\in\{1,\bar{1}\})$。

命题 5.3.1 存在一个近似恒等二次映射式(5.3.8)，把方程

$$i\partial_t f = f_{xx} + 2\omega^2(f+\bar{f}) + \omega Q_3(f)$$

变为含有一个立方非线性项的方程

$$i\partial_t g = g_{xx} + 2\omega^2(g+\bar{g}) + O(g^3)$$

证明：记

$$Sg \equiv i\partial_t g - \partial_x^2 g - 2\omega^2(g+\bar{g})$$

这里 g 由式(5.3.8)给出，进而有

$$Sg = Sf + SK(f,f)$$

我们集中精力讨论 $SK(f,f)$。注意到

$$\begin{aligned}SK(f,f) = {} & i\partial_t K(f,f) - \partial_x^2 K(f,f) - \\ & 2\omega^2[K(f,f)+\bar{K}(f,f)] = \\ & i\partial_t K(f,f) + [(k+l)^2 - 2\omega^2]K(f,f) - \\ & 2\omega^2\bar{K}(f,f)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{K}(f,f) = {} & \bar{K}_{11}(f,f) + \bar{K}_{1\bar{1}}(f,\bar{f}) + \\ & \bar{K}_{\bar{1}1}(\bar{f},f) + \bar{K}_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{f}) = \\ & \sum \bar{\hat{K}}_{11}\,\bar{\hat{f}}(-k)\,\bar{\hat{f}}(-l)e^{i(k+l)x} + \\ & \sum \bar{\hat{K}}_{1\bar{1}}\,\bar{\hat{f}}(-k)\hat{f}(l)e^{i(k+l)x} + \\ & \sum \bar{\hat{K}}_{\bar{1}1}\,\hat{f}(k)\,\bar{\hat{f}}(-l)e^{i(k+l)x} + \\ & \sum \bar{\hat{K}}_{\bar{1}\bar{1}}\,\hat{f}(k)\hat{f}(l)e^{i(k+l)x}\end{aligned}$$

这里，我们假设 $\bar{\hat{K}}_{ab}(-k,-l)=\hat{K}_{ab}(k,l)$。又由于

$$\begin{aligned}i\partial_t K(f,f) = {} & i\partial_t K_{11}(f,f) + i\partial_t K_{\bar{1}1}(\bar{f},f) + \\ & i\partial_t K_{1\bar{1}}(f,\bar{f}) + i\partial_t K_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{f})\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}i\partial_t K_{11}(f,f) = {} & i\iint K_{11}(x-y_1,x-y_2) \\ & [f_t(y_1)f(y_2) + f(y_1)f_t(y_2)]\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\end{aligned}$$

$$if_t = f_{xx} + 2\omega^2(f+\bar{f}) + \omega Q(f)$$

于是

$$\begin{aligned}i\partial_t K_{11}(f,f) = {} & \iint K_{11}(x-y_1,x-y_2)[f_{y_1y_1}(y_1)f(y_2) + \\ & f(y_1)f_{y_2y_2}(y_2) + 2\omega^2(f(y_1)+\bar{f}(y_1))f(y_2) + \\ & 2\omega^2(f(y_2)+\bar{f}(y_2))f(y_1)]\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 + C_{11}(f) = \\ & [-(k^2+l^2)+4\omega^2]K_{11}(f,f) + \\ & 2\omega^2\sum \hat{K}_{11}\,\bar{\hat{f}}(-k)\hat{f}(l)e^{i(k+l)x} + \\ & 2\omega^2\sum \hat{K}_{11}\hat{f}(k)\hat{f}(-l)e^{i(k+l)x} + C_{11}(f)\end{aligned}$$

这里 $C_{11}(f)$ 是关于 f 的立方项。同理可得 $i\partial_t K_{\bar{1}1}(\bar{f},f)$、$i\partial_t K_{1\bar{1}}(f,\bar{f})$ 和 $i\partial_t K_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{f})$ 的类似表达式，从而

$$\begin{aligned}SK(f,f) = {} & \sum[(2kl+2\omega^2)\hat{K}_{11} - 2\omega^2\hat{K}_{1\bar{1}} - \\ & 2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}1} - 2\omega^2\,\bar{\hat{K}}_{\bar{1}\bar{1}}]\hat{f}(k)\hat{f}(l)e^{i(k+l)x} + \\ & \sum[2\omega^2\hat{K}_{11} + 2(l^2+kl-\omega^2)\hat{K}_{1\bar{1}} - 2\omega^2\,\bar{\hat{K}}_{\bar{1}1} - \\ & 2\omega^2\,\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}]\hat{f}(k)\,\bar{\hat{f}}(-l)e^{i(k+l)x} +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum[2\omega^2\hat{K}_{11}-2\omega^2\bar{\hat{K}}_{1\bar{1}}+2(k^2+kl-\omega^2)\hat{K}_{\bar{1}1}-\\
&2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}]\bar{\hat{f}}(-k)\hat{f}(l)e^{i(k+l)x}+\\
&\sum[-2\omega^2\bar{\hat{K}}_{11}+2\omega^2\hat{K}_{1\bar{1}}+2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}1}+\\
&2(k^2+l^2-3\omega^2)\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}]\cdot\\
&\bar{\hat{f}}(-k)\bar{\hat{f}}(-l)e^{i(k+l)x}+C(f)=\\
&\sum\hat{H}_{11}\hat{f}(k)\hat{f}(l)e^{i(k+l)x}+\\
&\sum\hat{H}_{1\bar{1}}\hat{f}(k)\bar{\hat{f}}(-l)e^{i(k+l)x}+\\
&\sum\hat{H}_{\bar{1}1}\bar{\hat{f}}(-k)\hat{f}(l)e^{i(k+l)x}+\\
&\sum\hat{H}_{\bar{1}\bar{1}}\bar{\hat{f}}(-k)\bar{\hat{f}}(-l)e^{i(k+l)x}+C(f)
\end{aligned}
$$

这里

$$
\begin{cases}
\hat{H}_{11}=2(kl+\omega^2)\hat{K}_{11}-2\omega^2\hat{K}_{1\bar{1}}-\\
\qquad 2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}1}-2\omega^2\bar{\hat{K}}_{\bar{1}\bar{1}}\\
\hat{H}_{1\bar{1}}=2\omega^2\hat{K}_{11}+2(l^2+kl-\omega^2)\hat{K}_{1\bar{1}}-\\
\qquad 2\omega^2\bar{\hat{K}}_{\bar{1}1}-2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}\\
\hat{H}_{\bar{1}1}=2\omega^2\hat{K}_{11}-2\omega^2\bar{\hat{K}}_{1\bar{1}}+\\
\qquad 2(k^2+kl-\omega^2)\hat{K}_{1\bar{1}}-2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}\\
\hat{H}_{\bar{1}\bar{1}}=-2\omega^2\bar{\hat{K}}_{11}+2\omega^2\hat{K}_{1\bar{1}}+2\omega^2\hat{K}_{\bar{1}1}+\\
\qquad 2(k^2+l-3\omega^2)\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}
\end{cases}
\tag{5.3.9}
$$

$C(f)$为f的立方项。因此

$$
\begin{aligned}
Sg&=Sf+SK(f,f)=\\
&Sf+H_{11}(f,f)+H_{1\bar{1}}(f,\bar{f})+\\
&H_{\bar{1},1}(\bar{f},f)+H_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{f})+C(f)
\end{aligned}
$$

其中,H_{ab}表示与K_{ab}完全类似的 Fourier 展开式($a,b\in\{1,\bar{1}\}$)。

为了消去 $Q_3(f)$,或者为了使得

$$
\begin{aligned}
&\omega Q_3(f)+H_{11}(f,f)+H_{1\bar{1}}(f,\bar{f})+\\
&H_{\bar{1},1}(\bar{f},f)+H_{\bar{1}\bar{1}}(\bar{f},\bar{f})=0
\end{aligned}
$$

我们选取

$$\hat{H}_{11}=-2\omega,\hat{H}_{1\bar{1}}=-2\omega,\hat{H}_{\bar{1}1}=-2\omega,\hat{H}_{\bar{1}\bar{1}}=0$$

对所有 k,l 成立($k\neq0,l\neq0,k+l\neq0$)。

方程组(5.3.9)可写作

$$\hat{H}=\text{U}\,\hat{K}\tag{5.3.10}$$

这里,$\hat{K}=(\hat{K}_{11},\hat{K}_{1\bar{1}},\hat{K}_{\bar{1}1},\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}})^{\mathrm{T}}$,$\hat{H}=(-2\omega,-2\omega,-2\omega,0)^{\mathrm{T}}$。由于 $H_{ab}=\bar{H}_{ab}$,我们能够推出 $K_{ab}=\bar{K}_{ab}$。为了得到 $K(f,f)$,我们必须解线性方程组(5.3.10)。注意到没有二次共振,则 $\det U\neq0$,且方程组有惟一解

$$
\begin{aligned}
\hat{K}_{11}(k,l)&=-\frac{\omega}{kl}\\
\hat{K}_{1\bar{1}}(k,l)&=-\frac{\omega}{l(k+l)}\\
\hat{K}_{\bar{1}1}(k,l)&=-\frac{\omega}{k(l+k)}\\
\hat{K}_{\bar{1}\bar{1}}(k,l)&=0
\end{aligned}
$$

由于我们是在空间 $\Pi_c^\perp$ 中讨论问题,则 $k\neq0,l\neq0,k+l\neq0$,而

$$\sum|\hat{K}_{ab}(k,l)|^2<\infty$$

则 $K(f,f)\in L^2(S^1\times S^1)$。这意味着 $K(f,f)$是 $\Pi_c^\perp$ 上的一个双线

性映射,且对于所有 $f\in\Pi_c^{\perp}$,

$$\|K(f,f)\|_{H^1}\leqslant C\|f\|_{H^1}^2$$

最后,若 f 在零点的邻域里,我们能够反解方程

$$g=f+K(f,f)$$

从而得到

$$f=g+K(g)$$

这里 $K(g)$的阶为 $O(g^2)$,因此,$C(f)$是关于 g 的立方项。

5.3.3 局部方程组

为了消去式(5.3.5)中的 $\omega Q_3(f)$,我们应用变换 $g=f+K(f,f)$。这个过程在消去 $\omega Q_3(f)$的同时,又产生了新的二次项。比如,由于方程中有项 $\varepsilon\mathrm{D}f$,则由 $\varepsilon\mathrm{D}K(f,f)$就会产生新的二次项,不过,这种二次项均有 ε 系数。

在 S_ω 的邻域里,利用(J,θ,g)作为坐标,方程组(5.3.5)变为

$$\begin{cases} J_t=-2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2)+\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta]+\\ \qquad N_1(J,\theta,g;\varepsilon)\\ \theta_t=-2J+\varepsilon(J+\omega^2)^{-1/2}\sin\theta+\\ \qquad N_2(J,\theta,g;\varepsilon)\\ ig_t=\mathscr{L}_\varepsilon g+W_\varepsilon g+N_3(J,\theta,g;\varepsilon)\end{cases}\tag{5.3.11}$$

这里 J,g 在 O 点的邻域内,且有

$$\begin{cases} N_1(J,\theta,g;\varepsilon)=O(\varepsilon g^2)\\ N_2(J,\theta,g;\varepsilon)=O(g^2)\\ N_3(J,\theta,g;\varepsilon)=O(Jg^2+\varepsilon g^2+g^3)\end{cases}$$

因为我们将在 S_ω 的一个邻域内讨论实的不变流形,所以引入实坐标系是必要的。设

$$u=(\mathrm{Re}(g),\mathrm{Im}(g))^{\mathrm{T}}$$

关于(J,θ,u)坐标,方程组(5.3.11)化为

$$\begin{cases} J_t=-2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2)+\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta]+\\ \qquad N_1(J,\theta,u;\varepsilon)\\ \theta_t=-2J+\varepsilon(J+\omega^2)^{1/2}\sin\theta+\\ \qquad N_2(J,\theta,u;\varepsilon)\\ u_t=L_\varepsilon u+V_\varepsilon u+N_3(J,\theta,u;\varepsilon)\end{cases}\tag{5.3.12}$$

这里 N_3 表示一个二元向量

$$L_\varepsilon=-T\partial_x^2-4\omega^2S+\varepsilon\mathrm{D}$$

$$V_\varepsilon=-4JS+\frac{\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}}T$$

其中

$$T=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

5.4 不变流形理论

在这一节里,我们证明在 S_ω 的一个邻域内不变流形的保持性,并且在强收缩或扩张方向上纤维化这些不变流形。我们也利用前面得到的方程组(5.3.12)估计 Q 的稳定流形的大小。同时将表明,在 u 方向(即离开常值平面的方向)上,Q 的稳定流形至少是阶 $O(\varepsilon^\mu)$的($\mu<1$)。

5.4.1 局部不变流形的存在性

1. 线性方程组分析

在 S_ω 的一个邻域内,方程组(5.3.12)能被看作是如下线性系统的一个扰动

$$\begin{cases} J_t = 0 \\ \theta_t = -2J \\ u_t = L_\varepsilon u \end{cases} \tag{5.4.1}$$

为了研究非线性方程组(5.3.12)的局部行为,我们必须分析算子 L_ε 的谱。因此,我们考虑特征值问题

$$L_\varepsilon e = \lambda e$$

这里$\{e(x),\lambda\}$为 L_ε 的特征偶。利用 Fourier 展开,能够得到特征值 λ 的二次表达式

$$(\lambda - \varepsilon d(j))^2 + j^2(j^2 - 4\omega^2) = 0, \quad j = 1,2,\cdots$$

这里$De(x) = -d(j)e(x)$,其中

$$d(j) = \begin{cases} \alpha + j^2\beta, & j < K \\ \alpha, & j \geqslant K \end{cases}$$

K 为某个正整数。由于 $\omega \in \left(\frac{1}{2},1\right)$,对于 $j=1$,有

$$\begin{cases} \sigma_{s,u}^{\varepsilon} = \mp \sigma - \varepsilon d(1) \\ e_{s,u} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sigma \end{pmatrix}\cos x, \quad \varepsilon = 0 \end{cases} \tag{5.4.2}$$

这里

$$\sigma = \sqrt{4\omega^2 - 1} \tag{5.4.3}$$

对于 $j \geqslant 2$,特征值是有负实部的复共轭对,有

$$\lambda_j = i\Omega_j - \varepsilon d(j)$$

这里

$$\Omega_j = j\sqrt{j^2 - 4\omega^2} > 0 \tag{5.4.4}$$

利用特征基,均值零函数 u 被写作

$$u(x) = v_u e_u(x) + v_s e_s(x) + v_0(x) \tag{5.4.5}$$

其中 v_u 和 v_s 是实的标度,$v_0(x) \in [\text{span}\{\Pi_c, e_u, e_s\}]^{\perp}$。

关于这组变量,线性方程组(5.4.1)分解为

$$\begin{cases} J_t = 0 \\ \theta_t = -2J \\ v_{u,t} = \sigma_u^{\varepsilon} v_u \\ v_{s,t} = \sigma_s^{\varepsilon} v_s \\ v_{0,t} = L_\varepsilon v_0 \end{cases} \tag{5.4.6}$$

因此,在 $\varepsilon = 0$ 时,这个线性方程组有一个不稳定方向(e_u),一个稳定方向(e_s)和无穷多个中心方向(J,θ,v_0)。把中心变量合并起来记为 $v_c = (J,\theta,v_0)^{\mathrm{T}}$,方程组(5.4.6)变为

$$\begin{cases} v_{u,t} = \sigma_u^{\varepsilon} v_u \\ v_{s,t} = \sigma_s^{\varepsilon} v_s \\ v_{c,t} = A v_c \end{cases} \tag{5.4.7}$$

这里 A 由方程组(5.4.6)所定义。

在不动点圆 S_ω 的一个 δ 邻域里,非线性方程组(5.3.12)能被看作线性系统式(5.4.1)的一个扰动。在这个线性方程组的流之下,对于 $\varepsilon = 0$,S_ω 有一维稳定的和不稳定流形,以及余维数为 2 的中心流形。我们集中注意力于中心流形 $E^c(S_\omega)$,中心稳定流形 $E^{cs}(S_\omega)$和中心不稳定流形$E^{cu}(S_\omega)$上,有

$$\begin{cases} E^{cs}(S_\omega) = \text{span}\{e_u\}^{\perp} \\ E^{cu}(S_\omega) = \text{span}\{e_s\}^{\perp} \\ E^{c}(S_\omega) = \text{span}\{e_u, e_s\}^{\perp} \end{cases}$$

线性方程组(5.4.6)的一个重要特征是:在不变流形上的增长率被一个宽的间隙分开,为理解这一点,我们注意到,对于 $\varepsilon = 0$,算子的谱有实部 $\pm\sigma$ 和 0。因此,对任何整数 n 和$\varepsilon < \sigma/4n$,有

$$\| \exp[At] \| \leqslant nC\exp\left[\frac{\sigma |t|}{n}\right]$$

并且不变流形 E^{cs}, E^{cu} 和 E^{c} 能够被相应的解所描述。这些解的增长率分别地在 $t>0$ 时以 $\exp[\sigma t/n]$ 为界。在 $t<0$ 时以 $\exp[-\sigma t/n]$ 为界,而对所有 t 则以 $\exp[\sigma|t|/n]$ 为界。属于稳定流形 span$\{e_s\}$ 和不稳定流形 span$\{e_u\}$ 的解有 σ 阶的增长率。

2. 局部化方程组

我们固定一个足够大的整数 n_0 和局部化参数 $\delta=a/n_0^2$,这里 a 是一个不依赖于 ε 的常数,它将在后面被具体化。我们引入一个局部化函数 Ψ_δ

$$\Psi_\delta: R\to R,\quad \Psi_\delta(s)=\Psi(s/\delta)$$

其中 Ψ 是 C^∞ 函数且满足

$$\Psi(s)=\begin{cases}1, & |s|\leqslant 1\\ 0, & |s|\geqslant 2\end{cases}$$

利用局部化函数可以局部化方程组(5.3.12)为

$$\begin{cases} J_t=-2\varepsilon\left[\alpha(J_\delta+\omega^2)+\sqrt{J_\delta+\omega^2}\cos\theta\right]+\\ \qquad N_1(J_\delta,\theta,u_\delta;\varepsilon)\\ \theta_t=-2J+\varepsilon[(J_\delta+\omega^2)^{-1/2}\sin\theta]+\\ \qquad N_2(J_\delta,\theta,u_\delta;\varepsilon)\\ u_t=L_\varepsilon u+V_\varepsilon u_\delta+N_3(J_\delta,\theta,u_\delta;\varepsilon)\end{cases}\tag{5.4.8}$$

这里,对于任何变量 s,有

$$s_\delta=s\Psi(s/\delta)$$

我们没有切断变量 θ(因为在式(5.3.12)右端含有 θ 的项前面均有系数 ε)。函数 $\Psi_\delta(J,u)$ 在相点位于圆 S_ω 的一个 δ 邻域 U_δ 外面时,对方程组的右端有切断效果。而式(5.4.8)的所有非线性项或者有系数 ε,或者关于 (J,u) 至少是二次的且在 O 点的一个 δ 邻域里被局部化。这意味着方程组(5.4.8)有一个阶为 $O(\varepsilon+\delta)$ 的整体 Lipschitz 常数。

这种局部化,在变非线性方程组(5.3.12)为一个线性常系数系统的整体扰动时,能够保持流在 S_ω 的一个 δ 邻域里不变。使用 $v\equiv(v_u,v_s,v_c)^{\mathrm T}$ 作为变量,算子 A 由方程组(5.4.6)所定义,我们能够把方程组(5.4.8)写作

$$\begin{cases} v_{u,t}=\sigma_u^\varepsilon v_u+R_u^\delta(v;\varepsilon)\\ v_{s,t}=\sigma_s^\varepsilon v_s+R_s^\delta(v;\varepsilon)\\ v_{c,t}=Av_c+R_c^\delta(v;\varepsilon)\end{cases}\tag{5.4.9}$$

这里 $R^\delta(v;\varepsilon)$ 和它的一阶导数是 $O(\varepsilon+\delta)$ 阶的。

我们将证明这个局部化方程组有 C^l 不变流形,它们是 E^{cs}, E^{cu} 和 E^{c} 的光滑变形。反过来,对于原来的方程组,这些流形将在 S_ω 的一个 δ 邻域里局部不变。

3. 保持性定理的陈述与证明

首先,定义局部不变。

定义 5.4.1 给定一个开集 O,在 O 里的一个流形 M 被称为在流 F^tF 下是局部不变的。如果有一个时间区间 I,使得 $F^I(q)\subset O$ 且对某个 $t_*\in I$, $F^{t_*}(q)\in M$,则对任意 $t\in I$,有 $F^t(q)\in M$。

现在,我们叙述保持性定理。

定理 5.4.2 存在 S_ω 的一个 δ 邻域 U_δ,一个 $\varepsilon_0(\delta)>0$ 和一个整数 $l>3$,使得任意 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$,方程组(5.3.12)有一个余维数为 1 的局部不变流形(在 U_δ 里)

$$W_\varepsilon^{cs}=\{v\in H^1\mid v_u=h_u(v_s,v_c;\varepsilon)\}\tag{5.4.10}$$

这里 $h_u\in C^l$ 且关于 θ 是 2π 周期的。进一步,当 $\varepsilon=0$ 时, W_0^{cs} 沿 S_ω 的切线和 E^{cs} 相交。

类似地,有一个由下式给出的局部不变流形

$$W_\varepsilon^{cu}=\{v\in H^1\mid v_s=h_s(v_u,v_c;\varepsilon)\}\tag{5.4.11}$$

这里函数 $h_s\in C^l$ 且关于 θ 是 2π 周期的。进一步,在 $\varepsilon=0$ 时, W_0^{cu} 沿 S_ω 的切线与 E^{cs} 相交。

然后,一个余维数为 2 的"慢流形"M_ε 的存在性由推论给出。

推论 5.4.3 让 M_ε 表示 W_ε^{cs} 和 W_ε^{cu} 的交集,有

$$M_\varepsilon = W_\varepsilon^{cs} \cap W_\varepsilon^{cu}$$

那么,M_ε 是 U_δ 里的局部不变流形,它的余维数为 2。

$$M_\varepsilon = \{v \in H^1 \mid v_u = h_u^c(v_c;\varepsilon), v_s = h_s^c(v_c;\varepsilon)\} \tag{5.4.12}$$

其中 $h_{u,s}^c \in C^l$ 且关于 θ 是 2π 周期的。进一步,在 $\varepsilon = 0$ 时,M 沿着 S_ω 的切线与 E^c 相交。

注:在 M_ε 上的流由下面的方程组给出

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon\left[\alpha(J_\delta + \omega^2) + \sqrt{J_\delta + \omega^2}\cos\theta\right] + \\ \qquad \tilde{N}_1(J_\delta, \theta, v_{0\delta};\varepsilon) \\ \theta_t = -2J + \varepsilon(J_\delta + \omega^2)^{-1/2}\sin\theta + \\ \qquad \tilde{N}_2(J_\delta, \theta, v_{0\delta};\varepsilon) \\ v_{0t} = L_\varepsilon v_0 + V_\varepsilon v_{0\delta} + \tilde{N}_3(J_\delta, \theta, v_{0\delta};\varepsilon) \end{cases} \tag{5.4.13}$$

这里,和前面一样,对任何变量 s,定义 $s_\delta = s\Psi(s/\delta)$,$\tilde{N}$ 是 N 在 M_ε 上的限制。

定理 5.4.2的证明:一旦建立了积分方程组,定理的证明便是不动点理论的一个标准应用。首先,我们化微分方程组(5.4.9)为积分方程形式

$$\begin{cases} v_u(t) = \exp[\sigma_u^\varepsilon(t - t_u)]v_u(t_u) + \int_{t_u}^t e^{[\sigma_u^\varepsilon(t-s)]} R_u^\delta(v(s);\varepsilon)ds \\ v_s(t) = \exp[\sigma_s^\varepsilon(t - t_s)]v_s(t_s) + \int_{t_s}^t e^{[\sigma_s^\varepsilon(t-s)]} R_s^\delta(v(s);\varepsilon)ds \\ v_c(t) = \exp[At]v_c(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} R_c^\delta(v(s);\varepsilon)ds \end{cases}$$

因为增长率存在一个间隔,我们特征化不变流形 W_ε^{cs} 和 W_ε^{cu},即

$$W_\varepsilon^{cs} = \left\{\bar{v} \in H^1 : \sup_{t\geq 0}\left(\exp\left[\frac{-\sigma t}{n_0}\right] \| F^t(\bar{v};\varepsilon) \|_{H^1}\right) < \infty\right\} \tag{5.4.14}$$

$$W_\varepsilon^{cu} = \left\{\bar{v} \in H^1 : \sup_{t\leq 0}\left(\exp\left[\frac{\sigma t}{n_0}\right] \| F^t(\bar{v};\varepsilon) \|_{H^1}\right) < \infty\right\} \tag{5.4.15}$$

这里 $F^t(\bar{v};\varepsilon)$是方程组(5.4.9)的流,$\bar{v}$ 是初值。

我们主要讨论 W_ε^{cs} 的存在性,在 W_ε^{cs} 上,我们引入范数

$$\| v \|_\lambda = \sup_{\substack{t\geq 0 \\ \| v \|_{H^1} \geq \rho}} \left[\exp\left\{-\frac{\sigma t}{\lambda}\right\} \| v(t) \|_{H^1}\right]$$

若 v 是式(5.4.9)的解,v 的初值$\bar{v}$ 属于H_1^1 中任意一个半径为 ρ 的球 B,由 W_ε^{cs} 的定义知,对于 $v \in W_\varepsilon^{cs}$ 有

$\exp[-\sigma_u^\varepsilon t_u] | v_u(t_u) | \to 0$,当 $t_u \to \infty$ 时。因此,关于 W_ε^{cs} 上的解,应满足如下积分方程组:

$$\begin{cases} v_u(t) = \int_{+\infty}^t \exp[\sigma_u^\varepsilon(t - s)] R_u^s(v(s);\varepsilon)ds \\ v_s(t) = \exp[\sigma_s^\varepsilon t]v_s(0) + \int_0^t e^{[\sigma_s^\varepsilon(t-s)]} R_s^\delta(v(s);\varepsilon)ds \\ v_c(t) = \exp[At]v_c(0) + \int_0^t e^{[A(t-s)]} R_c^\delta(v(s);\varepsilon)ds \end{cases} \tag{5.4.16}$$

为了证明 W_ε^{cs} 的存在性,我们采用 Newton 迭代,构造序列$\{v^k\}$并让 $v^0 = 0$,有

$$\begin{cases} v_u^{k+1}(t) = \int_{+\infty}^t e^{[\sigma_u^\varepsilon(t-s)]} R_u^\delta(v^k(s);\varepsilon)ds \\ v_s^{k+1}(t) = e^{[\sigma_s^\varepsilon t]} v_s + \int_0^t e^{[\sigma_s^\varepsilon(t-s)]} R_s^\delta(v^k(s);\varepsilon)ds \\ v_c^{k+1}(t) = e^{[At]} v_c + \int_0^t e^{A(t-s)} R_c^\delta(v^k(s);\varepsilon)ds \end{cases} \tag{5.4.17}$$

这里 $v_s = v_s(0), v_c = v_c(0)$。为了表明式(5.4.17)生成一个好的函数序列，我们利用数学归纳法证明$\{v^k\}$关于$\|\cdot\|_{n_0}$的有界性。

事实上，若 $\|v^k\|_{n_0} \leqslant C$，则

$$\|v^{k+1}(t)\|_{H^1} \leqslant n_0 C\exp\left[\frac{\sigma t}{n_0}\right](\|v_s\|_{H^1} + \|v_c\|_{H^1}) +$$
$$\int_t^{\infty}\exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]\|R_u^{\delta}(v^k(s);\varepsilon)\|_{H^1}\mathrm{d}s +$$
$$\int_0^t\exp\left[-\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]\|R_s^{\delta}(v^k(s);\varepsilon)\|_{H^1}\mathrm{d}s +$$
$$\int_0^t n_0 C\exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right]\|R_c^{\delta}(v^k(s);\varepsilon)\|_{H^1}\mathrm{d}s$$

这里，我们利用了下列关系和不等式

$$\|v^{k+1}\|_{H^1} = \|v_s^{k+1}\|_{H^1} + \|v_u^{k+1}\|_{H^1} + \|v_c^{k+1}\|_{H^1}$$

$$\|\exp[At]\| \leqslant n_0 C\exp\left[\frac{\sigma t}{n_0}\right], \quad t \geqslant 0$$

$$\|\exp[At]\| \leqslant n_0 C\exp\left[\frac{\sigma t}{2n_0}\right], \quad t \geqslant 0$$

$$\exp[\sigma_s^{\varepsilon} t] \leqslant n_0 C\exp\left[\frac{\sigma t}{n_0}\right], \quad t \geqslant 0$$

$$\exp[\sigma_s^{\varepsilon}(t-s)] \leqslant \exp\left[-\frac{\sigma}{2}(t-s)\right], \quad t - s \geqslant 0$$

我们选取 ε 充分小，则有

$$\sigma_u^{\varepsilon} = \sigma - \varepsilon d(1) \geqslant \frac{\sigma}{2}$$

从而，在 $t-s \leqslant 0$ 时，$\exp[\sigma_u^{\varepsilon}(t-s)] \leqslant \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]$。

我们注意到 $R^{\delta}(w:\varepsilon)$是光滑函数，它们的项或者有系数 ε，或者是非线性项且在 S_{ω} 的 δ 邻域里被局部化。因此，若让 R' 表示 R^{δ} 的导数，则有估计式

$$\|R^{\delta}(w;\varepsilon)\|_{H^1} \leqslant \|R'\|\,\|w\|_{H^1} + \varepsilon \qquad (5.4.18)$$

这里，$\|R'\|$ 是 R' 的值的上确界，在局部化以后，它等于 $C(\varepsilon + \delta)$。上式中的 ε 是需要的，因为在式(5.4.8)中有 $\varepsilon\rho\sin\theta$ 这样的项。于是

$$\|v^{k+1}(t)\|_{H^1} \leqslant n_0 C\exp\left[\frac{\sigma t}{n_0}\right](\|v_s\|_{H^1} + \|v_c\|_{H^1} + \varepsilon) +$$
$$\int_t^{\infty}\exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]C(\varepsilon+\delta)\|v^k(s)\|_{H^1}\mathrm{d}s +$$
$$\int_0^t\exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right]n_0 C(\varepsilon+\delta)\|v^k(s)\|_{H^1}\mathrm{d}s$$

利用 v^k 的界，即

$$\exp\left[-\frac{\sigma}{n_0}t\right]\|v^k(t)\|_{H^1} \leqslant \|v^k\|_{n_0} \leqslant C$$

便有

$$\|v^{k+1}(t)\|_{H^1} \leqslant C[(\|v_s\|_{H^1} + \|v_c\|_{H^1} + \varepsilon)n_0 +$$
$$n_0^2(\varepsilon+\delta)\|v^k\|_{n_0}]\exp\left[\frac{\sigma}{n_0}t\right]$$

这里，C 与 n_0、ε 和 δ 无关。现在，我们固定 $\delta = a/n_0^2$，取 $a = \frac{1}{4C}$，则对所有 $\varepsilon < a/n_0^2$ 有

$$\|v^{k+1}(t)\|_{n_0} \leqslant C(\rho) + \frac{1}{2}\|v^k\|_{n_0} \qquad (5.4.19)$$

因此，$\|v^{k+1}\|_{n_0}$有界，并由递推关系式(5.4.19)能得到$\|v^k\|_{n_0} \leqslant 2C(\rho)$。于是，$\{v^k\}$是有定义的。

因为所有非线性项是光滑的，我们有关于差的类似的估计

$$\| v^{k+1} - v^k \|_{n_0} \leqslant \frac{1}{2} \| v^k - v^{k-1} \|_{n_0} \qquad (5.4.20)$$

这意味着 $v^k \to v$, v 是 t 的连续函数,有初值 $\bar{v}$,属于 H^1,同时

$$\| v \|_{n_0} \leqslant 2C(\varepsilon + \| v_s \|_{H^1} + \| v_c \|_{H^1})$$

我们注意到在方程组(5.4.16)中,所有的项都是光滑的,这意味着$\{v^k\}$关于 v_s, v_c 和 ε 是可微的,从而得到 v 关于 v_c, v_s 和 ε 的光滑性。

导数 Dv^k 满足不等式

$$\| Dv^{k+1}(t) \|_{H^1} \leqslant C\exp\left[\frac{\sigma}{n_0}t\right] + C\int_t^\infty \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right] \cdot \| R'Dv^k \|_{H^1} \mathrm{d}s + C\int_0^t \exp \cdot \left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right] \| R'Dv^k \|_{H^1} \mathrm{d}s$$

通过使用 R' 的界 $\| R' \| = C(\varepsilon+\delta)$,我们得到

$$\| Dv^k \|_{n_0} \leqslant 2C$$

为了估计序列$\{Dv^k\}$中两项之差,我们利用中值定理得到

$$\| [R'(v^k) - R'(v^{k-1})]w \|_{H^1} \leqslant C \| v^k - v^{k-1} \|_{H^1} \| w \|$$

这里常数 C 依赖于 R'' 的范数。设 $\delta v^k = v^k - v^{k-1}$,则有

$$\| D\delta v^{k+1}(t) \| \leqslant C\int_t^\infty \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right] \cdot \| R'(v^k)Dv^k - R'(v^{k-1})Dv^{k-1} \|_{H^1} \mathrm{d}s + C\int_0^t n_0 \exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right] \cdot \| R'(v^k)Dv^k - R'(v^{k-1})Dv^{k-1} \|_{H^1} \mathrm{d}s$$

而

$$\begin{aligned} &\| R'(v^k)Dv^k - R'(v^{k-1})Dv^{k-1} \|_{H^1} = \\ &\| R'(v^k)(Dv^k - Dv^{k-1}) + Dv^{k-1}[R'(v^k) - R'(v^{k-1})] \|_{H^1} \leqslant \\ &\| R'(v^k)(D\delta v^k) \|_{H^1} + \| Dv^{k-1}[R'(v^k) - R'(v^{k-1})] \|_{H^1} \leqslant \\ &C(\varepsilon+\delta) \| D\delta v^k \|_{H^1} + \| Dv^{k-1} \|_{H^1} \cdot C \| \delta v^k \|_{H^1} \end{aligned}$$

则

$$\| D\delta v^{k-1}(t) \|_{H^1} \leqslant C\int_t^\infty \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right][\| R'(D\delta v^k) \|_{H^1} + \| Dv^{k-1} \|_{H^1} \| \delta v^k \|_{H^1}]\mathrm{d}s + C\int_0^t n_0 \exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right][\| R'(D\delta v^k) \|_{H^1} + \| Dv^{k-1} \|_{H^1} \| \delta v^k \|_{H^1}]\mathrm{d}s \qquad (5.4.21)$$

上式中的二次项导致了一个增长率的增加,即

$$\| \delta v^k \|_{H^1} \| Dv^{k-1} \|_{H^1} = \mathrm{e}^{\frac{2\sigma t}{n_0}}[\mathrm{e}^{-\frac{\sigma t}{n_0}} \| \delta v^k \|_{H^1}][\mathrm{e}^{-\frac{\sigma t}{n_0}} \| Dv^{k-1} \|_{H^1}] \leqslant \exp\left[\frac{2\sigma t}{n_0}\right] \| \delta v^k \|_{n_0} \| Dv^{k-1} \|_{n_0}$$

这种增长率的增加,限制了一阶导数差的估计。我们取范数 $\| \cdot \|_{n_0/2}$ 对一阶导数的差进行估计得

$$\| Dv^{k+1} - Dv^k \|_{n_0/2} \leqslant C \| v^k - v^{k-1} \|_{n_0} + \frac{1}{2} \| Dv^k - Dv^{k-1} \|_{n_0/2}$$

事实上,对式(5.4.21)右端各项进行估计有

$$C\int_t^\infty \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]\|Dv^{k-1}\|_{H^1}\|\delta v^k\|_{H^1}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C\int_t^\infty \exp\left[\frac{2\sigma s}{n_0}\right]\|\delta v^k\|_{n_0}\|Dv^{k-1}\|_{n_0}\exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C\|Dv^{k-1}\|_{n_0}\|\delta v^k\|_{n_0}\exp\left[\frac{\sigma}{2}t\right]\int_t^\infty \exp\left[\left(\frac{2\sigma}{n_0}-\frac{\sigma}{2}\right)s\right]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C\exp\left[\frac{2\sigma t}{n_0}\right]\|\delta v^k\|_{n_0}, \quad n_0 > 4$$

同理

$$C\int_0^t n_0\exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right]\|Dv^{k-1}\|_{H^1}\|\delta v^k\|_{H^1}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C\exp\left[\frac{2\sigma t}{n_0}\right]\|\delta v^k\|_{n_0}$$

又

$$C\int_0^t n_0\exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right]\|R'(D\delta v^k)\|_{H^1}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C n_0(\varepsilon+\delta)\int_0^t \|D\delta v^k\|_{\frac{n_0}{2}}\exp\left[\frac{\sigma}{2n_0}(t-s)\right]\exp\left[\frac{2\sigma s}{n_0}\right]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$Cn_0^2(\varepsilon+\delta)\exp\left[\frac{2\sigma t}{n_0}\right]\|D\delta v^k\|_{\frac{n_0}{2}}$$

同理

$$C\int_t^\infty \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]\|R'(D\delta v^k)\|_{H^1}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$Cn_0^2(\varepsilon+\delta)\exp\left[\frac{2\sigma t}{n_0}\right]\|D\delta v^k\|_{\frac{n_0}{2}}, \quad n_0 > 4$$

按照前面相同的方式选取 δ, a 和 ε,则有一阶导数差的依范数 $\|\cdot\|_{n_0/2}$的估计式。利用递推关系

$$\|D\delta v^{k+1}\|_{\frac{n_0}{2}} \leqslant C_0\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2}\|D\delta v^k\|_{\frac{n_0}{2}}$$

这里 $C_0 = C\|v^1\|_{n_0}$,能够推出$\{Dv^k\}$是 Cauchy 序列。因此,序列$\{v^k\}$依范数$\|\cdot\|_{\frac{n_0}{2}}$是 C^1 收敛的($n_0>4$)。重复这种程序可得到序列$\{D^jv^k\}$依模$\|\cdot\|_{\frac{n_0}{j+1}}$收敛,其中$\frac{n_0}{j+1}>2$,取极限得 $v\in C^l$,$l<\left[\frac{n_0}{2}\right]-1$。

利用上面的估计式,我们定义

$$h_u(v_s, v_c;\varepsilon) = v_u(0) = \int_\infty^0 \exp[-\sigma_u^\varepsilon s]R_u^\delta(v(s);\varepsilon)\mathrm{d}s \tag{5.4.22}$$

它是一个 C^l 函数且$\|Dh_u\|\leqslant\frac{1}{2}$,从而

$$W_\varepsilon^{cs} = \{v\in H^1: v_u = h_u(v_s, v_c;\varepsilon)\}$$

是一个 C^l 流形。它的不变性由 h_u 的定义和时间变换之下方程的不变性得到。

要使 W_ε^{cs} 关于方程(5.2.1)是局部不变的,函数 h_u 必须是变量θ的 2π 周期函数,这是明显的,因为积分方程组关于 θ 是 2π 周期的且对每个 $\theta\in R$ 有惟一解。最后,注意到 $\varepsilon=0$,R^δ 关于 u、J 对所有$\theta\in[0,2\pi]$至少是二次的,便得到:W_0^{cs} 与 S_ω 相切。

完全相同的证明,可以得到,存在一个 C^l 函数 h_s 使得$\|Dh_s\|\leqslant\frac{1}{2}$,进而存在式(5.2.1)的一个 C^l 局部不变流形

$$W_\varepsilon^{cu} = \{v\in H^1: v_s = h_s(v_u, v_c;\varepsilon)\}$$

推论 5.4.3的证明: W_ε^{cu} 和 W_ε^{cs} 的交集能够通过下列方程组的解来描述

$$\begin{cases} v_u = h_u(v_s, v_c;\varepsilon) \\ v_s = h_s(v_s, v_c;\varepsilon) \end{cases}$$

注意到

$$\|Dh_u\| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \|Dh_s\| \leqslant \frac{1}{2}$$

利用隐函数存在定理知:上面的系统有惟一解

$$\begin{cases} v_u = h_u^c(v_c;\varepsilon) \\ v_s = h_s^c(v_c;\varepsilon) \end{cases}$$

这里 $h_{u,s}^c$ 是 C^l 函数,且

$$M_\varepsilon = \{v \in H^1 : v_u = h_u^c(v_c;\varepsilon), v_s = h_s^c(v_c;\varepsilon)\}$$

注:关于不变流形的保持性定理和纤维定理的证明,不需要标准形式变换。

5.4.2 不变流形的纤维化

由于线性化问题有小的增长率,则对 $t \in (-\infty, +\infty)$,同宿轨道的整体结构是一个奇异扰动问题。在这里,我们所讨论的问题具有如下的模型结构:

$$\begin{aligned} \dot\eta &= [-1 + \varepsilon\Omega(\eta,\upsilon)]\eta \\ \dot\upsilon &= \varepsilon[\upsilon + S(\eta,\upsilon)] \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

这里 Ω 是 $O(|\eta| + |\upsilon|)$ 阶的,S 是 $O(\eta^2 + \upsilon^2)$ 阶的,η 和 υ 充分小。注意到:对于方程组(5.4.23),$M = \{(\eta,\upsilon) \mid \eta = 0\}$ 是一个不变流形。在 M 上,流由 $\dot\upsilon = \varepsilon[\upsilon + S(0,\upsilon)]$ 刻画,可见在 M 上的运动是慢的。这种慢的运动在 $\varepsilon = 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 时是极不一样的,这种不同便是产生奇异特征的根源。如果系统能被完全地解耦,那么初值问题的长时间行为将通过 υ 方程的解被完全地描述。而对于耦合系统,情况则是不清楚的。

虽然一个完全解耦是理想的,但是这很困难,我们不企求这样。不过,解耦较慢的运动是充分的,也是可行的。

所谓解耦慢的流形,即是,寻求一个光滑的变量替换

$$(\eta,\upsilon) \to (\eta,\eta_c), \upsilon = f(\eta,\eta_c;\varepsilon), f(0,\eta_c;\varepsilon) = \eta_c$$

通过这个变量替换部分解耦慢的流,即把式(5.4.23)变为下面的形式:

$$\begin{cases} \dot\eta = [-1 + \varepsilon\Omega(\eta,\upsilon)]\eta \\ \dot\eta_c = \varepsilon[\eta_c + \bar S(\eta_c)] \end{cases} \tag{5.4.24}$$

而对于式(5.4.24),有性质:当 $t \to \infty$ 时

$$(\eta(t;\eta_0), \eta_c(t;\eta_0)) \to (0, \eta_c(t;\bar\eta_0))$$

且以指数($\exp\{-t\}$)收敛,这里 $\eta_0 = (\eta(0), \eta_c(0))$,$\bar\eta_0 = (0, \eta_c(0))$ 分别为两条轨线的初值,于是,轨线经过任意点$(\eta(0), \eta_c(0))$的长时间行为能够通过慢流形上过点$(0, \eta_c(0))$的运动所跟踪。

根据 Fenichel 的思想[41],为描述这种部分解耦,我们引入一族曲线(它以慢流形 M 为指标集)

$$\mathscr{F}_\upsilon : [-1,1] \to W_\varepsilon^{cs}(M), \forall \upsilon \in M$$

它满足 $\mathscr{F}_\upsilon(0) = \upsilon$。这族曲线关于$(\eta,\upsilon;\varepsilon)$是 C^2 的且有如下的刻画:

一个点$(\eta,\bar\upsilon)$位于曲线 $\mathscr{F}_\upsilon^s$ 上$\Leftrightarrow$

$$\| F^t(\eta,\bar\upsilon;\varepsilon) - F^t(0,\upsilon;\varepsilon) \| \to 0$$

在 $t \to \infty$ 时以一个快的速度收敛,这里 F^t 是系统的流。曲线 $\mathscr{F}_\upsilon^s$ 称为通过基点 $\upsilon \in M$ 的一条 Fenichel 稳定纤维。

明显地,在部分解耦的坐标系中,纤维 $\mathscr{F}_\upsilon$ 由下式给出

$$\mathscr{F}_\upsilon = \{(\eta,\bar\upsilon) : \bar\upsilon = f(\eta,\upsilon;\varepsilon), \upsilon \in M, \eta \in [-1,1]\}$$

这里 $f(\eta,\upsilon;\varepsilon)$ 是坐标变换。我们称部分解耦的坐标(η,η_c)为纤维坐标,且有

$$W_\varepsilon^s(M) = \bigcup_{\upsilon \in M} \mathscr{F}_\upsilon^s$$

可以完全类似地引入不稳定纤维 $\mathscr{F}_{\upsilon_u}$。

定理 5.4.4(纤维定理) 对于所有 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,$C^l$ 不变流形 W_ε^{cu} 有一个 C^{l-2} 坐标系

$$\begin{cases} \upsilon_u = \eta_u, & \eta_u \in [-\eta_0, \eta_0] \\ \upsilon_c = f^u(\eta_u, \eta_c;\varepsilon), & \eta_u \in E^c \end{cases}$$

使得子流形 M_ε 对应于 $\eta_u = 0$,并且在 W_ε^{cu} 上的流解耦为下面的形式

$$\begin{cases}\dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \Gamma^\delta(\eta_u,\eta_c;\varepsilon)]\eta_u \\ \dot{\eta}_c = A\eta_c + \bar{S}_c^\delta(\eta_c;\varepsilon)\end{cases}$$

这里,Γ^δ、$\bar{S}_c^\delta$ 和它们的导数是 $O(\varepsilon+\delta)$ 阶的。一个类似的陈述对于 W_ε^{cs} 也成立。

关于 W_ε^{cu},流形 M_ε 是它的一个余维数为1的子流形。这意味着局部不变流形 W_ε^{cu} 能够被看做积 $M_\varepsilon \times (-z_0,z_0)$,它的局部坐标是$(\upsilon_c,\eta_u)$,这里 υ_c 是 M_ε 上的坐标,η_u 是区间$(-z_0,z_0)$上的坐标。为了证明整个慢流形 M_ε 上 W_ε^{cu} 的纤维表示的存在性,我们从利用局部坐标写出 W_ε^{cu} 上的流所满足的方程组开始讨论。

流形 W_ε^{cu} 可视为(υ_u,υ_c)上的一个图被给出,有

$$\upsilon_s = h_s(\upsilon_u,\upsilon_c;\varepsilon)$$

而且在 W_ε^{cu} 上,通过限制方程组(5.4.9)到这个图上得到 W_ε^{cu} 上流的表示

$$\begin{cases}\dot{\upsilon}_u = \sigma_u^\varepsilon \upsilon_u + S_u^\delta(\upsilon_u,\upsilon_c;\varepsilon) \\ \dot{\upsilon}_c = A\upsilon_c + S_c^\delta(\upsilon_u,\upsilon_c;\varepsilon)\end{cases} \tag{5.4.25}$$

这里 $S_{u,c}^\delta(\upsilon_u,\upsilon_c,\varepsilon) = R_{u,c}^\delta(\upsilon_u,h_s(\upsilon_u,\upsilon_c;\varepsilon),\upsilon_c;\varepsilon)$是 $R_{u,c}^\delta$ 在图上的限制。

类似地,使用(υ_u,υ_c)作为 W_ε^{cu} 上的局部坐标,则子流形 M_ε 作为关于 υ_c 的图被给出,有

$$\upsilon_u = h_u^c(\upsilon_c;\varepsilon)$$

而且在 M_ε 上的流满足

$$\dot{\upsilon}_c = A\upsilon_0 + \bar{S}_c^\delta(\upsilon_c;\varepsilon) \tag{5.4.26}$$

这里 $\bar{S}_c^\delta(\upsilon_c;\varepsilon) = S_c^\delta(h_u^c(\upsilon_c;\varepsilon),\upsilon_c;\varepsilon)$是 S_c^δ 在图上的限制。

因为 M_ε 是 W_ε^{cu} 的不变子流形,我们引入坐标(υ_c,η_u),这里 υ_c 是 M_ε 上的坐标,而

$$\eta_u = \upsilon_u - h_u^c(\upsilon_c;\varepsilon) \tag{5.4.27}$$

利用这个坐标,子流形 M_ε 由 $\eta_u = 0$ 给出。

为了得到在坐标(υ_c,η_u)之下 W_ε^{cu} 上流的方程组,我们必须沿着式(5.4.25)的解。对 η_u 微分(关于 t 求导,且 υ_c,υ_u 是式(5.4.25)的解),这会出现一个技术困难:式(5.4.25)的解关于时间 t 仅仅是连续的,在 H^1 中取值,而不是 C^1 的(在广义函数意义下是 C^1 的)。不过,假若我们让初值取在 H^3 中,则解关于 t 是 C^1 的且取值在 H^1 中。同时,也能够得到式(5.4.25)的解在空间 H^1 中对初值的连续依赖性。因此,我们先假定初值在 H^3 里,这样便能够得到在 W_ε^{cu} 上流的方程组,然后利用对初值的连续依赖性推导出这个方程组在广义函数意义下对于初值取在 H^1 里也成立。

对式(5.4.27)关于 t 求导得

$$\dot{\eta}_u = \dot{\upsilon}_u - Dh_u^c(\upsilon_c;\varepsilon)\dot{\upsilon}_c$$

Dh_u^c 表示 h_u^c 关于 υ_c 的导数。利用方程组(5.4.25),我们能把上面的方程写作

$$\dot{\eta}_u = \sigma_u^\varepsilon \upsilon_u + S_u^\delta - Dh_u^c(A\upsilon_c + S_c^\delta) \tag{5.4.28}$$

为了简化这个方程,我们使用 h_u^c 的一个恒等式,这个恒等式来源于 M_ε 作为 W_ε^{cu} 的子流形的不变性。我们知道,在 M_ε 上的流能够通过$(h_u^c(\upsilon_c(t)),\upsilon_c(t))$给出。关于 t 求导,并利用式(5.4.25)有

$$Dh_h^c\dot{\upsilon} = \dot{\upsilon}_u = \sigma_u^\varepsilon h_u^c + S_u^\delta(h_u^c,\upsilon_c;\varepsilon)$$

$$\dot{\upsilon}_c = A\upsilon_c + S_c^\delta(h_u^c,\upsilon_c;\varepsilon)$$

这意味着 h_u^c 满足

$$Dh_u^c(A\upsilon_c + \bar{S}_c^\delta(\upsilon_c;\varepsilon)) = \sigma_u^\varepsilon h_u^c + \bar{S}_u^\delta(\upsilon_c;\varepsilon) \tag{5.4.29}$$

这里 $\bar{S}_c^\delta(\upsilon_c;\varepsilon) = S_c^\delta(h_u^c,\upsilon_c;\varepsilon)$,$\bar{S}_u^\delta(\upsilon_c;\varepsilon) = S_u(h_u^c,\upsilon_c;\varepsilon)$已在前面注明。利用这个恒等式,我们可以简化式(5.4.28),并得到用坐标(η_u,υ_c)描述的 W_ε^{cu} 上流的方程组

$$\begin{cases}\dot{\eta}_u = \sigma_u^\varepsilon \eta_u + \Omega_u(\eta_u,\upsilon_c;\varepsilon) \\ \dot{\upsilon}_c = A\upsilon_c + \Omega_c(\eta_u,\upsilon_c;\varepsilon)\end{cases} \tag{5.4.30}$$

这里

$$\begin{cases} \Omega_u = S_u^\delta(\eta_u + h_u^c, \upsilon_c;\varepsilon) - \bar{S}_u^\delta - \\ \qquad Dh_u^c[-\bar{S}_c^\delta + S_c^\delta(\eta_u + h_u^c, \upsilon_c;\varepsilon)] \\ \Omega_c = S_c^\delta(\eta_u + h_u^c, \upsilon_c;\varepsilon) \end{cases}$$

是 C^{l-1}函数(因为 h_u^c 是 C^l 的,则 Dh_u^c 是 C^{l-1}的)。注意到

$$\begin{cases} \Omega_u(0, \upsilon_c;\varepsilon) = 0 \\ \Omega_c(0, \upsilon_c;\varepsilon) = \bar{S}_c^\delta(\upsilon_c;\varepsilon) \end{cases} \tag{5.4.31}$$

同时,$\Omega_{u,c}$的所有项和它们的一阶导数或者有 ε 系数,或者因局部化是 $O(\delta)$阶的。那么,式(5.4.30)能写为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \bar{\Omega}_u(\eta_u, \upsilon_c;\varepsilon)]\eta_u \\ \dot{\upsilon}_c = A\upsilon_c + \Omega_c(\eta_c, \upsilon_c;\varepsilon) \end{cases} \tag{5.4.32}$$

这里 $\bar{\Omega}_u$,Ω_c 以及 Ω_c 的一阶导数是 $O(\varepsilon+\delta)$阶的。

以上工作是为了把刻画 W_ε^{cu} 上流的方程组化为运用奇异扰动理论的标准模型。方程组(5.4.32)将被用于证明 W_ε^{cu} 在整个 M_ε 上的纤维化,而这又等价于寻求另外的坐标系(η_c, η_u),使得式(5.4.32)能部分解耦为下面的形式

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \Gamma(\eta_u, \eta_c;\varepsilon)]\eta_u \\ \dot{\eta}_c = A\eta_c + \bar{\Omega}_c(\eta_c;\varepsilon) \end{cases} \tag{5.4.33}$$

这里 $\Gamma \equiv \bar{\Omega}_u$ 在新坐标下的值,$\bar{\Omega}_c(\eta_c;\varepsilon) = \Omega_c(0, \eta_c;\varepsilon)$,即寻找一个坐标变换

$$(\eta_u, \upsilon_c) \to (\eta_u, \eta_c)$$

使得在坐标(η_u, η_c)之下,方程组中慢的变量能被解耦(η_c 方程中不耦合 η_u)。

假若上面的变量代换存在,那么在 $t \to -\infty$时 $\eta_u(t)$以一个快的速度(至少是 $\exp\frac{\sigma t}{2}$)趋近于0。这意味着关于 υ_c 的方程指数快地接近关于 η_c 的方程。因此,我们设 $\gamma_c = \upsilon_c - \eta_c$ 且有

$$\dot{\gamma}_c = A\gamma_c + \Omega_c(\eta_u, \gamma_c + \eta_c;\varepsilon) - \Omega_c(0, \eta_c;\varepsilon)$$

对上式从 $-\infty$ 到 t 积分得

$$\upsilon_c(t) - \eta_c(t) = \int_{-\infty}^t \exp[A(t-s)][\Omega_c(\eta_u, \gamma_c + \eta_c;\varepsilon) - \Omega_c(0, \eta_c;\varepsilon)]\mathrm{d}s$$

从而,坐标变换通过 $\upsilon_c(0)$给出

$$f^u(\eta_u(0), \eta_c(0);\varepsilon) \equiv \eta_c(0) + \int_{-\infty}^0 \exp[-As](\Omega_c - \bar{\Omega}_c)\mathrm{d}s \tag{5.4.34}$$

上式右端隐含着 f^u(即 $\upsilon_c(0)$)。因为积分号下的项是 $O(\varepsilon+\delta)$阶的,我们能够求出 f^u,它是上面方程的不动点且有性质

$$f^u(\eta_u, \eta_c;\varepsilon) = \eta_c + \tilde{f}^u(\eta_u, \eta_c;\varepsilon) \tag{5.4.35}$$

这里 $\tilde{f}^u$ 是一个 C^{l-2}函数,它的一阶导数是 $O(\delta+\varepsilon)$阶的且 $\tilde{f}(0, \eta_c;\varepsilon) = 0$。这就是纤维定理证明的基本思路。

注:纤维变换由下面的式子给出

$$\upsilon_u = \eta_u \quad , \quad \upsilon_c = f^u(\eta_u, \eta_c;\varepsilon)$$

要证明纤维定理,就是要证明纤维变换的存在性,这又转化为证明方程组

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \bar{\Omega}_u(\eta_u, \gamma_c + \eta_c;\varepsilon)]\eta_u \\ \dot{\gamma}_c = A\gamma_c + \Omega_c(\eta_u, \gamma_c + \eta_c;\varepsilon) - \Omega_c(0, \eta_c;\varepsilon) \end{cases}$$

的解的存在性。

定理 5.4.4 的证明:固定 M_ε 上的一条轨道 η_c,考虑下面的系统

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \bar{\Omega}_u(\eta_u, \gamma_c + \eta_c;\varepsilon)]\eta_u \\ \dot{\gamma}_c = A\gamma_c + \Omega_c(\eta_u, \gamma_c + \eta_c;\varepsilon) - \Omega_c(0, \eta_c;\varepsilon) \end{cases}$$

其中 $\gamma_c = v_c - \eta_c$。设 $a(\eta_c;\varepsilon) = \bar{\Omega}_u(0,\eta_c;\varepsilon)$，则上面的方程组能写为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_u = [\sigma_u^\varepsilon + a(\eta_c;\varepsilon) + \Psi(\eta_u,\gamma_c,\eta_c;\varepsilon)]\eta_u \\ \dot{\gamma}_c = A\gamma_c + \Phi(\eta_u,\gamma_c,\eta_c;\varepsilon) \end{cases} \tag{5.4.36}$$

这里 $\Psi(\eta_u,\gamma_c,\eta_c;\varepsilon) = \bar{\Omega}_u(\eta_u,\gamma_c+\eta_c;\varepsilon) - \bar{\Omega}_u(0,\eta_c;\varepsilon)$ 满足 $\Psi(0,0,\eta_c;\varepsilon)=0$。同样地，$\Phi(0,0,\eta_c;\varepsilon)=0$，而且 a、Ψ 和 Φ 是 $O(\varepsilon+\delta)$ 阶的。

接下来的证明过程同定理 5.4.2 的一样。我们定义取值在 H^1 中的连续函数 $\beta=(\eta_u,\gamma_c)$ 的范数为

$$\|\beta\|_\lambda = \sup_{t\leq 0}\left\{\exp\left[-\frac{\sigma t}{\lambda}\right]\|\beta(t)\|_{H^1}\right\}$$

化式(5.4.36)为积分方程组

$$\begin{cases} \eta_u(t) = G(t,0)\eta_u(0) + \int_0^t G(t,s)\Psi(\eta_u,\gamma_c,\eta_c;\varepsilon)\eta_u \mathrm{d}s \\ \gamma_c(t) = \int_{-\infty}^t \exp[A(t-s)]\Phi(\eta_u,\gamma_c,\eta_c;\varepsilon)\mathrm{d}s \end{cases}$$

这里 $G(t,s) = \exp\left[\int_s^t(\sigma_u^\varepsilon + a)\mathrm{d}\tau\right]$，并且要求在 $t\to-\infty$ 时 $\gamma_c(t)\to 0$。建立 Newton 迭代

$$\eta_u^{k+1}(t) = G(t,0)\eta_u(0) + \int_0^t G(t,s)\Psi(\eta_u^k,\gamma_c^k,\eta_c;\varepsilon)\eta_u^k\mathrm{d}s$$

$$\gamma_c^{k+1}(t) = \int_{-\infty}^t \exp[A(t-s)]\Phi(\eta_u^k,\gamma_c^k,\eta_c;\varepsilon)\mathrm{d}s$$

序列 $\beta^k = (\gamma_c^k,\eta_u^k)$ 的收敛性和光滑性同定理 5.4.2 的证明一样，简要叙述如下：

(1) 对于 $|\eta_u(0)|\leq\delta$，$\{\beta^k\}$ 是有定义的序列。假设对某个正整数 k，我们有 $\|\beta^k\|_{m_0}\leq C\delta$，这里 $m_0 = \frac{n_0}{l}$，则

$$\|\eta_u^{k+1}(t)\|_{H^1} \leq C(\delta+\varepsilon)\int_t^0 \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s) + \frac{\sigma s}{m_0}\right]\cdot$$

$$\|\beta^k\|_{m_0}\mathrm{d}s + C\delta\exp\left[\frac{\sigma t}{2}\right]$$

$$\|\gamma_c^{k+1}(t)\|_{H^1} \leq C(\varepsilon+\delta)\int_{-\infty}^t n_0\exp\left[\frac{\sigma}{n_0}(t-s) + \frac{\sigma s}{m_0}\right]\cdot$$

$$\|\beta^k\|_{m_0}\mathrm{d}s \leq C\frac{l}{l-1}m_0 n_0\|\beta^k\|_{m_0}\exp\left[\frac{\sigma t}{m_0}\right]$$

于是

$$\|\beta^{k+1}\|_{m_0} \leq C\delta\exp\left[\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{m_0}\right)t\right] + \frac{1}{2}C(\varepsilon+\delta)m_0 n_0\|\beta^k\|_{m_0}$$

选取 $\varepsilon\leq\varepsilon_0<\delta$，$\delta = \frac{1}{Cn_0^2}$，$C$ 是一个足够大的常数。则有

$$\|\beta^{k+1}\|_{m_0} \leq C\delta + \frac{1}{2}\|\beta^k\|_{m_0}$$

这表明 $\{\beta^k\}$ 是一个有界序列。

(2) 序列 β^k 收敛。函数 Φ 和 Ψ 是 C^{l-1} 的，并且这些表达式的所有项或者在一个大小为 δ 的邻域内被局部化，或者有一个 ε 系数。因此，上面的论证暗示了以下事实：

$$\|\beta^{k+1} - \beta^k\|_{m_0} \leq \frac{1}{2}\|\beta^k - \beta^{k-1}\|_{m_0}$$

这便给出了 β^k 的收敛性，$\beta^k\to\beta$，β 关于 t 连续且取值在 H^1 里，同时 $\|\beta\|_{m_0}\leq C\delta$。

(3) β 关于 $\eta_c(0)$，$\eta_u(0)$ 和 ε 是光滑的。这个结论的证明困难在于：$\|\eta_c(t)\|_{H^1}$ 在 $t<0$ 时可能以速度 $\exp\left[-\frac{\sigma t}{n_0}\right]$ 增加，并且 a，Φ，Ψ 依赖于 $\eta_c(t)$。假若 β^{k+1} 关于 $\eta_c(0)$ 求导，则有

$$\eta_u'^{k+1}(t) = \eta_u(0)G(t,0)\int_0^t a'\mathrm{d}\tau + \int_0^t G(t,s)\left(\int_s^t a'\mathrm{d}\tau\right)\Psi\eta_u^k\mathrm{d}s +$$

$$\int_0^t G(t,s)\{[\Psi'\eta'_c + \Psi'\eta'^k_u + \Psi'\gamma'^k_c]\eta^k_u + \Psi\eta'^k_u\}\mathrm{d}s$$

$$\gamma'^{k+1}_c(t) = \int_{-\infty}^t \exp[A(t-s)][\Phi'\eta'_c + \Phi'\eta'^k_u + \Phi'\gamma'^k_c]\mathrm{d}s$$

这里"$'$"表示不同的导数。

上面的方程组不能用 $\|\cdot\|_{m_0}$ 范进行估计，这是因为 a' 和 η'_c 在 $t<0$ 时以速度 $\exp\left[-\frac{\sigma t}{n_0}\right]$ 增长。不过，我们能够用 $\|\cdot\|_{2m_0}$ 范估计上面的方程组，关于 $\|\cdot\|_{2m_0}$ 范，它们有较慢的衰减率，即

$$\begin{aligned}\|\beta'^{k+1}(t)\|_{H^1} \leqslant\ & C\delta\exp\left[\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma}{n_0}\right)t\right] + \\ & C\delta\int_t^0 \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s)\right]\cdot \\ & \left\{\exp\left[\left(\frac{\sigma}{m_0}-\frac{\sigma}{n_0}\right)s\right] + \|\beta'^k(s)\|_{H^1}\right\}\mathrm{d}s + \\ & C\delta\int_{-\infty}^t \exp\left[\frac{\sigma}{n_0}(t-s)\right]\cdot \\ & \left\{\exp\left[\left(\frac{\sigma}{m_0}-\frac{\sigma}{n_0}\right)s\right] + \|\beta'^k(s)\|_{H^1}\right\}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

进一步，由于 $2m_0<n_0$，则当 $m_0>2$ 时有

$$\|\beta'^{k+1}(t)\|_{H^1} \leqslant C\delta\exp\left[\frac{\sigma t}{2m_0}\right][1+n_0m_0\|\beta'^k\|_{2m_0}]$$

这意味着 $\|\beta'^k\|_{2m_0}$ 有界，从而得到 β 关于 $\eta_c(0)$ 的光滑性。β 关于 $\eta_u(0)$ 和 ε 的光滑性类似可得。

同样地，我们能够用 $\|\cdot\|_{jm_0}$ 范估计 β^k 的 $j-1$ 阶导数，并且所有积分在 $jm_0<n_0$ 时均收敛。由于方程组(5.4.36)中的所有项都是 C^{l-1} 的，这个过程能够继续而得到系统的 C^{l-2} 解 β。

注：(1) 由 $m_0l=n_0$ 知，只要 $j<l$，便有 $jm_0<n_0$。可见 j 能取到 $l-1$，进而可估计 β^k 的 $l-2$ 阶导数。

(2) 在式(5.4.36)的非线性项中，有 Dh^c_u 这样的项，它是 C^{l-1} 的。又由于在讨论 $\|\beta'^{k+1}-\beta'^k\|_{H^1}$ 时，要涉及 $D^2h^c_u$，从而，β^k 的导数只能进行到 $l-2$。

现在，我们能够定义不变流形 W^{cu}_ε 的纤维，

$$\begin{aligned}f^u(\eta_c(0),\eta_u(0);\varepsilon) &= \eta_c(0)+\gamma_c(0) = \\ & \eta_c(0)+\int_{-\infty}^0 \exp[-As]\cdot \\ & [\Omega(\eta_u,\gamma_c+\eta_c;\varepsilon)-\Omega(0,\eta_c;\varepsilon)]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

也即是

$$\begin{aligned}v_c(0) &= f^u(\eta_c(0),\eta_u(0);\varepsilon) = \\ & \eta_c(0)+\int_{-\infty}^0 \exp[-As][\Omega(\eta_u,\gamma_c+\eta_c;\varepsilon) - \\ & \Omega(0,\eta_c;\varepsilon)]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

利用 f^u 的定义，并重新标度时间 $t\to t+\tau$，可得到函数 f^u 在流之下的不变性。因此

$$v_c(t) = f^u(\eta_c(t),\eta_u(t);\varepsilon)$$

假若初值 $\eta_u(0)$ 足够小，上式是有定义的。这种不变性意味着：如果使用 (η_c,η_u) 作为坐标去代替 (v_c,η_u)，则将解耦系统式(5.4.33)变为下面的形式(在 W^{cu}_ε 上)

$$\begin{cases}\dot{\eta}_u = [\sigma^\varepsilon_u+\Gamma(\eta_u,\eta_c;\varepsilon)]\eta_u \\ \dot{\eta}_c = A\eta_c+\bar{\Omega}_c(\eta_c;\varepsilon)\end{cases}$$

这里 (η_u,η_c) 即所谓纤维坐标，同时，纤维变换被给出。进而，有不稳定纤维

$$\mathscr{F}^u_{\eta_c} = \{(\eta_u,v_c): v_c = f^u(\eta_u,\eta_c;\varepsilon)\}$$

η_c 属于慢流形 M_ε 且被称为这条纤维的基点。

注：由于在纤维定义中，要求纤维是 C^2 的，即 f^u 是 C^2 的。在这里，可以证明 f^u 是 C^{l-2} 的，从而有条件 $l>3$(或 $l\geqslant 4$)。

5.4.3 在 M_ε 里 Q 的稳定流形

对于 $\alpha<\frac{1}{\omega}$，点 Q 作为在流式(5.2.1)下的定常解，其(J,θ,u)坐标为

$$\begin{cases} J_q = -\frac{\varepsilon}{2\omega}\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}+O(\varepsilon^2) \\ \theta_q = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}\right)-\pi+O(\varepsilon) \\ u_q = 0 \end{cases}$$

关于 Q 线性化方程组(5.4.8)，我们得到 Q 是鞍点，它有一个二维的不稳定流形 $W^u(Q)$ 和一个余维数为 2 的稳定流形 $W^s(Q)$。$W^u(Q)$ 与常值平面 Π_c 沿着曲线 C_ε^u 相交，与 W_ε^{cu} 沿着一条与 v_u 方向相切的曲线相交。Q 的局部稳定流形与 Π_c 沿着曲线 C_ε^s 相交，并且在一个余维数为 1 的子流形里与 M_ε 相交。

事实上，在点 Q 线性化方程组(5.4.8)，容易得到线性化方程组的系数矩阵，这个矩阵有特征值

$$\begin{cases} \sigma_q = \pm 2\sqrt{\varepsilon}\omega[1-\alpha^2\omega^2]^{1/4}-\varepsilon\alpha+O(\varepsilon^{3/2}) \\ \sigma_{s,u}^\varepsilon = \mp\sigma-\varepsilon d(1) \\ \lambda_j = \pm i\Omega_j-\varepsilon d(j), \quad j\geqslant 2 \end{cases}$$

这里 σ、Ω_j 分别由式(5.4.3)和式(5.4.4)给出。由此可见，点 Q 的线性化矩阵有两个特征值具有正实部，其余的全部具有负实部。

在这一节里，我们的兴趣集中在估计 $W=W^s(Q)\cap M_\varepsilon$ 的大小。特别地，我们将表明：局部的 W 能被看做一个阶为 1 的 C_ε^s 片与一个阶为 $O(\varepsilon^{3/4})$ 的 v_0 方向上的片的乘积。为了得到这些估计，我们运用第 5.2 节中的(r,β)坐标和第 5.3 节中的标准形式。

注意到，在平面 Π_c 上 Q 的稳定流形能被参数化

$$C_\varepsilon^s = \{y=(j,\theta): y=y_*(s;\nu)\}$$

这里 $\nu=\sqrt{\varepsilon}$，$s=\exp[\lambda\tau]$，且 y_* 满足

$$j_{*,\tau} = Y_1(j_*,\theta_*;\nu)$$

$$\theta_{*,\tau} = Y_2(j_*,\theta_*;\nu)$$

在 M_ε 上，关于坐标(j,θ,v_0)的流可利用方程组(5.4.13)并代 $J=\nu j$ 而得到

$$\begin{cases} j_t = \nu Y_1(j,\theta;\nu)+N_1(j,\theta,v_0;\nu) \\ \theta_t = \nu Y_2(j,\theta;\nu)+N_2(j,\theta,v_0;\nu) \\ v_{0t} = L_\varepsilon v_0+V_\varepsilon v_0+N_3(j,\theta,v_0;\nu) \end{cases} \tag{5.4.37}$$

为了估计 W 的大小，我们使用(r,β)坐标(在 Π_c 上由式(5.2.14)和式(5.2.16)所定义)。关于这组变量，在 C_ε^s 的一个邻域里，M_ε 上的流由如下方程组给出

$$\begin{cases} \dot r = \nu a(\beta;\nu)r+O(\nu r^2+v_0^2) \\ \dot\beta = \nu\lambda\beta+\nu c(\beta;\nu)r+O(\nu r^2+v_0^2) \\ \dot v_0 = L_\varepsilon v_0+V_\varepsilon v_0+O(\nu r v_0+\nu v_0^2+v_0^3) \end{cases} \tag{5.4.38}$$

a 和 c 是关于(β,ν)的光滑函数。

注意到：在空间中，C_ε^s 上流为

$$\begin{cases} r = 0 \\ \beta = \beta_*(t;\nu) = \beta_0\exp[\lambda\nu t] \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

这里 $0\leqslant\beta_0\leqslant s_0$，$t\geqslant 0$。为了构造一个包含 C_ε^s 的 Q 的局部稳定流形，我们沿着 C_ε^s 上的流线性化系统式(5.4.38)，并引入变量 $\gamma=\beta-\beta_*(t,\nu)$ 得

$$
\begin{cases}
\dot{r} = \nu a_*(t,\nu,\beta_0)r + N_{*1}(t,r,\gamma,v_0;\nu) \\
\dot{\gamma} = \nu\lambda\gamma + \nu c_*(t,\nu,\beta_0)r + N_{*2}(t,r,\gamma,v_0;\nu) \\
\dot{v}_0 = L_\varepsilon v_0 + V_*(t,\nu,\beta_0)v_0 + N_{*3}(t,r,\gamma,v_0;\nu)
\end{cases}
\tag{5.4.39}
$$

这里

$$
\begin{cases}
V_* = -4\nu j_*(s;\nu)S + \dfrac{\nu^2\sin(\theta_*(s;\nu))}{\sqrt{\omega^2 + \nu j_*(s;\nu)}}T \\
N_{*1} = O(\nu r^2 + \nu\gamma^2 + v_0^2) \\
N_{*2} = O(\nu r^2 + \nu\gamma^2 + v_0^2) \\
N_{*3} = O(\nu r^2 + \nu\gamma^2 + \nu v_0^2 + v_0^3)
\end{cases}
$$

接下来，我们对式(5.4.39)的线性流进行估计。方程组(5.4.39)的线性部分包括一个耦合常微分系统和一个偏微分方程，它们的系数与时间 t 有关。

常微分方程组的基本解由一个 2×2 矩阵给出

$$
\begin{bmatrix}
A_*(t,s;\beta_0,\nu) & 0 \\
\Gamma(t,s;\beta_0,\nu) & \exp[\nu\lambda(t-s)]
\end{bmatrix}
$$

这里

$$
A_* = \exp\left[\int_s^t \nu a_*\, d_{s'}\right]
$$

$$
\Gamma = \nu\int_s^t \exp[\nu\lambda(t-\alpha')]\,c_*(\alpha')A_*(\alpha',s;\beta_0,\nu)\mathrm{d}\alpha'
$$

我们注意到，若设 $\bar{a} = a(\beta_*,\nu) - a(0,\nu)$，那么

$$
a_* = \mu + \bar{a}
$$

而且

$$
|\bar{a}| \leqslant C\beta_0\exp[\nu\lambda t] \leqslant Cs_0\exp[\nu\lambda t]
$$

这里 μ 由式(5.2.10)给出。于是，对于 $t,s\geqslant 0$，有关于 A^* 的如下估计

$$
C_1\exp[\nu\mu(t-s)] \leqslant A_* \leqslant C_2\exp[\nu\mu(t-s)]
$$

这里 C_1, C_2 是不依赖于 ε 的常数。

为了得到 Γ 的界，我们注意到

$$
|c_*| \leqslant C|\beta_*|^2 \leqslant C\exp[2\nu\lambda t]
$$

这表明，对于 $t,s\geqslant 0$

$$
|\Gamma| \leqslant C\nu\left|\int_s^t \exp[\nu\lambda(t-\alpha')]\,|c_*(\alpha')|\cdot |A_*(\alpha',s;\beta_0,\nu)|\,\mathrm{d}\alpha'\right| \leqslant
$$

$$
C\nu\left|\int_s^t \exp[\nu\lambda(t-\alpha') + 2\nu\lambda\alpha' + \nu\mu(\alpha'-s)]\mathrm{d}\alpha'\right|
$$

因为

$$
\lambda + \mu = -2\alpha\nu + O(\nu^2) < 0
$$

则对于 $s,t\geqslant 0$，有

$$
|\Gamma| \leqslant C\nu|t-s|\exp[\nu\lambda(t-s)]
$$

这里 C 不依赖于 ε。

为了估计偏微分方程基本解的增长率，我们用线性算子 $L_\varepsilon + V_*(t,\nu,\beta_0)$ 的 Fourier 系数 $\mathscr{V}(k)$ 来表示这个线性算子。作 Fourier 展开，则 L_ε 对应的系数为

$$
\begin{pmatrix}
-\varepsilon d(k) & -k^2 \\
k^2 - 4\omega^2 & -\varepsilon d(k)
\end{pmatrix}
$$

这里 $k = 2,3,\cdots, d(k)\geqslant\alpha$ 是D的符号，具体地，有

$$
d(k) = \begin{cases}
\alpha + \beta k^2, & k < K \\
\alpha, & k \geqslant K
\end{cases}
$$

而 V_* 对应的系数为

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\nu^2\sin\theta_*(s;\nu)}{\sqrt{\omega^2+\nu j_*(s;\nu)}} \\ -4\nu j_*(s;\nu)-\dfrac{\nu^2\sin\theta_*(s;\nu)}{\sqrt{\omega^2+\nu j_*(s;\nu)}} & 0 \end{pmatrix}$$

我们设

$$\alpha_1=\frac{\sin\theta_*(s;\nu)}{\sqrt{\omega^2+\nu j_*(s;\nu)}},\quad \alpha_2=4j_*(s;\nu)$$

于是

$$\mathscr{L}(k)=\begin{pmatrix} -\varepsilon d(k) & -k^2+\varepsilon\alpha_1 \\ k^2-4\omega^2-\varepsilon\alpha_1-\nu\alpha_2 & -\varepsilon d(k) \end{pmatrix}$$

这里 α_1,α_2 是 $\exp[\nu\lambda t]$和 ν 的光滑函数,$k=2,3,\cdots$。算子 $\mathscr{L}(k)$ 的特征值 λ 满足

$$\begin{vmatrix} \lambda+\varepsilon d(k) & k^2-\varepsilon\alpha_1 \\ -k^2+4\omega^2-\nu\alpha_2-\varepsilon\alpha_1 & \lambda+\varepsilon d(k) \end{vmatrix}=0$$

即

$$\lambda_{1,2}=-\varepsilon d(k)\pm iD(k)$$

$$D(k)=\sqrt{(k^2-\varepsilon\alpha_1)(k^2-4\omega^2-\varepsilon\alpha_1-\nu\alpha_2)}$$

于是,$\mathscr{L}(k)$能被对角化,即存在

$$U(k)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{iD(k)}{-k^2+\varepsilon\alpha_1} & \dfrac{iD(k)}{k^2-\varepsilon\alpha_1} \end{bmatrix}$$

使得

$$U^{-1}\mathscr{L}(k)U=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

注意到 $U(k)$在空间$[\mathrm{span}\{\Pi_c,e_u,e_s\}]^{\perp}$上是有界的。因此,假若我们作 v_0 到 w 的变量替换满足

$$v_0=U(k)w(k)$$

则有

$$\dot{w}(k)=\Lambda w(k)-U^{-1}\dot{U}w(k)$$

这里 $U^{-1}\dot{U}$ 是有界的且满足

$$|U^{-1}\dot{U}|\leqslant\frac{C}{k^2}\varepsilon\exp[\nu\lambda t]$$

即 $U^{-1}\dot{U}$ 的每个元素有界并以$\frac{C}{k^2}\varepsilon\exp[\nu\lambda t]$为界。

事实上,

$$U^{-1}=\frac{1}{2M}\begin{bmatrix} M & -1\\ M & 1\end{bmatrix}$$

这里 $M=\dfrac{iD(k)}{k^2-\varepsilon\alpha_1}$有界($|M|\leqslant C$)。进而

$$U^{-1}\dot{U}=\frac{1}{2M}\begin{bmatrix}\dot{M} & -\dot{M}\\ -\dot{M} & \dot{M}\end{bmatrix}$$

其中 $\dot{M}$ 表示M 对 t 的导数。由于

$$\dot{M}=\frac{i[-\varepsilon\alpha'_1(k^2-4\omega^2-\varepsilon\alpha_1-\nu\alpha_2)+(k^2-\varepsilon\alpha_1)(\varepsilon\alpha'_1+\nu\alpha'_2)]}{2D(k)(k^2-\varepsilon\alpha_1)}+$$

$$\frac{iD(k)\varepsilon\alpha'_1}{2(k^2-\varepsilon\alpha_1)^2}$$

且

$$\alpha'_1=\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\lambda\nu\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}s}\exp[\lambda\nu t]$$

从而$|\alpha'_1|\leqslant C\nu\exp[\lambda\nu t]$。同理

$$|\alpha'_2|\leqslant C\nu\exp[\lambda\nu t]$$

于是

$$|\dot{M}|\leqslant\frac{C\nu}{k^2}[|\alpha'_1|+|\alpha'_2|]\leqslant$$

$$\frac{C\varepsilon}{k^2}\exp[\lambda\nu t]$$

这样便得到$|U^{-1}\dot{U}|$的估计式，其中 C 不依赖于 ε 和 k。这表明，若把 $\hat{w}(k)$方程化为积分方程

$$\hat{w}(k) = F(t,s;k)\hat{w}_0(k) + \int_s^t F(t,s';k)U^{-1}\dot{U}\hat{w}(k)\mathrm{d}s'$$

这里 $F(t,s;k) = \exp\left[\int_s^t A(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$。则对于 $t\geqslant s\geqslant 0$，有

$$|\hat{w}(k)| \leqslant C\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)| +$$

$$C\int_s^t \frac{\varepsilon}{k^2}\exp[-\varepsilon d(k)(t-s')]\exp[\nu\lambda s']|\hat{w}(k)|\mathrm{d}s'$$

因为 $\lambda<0$，则在 $t\geqslant s\geqslant 0$ 时有

$$\exp[-\varepsilon d(k)(t-s') + \nu\lambda s'] \leqslant 1$$

于是，

$$|\hat{w}(k)| \leqslant C\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)| +$$

$$C\varepsilon\int_s^t |\hat{w}(k)|\mathrm{d}s'$$

利用 Gronwall 不等式得

$$|\hat{w}(k)| \leqslant C\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)|$$

最后，如果我们用 $U(t,s)$表示 PDE 的基本解，则有估计式

$$\|U(t,s)v_{i0}\|_{H^1} \leqslant C\exp[-\varepsilon\alpha(t-s)]\|v_{i0}\|_{H^1}$$

这里，由于 $d(k)\geqslant\alpha$，则对于 $t\geqslant s\geqslant 0$，有

$$\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)] \leqslant \exp[-\varepsilon\alpha(t-s)]$$

下面，我们讨论 W 的大小。

定理 5.4.5 点 Q 在 M_ε 里有一个 C^1 局部稳定流形，它能够通过(β,v_{i0})参数化

$$W = \{(r,\beta,v_{i0}): r = f(\beta,v_{i0})\}$$

其中，$\beta\in[0,s_0]$，$\|v_{i0}\|_{H^1}\in[0,\varepsilon^{3/4}]$。而且，$f(\beta,0)=0$，$|r|\leqslant C\varepsilon$。

证明：利用线性估计和标准形式变换，定理的证明是标准化的。利用式(5.4.39)，我们对 $t\geqslant 0$ 建立积分方程组

$$\begin{cases} r = \int_t^\infty A_*(t,s)N_{*1}\mathrm{d}s \\ \gamma = \int_0^t [\exp\{\nu\lambda(t-s)\}N_{*2} + \Gamma(t,s)N_{*1}]\mathrm{d}s \\ v_0 = U(t,0)v_{i0} + \int_0^t U(t,s)N_{*3}\mathrm{d}s \end{cases}$$

利用 A_*，Γ 和 U 的线性估计，以及 N_* 的阶，我们有

$$\begin{cases} |r| \leqslant C\int_t^\infty \exp[\nu\mu(t-s)][\nu r^2 + \nu\gamma^2 + \|v_0\|_{H^1}^2]\mathrm{d}s \\ |\gamma| \leqslant C\int_0^t \exp[\nu\lambda(t-s)][1+\nu\lambda(t-s)]\cdot \\ \qquad [\nu r^2 + \nu\gamma^2 + \|v_0\|_{H^1}^2]\mathrm{d}s \\ \|v_0\|_{H^1} \leqslant C\int_0^t \exp[-\varepsilon\alpha(t-s)][\nu(\gamma^2 + r^2 + \|v_0\|_{H^1}^2) + \\ \qquad \|v_0\|_{H^1}^3]\mathrm{d}s + \exp(-\varepsilon\alpha t)\|v_{i0}\|_{H^1} \end{cases}$$

对(r,γ,v_0)作$\sqrt{\varepsilon}$的尺度变换，产生解的 $O(\sqrt{\varepsilon})$先验估计。因为我们仅需 $O(\varepsilon^\mu)$估计($\mu<1$)。则假若 $\|v_{i0}\|_{H^1}\leqslant C\varepsilon^{3/4}$，便可推出

$$\begin{cases} |r| \leqslant C\varepsilon\exp[-\varepsilon\alpha t] \\ |\gamma| \leqslant C\varepsilon\exp[-\varepsilon\alpha t] \\ \|v_0\|_{H^1} \leqslant C\varepsilon^{3/4}\exp[-\varepsilon\alpha t] \end{cases}$$

这里 $t\geqslant 0$。这个先验估计允许我们应用 Newton 迭代到积分方程

组，从而表明它们有惟一解，且满足相同的估计式。定义

$$f(\beta_0, v_{i0}) = \int_0^\infty A_*(0,s)N_{*1}\mathrm{d}s \qquad (5.4.40)$$

这里 f 对于 β_0 的依赖性隐含于 A_* 和 N_{*1} 里。函数 f 的可微性由 A_* 和 N_* 的可微性得到。

5.5 整体可积理论

5.5.1 Lax 对

未扰动 NLS 方程($\varepsilon=0$)是函数空间 $H^1_{e,p}$ 上的 Hamilton 系统

$$-iq_t = \frac{\delta}{\delta \bar{q}}H \qquad (5.5.1)$$

其 Hamilton 量为

$$H = \int_0^{2\pi}[q_x\bar{q}_x - (q\bar{q})^2 + 2\omega^2 q\bar{q}]\mathrm{d}x$$

众所周知，这是一个完全可积系统，有 Lax 对

$$\begin{cases} \varphi_x = U^{(\lambda)}\varphi \\ \varphi_t = V^{(\lambda)}\varphi \end{cases} \qquad (5.5.2)$$

这里

$$\begin{cases} U^{(\lambda)} = i\lambda\sigma_3 + i\begin{bmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0 \end{bmatrix} \\ V^{(\lambda)} = i[2\lambda^2 - (q\bar{q} - \omega^2)]\sigma_3 + \begin{bmatrix} 0 & 2i\lambda q + q_x \\ 2i\lambda\bar{q} - \bar{q}_x & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

式中 σ_3 表示第三 Pauli 矩阵，即 $\sigma_3=\mathrm{diag}(1,-1)$。这个超定方程组是相容的($\partial_t\varphi_x=\partial_x\varphi_t$)，当且仅当系数 q 满足 NLS 方程。因此，我们能用散射反演方法求解 NLS 方程的解 $q(x,t)$。

5.5.2 Zakharov-Shabat 谱问题

现在，我们讨论式(5.5.2)的“空间流”。NLS 方程的积分通过

利用微分算子的谱理论而得到。考虑微分算子 $\mathrm{L}=\mathrm{L}(q)$，有

$$\mathrm{L} = -i\sigma_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix}$$

它被看作具有稠密域 H^1 的空间 $L^2(R)$ 上的算子。L的谱 $\sigma(\mathrm{L})$ 是满足特征值问题

$$\mathrm{L}\psi = \lambda\psi \qquad (5.5.3)$$

的所有复 λ 值的集合的闭包，其中特征函数 $\psi(x)$ 对于 $x\in(-\infty,\infty)$ 是有界的。因为 q 是 x 的周期函数，Floquet 理论能被用于分析算子的谱。

设 $M=M(x;\lambda;q,\bar{q})$ 是线性问题式(5.5.3)满足初值条件的基本矩阵解，即有

$$\mathrm{L}M = \lambda M$$

$$M(0;\lambda;q,q) = I$$

我们应用 M 定义转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 如下：

$$T(\lambda;q,q) = M(2\pi;\lambda;q,\bar{q})$$

那么，谱 $\sigma(\mathrm{L})$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 在单位圆上有特征值的一切 λ 的集合。因为 $\det T=1$，我们利用 Floquet 判别式来刻画谱，而 Floquet 判别式 Δ 为

$$\Delta: C\times H^1_{e,p}\times H^1_{e,p}\to C, \qquad \Delta(\lambda;q,\bar{q}) = \mathrm{tr}[T(\lambda;q,\bar{q})]$$

利用 Δ，则谱 $\sigma(\mathrm{L})$ 由下式给出

$$\sigma(\mathrm{L}(q)) = \{\lambda\in C: \Delta(\lambda;q,q)\text{ 是实的且 } -2\leqslant\Delta\leqslant 2\}$$

命题 5.5.1

(Ⅰ) Floquet 判别式 $\Delta(\lambda;q,\bar{q})$ 对于 $\lambda,q,\bar{q}$ 为整函数。

(Ⅱ) Δ 的一阶变分有如下表示：

$$\delta\Delta(\lambda;q,\bar{q}) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\delta\Delta}{\delta q(x)}\delta q(x) + \frac{\delta\Delta}{\delta\bar{q}(x)}\delta\bar{q}(x)\right]\mathrm{d}x$$

其中

$$
\begin{cases}
\dfrac{\delta}{\delta q(x)}\Delta(\lambda;q,\bar{q}) = -\dfrac{i}{2}\mathrm{tr}\left[M^{-1}(x)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}M(x+2\pi)\right]\\
\dfrac{\delta}{\delta \bar{q}(x)}\Delta(\lambda;q,\bar{q}) = -\dfrac{i}{2}\mathrm{tr}\left[M^{-1}(x)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}M(x+2\pi)\right]
\end{cases}
\tag{5.5.4}
$$

这里 $M(x)=M(x;\lambda;q,\bar{q})$表示基本解矩阵。一个类似的表达式适用于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Delta$。

为证明命题的第(Ⅰ)部分,把关于 M 的线性微分方程改写成积分方程

$$
M(x) = \exp(i\sigma_3\lambda x) + \int_0^x \exp[i\sigma_3\lambda(x-y)]\cdot \begin{bmatrix}0 & iq(y)\\ i\bar{q}(y) & 0\end{bmatrix}M(y)\mathrm{d}y
$$

利用迭代产生一个标准的级数表达式,它的每一项由 q 和 $\bar{q}$ 的如下形式的多项式构成

$$
q(y_1)\cdots q(y_n)\bar{q}(y_{n+1})\cdots\bar{q}(y_m)
$$

这个级数是一致收敛的[114,98]。因此,Δ 关于 $q,\bar{q}$ 为整函数,对于 λ 的解析性的证明是类似的。

对于命题第(Ⅱ)个结论中一阶变分的证明,可由下式计算:

$$
(\mathrm{L}-\lambda)M = 0,\quad M(0) = I
$$

$$
(\mathrm{L}-\lambda)\delta M = \begin{bmatrix}0 & \delta q\\ -\delta\bar{q} & 0\end{bmatrix},\quad \delta M(0) = 0
$$

我们通过参数的变分求解 δM,连同定义

$$
\delta\Delta = \mathrm{tr}[\delta M(1)]
$$

即得到所需表达式。

注:这个命题是相当重要的。它除了提供一阶变分的显式公式外,还表明 Floquet 判别式比 Hamilton 量 H 具有更好的光滑性(关于 q 和$\bar{q}$)。下面的命题表明,Floquet 判别式关于 NLS 方程生成了一族常值运动(constants of the motion)。

命题 5.5.2

(Ⅰ) Floquet 判别式 Poisson 可换:

$$
\{\Delta(\lambda;q,\bar{q}),\Delta(\lambda';q,\bar{q})\} = 0,\quad \forall\lambda,\lambda'
$$

其中,Poisson 括号定义为

$$
\{F,G\} = \int_0^{2\pi} i\left(\frac{\delta F}{\delta q}\cdot\frac{\delta G}{\delta\bar{q}} - \frac{\delta F}{\delta\bar{q}}\cdot\frac{\delta G}{\delta q}\right)\mathrm{d}x
$$

(Ⅱ) $\Delta(\lambda;q,\bar{q})$是关于 NLS 方程的常值运动,因为它与 Hamilton 量 H 的 Poisson 括号为零:

$$
\{\Delta(\lambda;q,\bar{q}),H(q,\bar{q})\} = 0,\quad \forall\lambda
$$

因此,$\Delta(\lambda;q,\bar{q})$对于 λ 生成 NLS 方程的一族常值运动。

证明:见文献[110]。

关于L的谱理论,困难在于这个算子不是自相伴的。不过,谱的某些性质能够得到。L的谱产生谱带,不必是实的,对于周期或反周期特性值 λ_j,有 $\Delta(\lambda_j)=\pm 2$。

现定义 Δ 的临界点和重点。Δ 的临界点$\lambda^c(q)$即是满足如下条件的点

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Delta(\lambda;q,\bar{q})\mid_{\lambda^c(q)} = 0
$$

而一个重点,用 λ^m 表示,它既是临界点且有

$$
\Delta(\lambda^m,q,\bar{q}) = \pm 2
$$

λ^m 的代数重数定义为$\Delta(\lambda)\pm 2$ 的零点的阶数,它通常为 2,但也可超过 2。当它等于 2 时,被称为双重点,用 λ^d 表示。λ^m 的几何重数定义为L关于 λ^m 的特征子空间的维数,或者等于 1,或者为 2(因为L是关于二元向量的一阶微分算子)。

实轴是L的谱的子集，即 $R\subset\sigma(L)$。借助于与L的非自相伴性直接相关的L的谱的性质，我们考虑这样的临界点 λ^c，$-2<\Delta(\lambda^c)<2$。此时的临界点为谱的分叉点。关于这方面谱理论的详细讨论参见文献[98]。

5.5.3 基本例子

考虑 $q(x,t)$与 x 无关，即

$$q(x,t)=c\exp\{-i[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]\}$$

在这种情况下，Lax 对的两个线性无关解为

$$\begin{pmatrix}\psi_1^{(\pm)}\\ \psi_2^{(\pm)}\end{pmatrix}=\exp\{\pm i[\kappa(\lambda)(x+2\lambda t)]\}\cdot\begin{pmatrix}c\exp\{-i[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]/2\}\\ [\pm\kappa(\lambda)-\lambda]\exp\{i[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]/2\}\end{pmatrix}\tag{5.5.5}$$

这里

$$\kappa(\lambda)=\sqrt{\lambda^2+c^2}$$

在这个例子中，取这样的空间无关解 $q(x,t)$是非常有用的。首先，线性算子L的谱容易从 Floquet 判别式出发进行计算，这时

$$\Delta(\lambda;q(\cdot,t;c,\gamma))=2\cos2\pi\kappa(\lambda)=2\cos[2\pi(\lambda^2+c^2)^{1/2}]$$

由此可得

$$\kappa(\lambda_j)=\frac{j}{2}$$

注意到L的连续谱由实轴和虚轴上的谱带构成。所有临界点除原点外均为双重点。对于 $c\approx\omega$，一个双重点在谱带上位于上半平面，它的共轭也是一个双重点。所有其他的双重点(可数个)在实轴上。

最后，让 q 表示一个小的扰动

$$q(x,t)\approx c\exp\{-i[2(c^2-\omega^2)t-\gamma]\}$$

利用正则扰动理论，我们能够得到关于谱 $\sigma[L(q)]$的以下结论：

(1) 一般地，在每一个实双重点，会出现一个复的谱的小带。

(2) 在两个复的双重点，出现一个分叉。特别地，在谱带里，或出现一个间隔，或出现一个叉。

在整体可积理论的研究中，人们通常对于特解 $q(x,t)$的时间稳定或不稳定性极感兴趣。而非线性 Schrödinger 方程的完全可积性允许我们讨论这一问题。但是，我们仅需要在 $q(x,t)$为空间无关解这一特殊情况下的一些结果。

5.5.4 同宿轨道和“胡须环”(Whikered Tori)

利用 Bäckland(Darboux)变换，我们能够指数化线性化解，从而得到非线性 Schrödinger 方程的整体解(同宿轨道)。固定一个非线性 Schrödinger 方程的周期解 q，它关于时间 t 是拟周期的。对于 q，线性算子L有一个几何重数为 2 的复的双重点 ν，并有一个非线性 Schrödinger 方程不稳定性。用$(\boldsymbol{\phi}^+,\boldsymbol{\phi}^-)$表示当 $\lambda=\nu$ 时，Lax 对的两个线性无关解，线性系统在(q,ν)处的一般解为

$$\boldsymbol{\phi}(x,t;\nu;c_1,c_2)=c_1\boldsymbol{\phi}^++c_2\boldsymbol{\phi}^-\tag{5.5.6}$$

利用$\boldsymbol{\phi}$定义一个变换矩阵 G

$$G=G(\lambda;\nu;\boldsymbol{\phi})\equiv N\begin{pmatrix}\lambda-\nu & 0\\ 0 & \lambda-\bar{\nu}\end{pmatrix}N^{-1}\tag{5.5.7}$$

这里

$$N=\begin{bmatrix}\phi_1 & -\bar{\phi}_2\\ \phi_2 & \bar{\phi}_1\end{bmatrix}\tag{5.5.8}$$

然后，我们定义 $Q(x,t)$和$\boldsymbol{\Psi}$为

$$Q(x,t)\equiv q(x,t)+2(\nu-\bar{\nu})\frac{\phi_1\bar{\phi}_2}{\phi_1\bar{\phi}_1+\phi_2\bar{\phi}_2}\tag{5.5.9}$$

和

$$\boldsymbol{\Psi}(x,t;\lambda)\equiv G(\lambda;\nu;\boldsymbol{\phi})\,\boldsymbol{\psi}(x,t;\lambda)\tag{5.5.10}$$

这里ψ为 Lax 在(q,λ)的解。式(5.5.9)、式(5.5.10)分别是位势和特征函数的 Bäcklund 变换。

定理 5.5.3 设 $q(x,t)$是 NLS 的一个周期解,它是线性不稳定的且有与 $\sigma(\mathrm{L}(q))$中一个复双重点 ν 相关的指数不稳定性,进一步假设这个复双重点有几何重数 2,让$(\boldsymbol{\phi}^+,\boldsymbol{\phi}^-)$表示 Lax 对在$(q,\nu)$处的一个特征基,并且通过式(5.5.9)、式(5.5.10)定义 $Q(x,t)$和$\boldsymbol{\Psi}(x,t;\lambda)$,则

Ⅰ. $Q(x,t)$是 NLS 方程的一个解且有空间变量的 2π 周期;

Ⅱ. $\sigma(\mathrm{L}(Q))=\sigma(\mathrm{L}(q))$;

Ⅲ. $Q(x,t)$同宿到 $q(x,t)$。即当 $t\to\pm\infty$ 时 $Q(x,t)$以 $\exp[-\sigma_\nu|t|]$指数地趋于 $q_{\theta_\pm}(x,t)$。这里 $q_{\theta_\pm}$是 q 的一个"环变换"(沿环移动),σ_ν 是和复双重点ν 相关的非零增长率。关于这个增长率和变换参数 $\theta_\pm$的显式表达式能够得到。

Ⅳ. $\boldsymbol{\Psi}$是线性系统式(5.5.3)在(Q,λ)处的解。

定理的证明可参见文献[34]关于 Sine-Gordon 模型的讨论。具体地,我们通过式(5.5.10)定义$\boldsymbol{\Psi}$,利用原来的 Lax 对在(q,λ)处计算$\partial_x\boldsymbol{\Psi}$和$\partial_t\boldsymbol{\Psi}$。然后表明,若 Q 由式(5.5.9)定义,则$\boldsymbol{\Psi}$是 Lax 对在(Q,λ)处的解。再利用 Lax 对的相容性得到 $Q(x,t)$是非线性 Schrödinger 方程的解。关于 x 的周期性,可以通过选择一个双重点 ν 作为变换参数而得到。其他的性质可以直接验证。

针对 5.3 节中的基本例子,我们有

$$\Delta(\lambda;q)=2\cos[2\pi\kappa(\lambda)],\kappa(\lambda)=\sqrt{\lambda^2+c^2}$$

取 $\kappa(\nu)=\frac{1}{2}$,则 $\nu=\frac{i}{2}\sqrt{4c^2-1}$。进一步,由式(5.4.1)知,$q$ 是不稳定的,且有线性增长率

$$\sigma=\sqrt{4c^2-1}=2|\nu|$$

利用这些公式和特征函数式(5.5.5),并具体化关于同宿轨道 $Q(x,t)$的一般公式得

$$q_h^{\pm}=\left\{\frac{\cos 2p-i\sin 2p\tanh\tau\pm\sin p\,\mathrm{sech}\,\tau\cos x}{1\mp\sin p\,\mathrm{sech}\,\tau\cos x}\right\}q \tag{5.5.11}$$

其中

$$\tau=\sigma(t+t_0),\quad e^{ip}=\frac{1+i\sigma}{2c}$$

事实上,在这里,Lax 对的两个线性无关解为

$$\begin{pmatrix}\psi_1^+\\ \psi_2^+\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}ix-\frac{\sigma}{2}t}\begin{pmatrix}c\mathrm{e}^{-i\delta(t)}\\ \frac{1-i\sigma}{2}\mathrm{e}^{i\delta(t)}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1^-\\ \psi_2^-\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ix+\frac{\sigma}{2}t}\begin{pmatrix}c\mathrm{e}^{-i\delta(t)}\\ -\frac{1+i\sigma}{2}\mathrm{e}^{i\delta(t)}\end{pmatrix}$$

其中 $\delta(t)=(c^2-\omega^2)t-\frac{\gamma}{2}$,从而 $q=c\mathrm{e}^{-2i\delta(t)}$。

令 Lax 对的一般解

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\psi_1^+\\ \psi_2^+\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\psi_1^-\\ \psi_2^-\end{pmatrix}$$

这里 c_1、c_2 为复数,c 为非零实数,则

$$\phi_1\bar{\phi}_1=c^2(c_1\bar{c}_1\mathrm{e}^{-\sigma t}+c_2\bar{c}_2\mathrm{e}^{\sigma t}+c_1\bar{c}_2\mathrm{e}^{ix}+c_2\bar{c}_1\mathrm{e}^{-ix})$$

$$\phi_2\bar{\phi}_2=c^2(c_1\bar{c}_1\mathrm{e}^{-\sigma t}+c_2c_2\mathrm{e}^{\sigma t}+c_1\bar{c}_2\mathrm{e}^{ix}+c_2\bar{c}_1\mathrm{e}^{-ix})+$$
$$c_1c_2\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sigma}{2}\right)\mathrm{e}^{ix}+c_2\bar{c}_1\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sigma}{2}\right)\mathrm{e}^{-ix}$$

从而

$$\phi_1\bar{\phi}_1+\phi_2\bar{\phi}_2=2c^2(c_1\bar{c}_1\mathrm{e}^{-\sigma t}+c_2\bar{c}_2\mathrm{e}^{\sigma t}+c_1\bar{c}_2\mathrm{e}^{ix}+c_2\bar{c}_1\mathrm{e}^{-ix})-$$
$$\frac{1}{2}(c_1\bar{c}_2\mathrm{e}^{ix}+c_2\bar{c}_1\mathrm{e}^{-ix})+\frac{i\sigma}{2}(c_1c_2\mathrm{e}^{ix}-c_2\bar{c}_1\mathrm{e}^{-ix})$$

又

$$\phi_1\bar{\phi}_2 = q\left\{c_1\bar{c}_1\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sigma}{2}\right)e^{-\sigma t} + c_2c_2\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sigma}{2}\right)e^{\sigma t} + c_1\bar{c}_2e^{ix}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sigma}{2}\right) + c_2\bar{c}_1e^{-ix}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sigma}{2}\right)\right\}$$

$$2(\nu-\bar{\nu})\phi_1\bar{\phi}_2 = 2i\sigma\phi_1\bar{\phi}_2 = -4c^2q(c_1\bar{c}_1e^{-\sigma t} + c_2\bar{c}_2e^{\sigma t} + c_1\bar{c}_2e^{ix} + c_2\bar{c}_1e^{-ix}) + q[(c_1\bar{c}_2e^{ix} + c_2\bar{c}_1e^{-ix}) - i\sigma(c_1c_2e^{ix} - c_2\bar{c}_1e^{-ix})] + q[(1+i\sigma)c_1\bar{c}_1e^{-\sigma t} + (1-i\sigma)c_2\bar{c}_2e^{\sigma t}]$$

利用 Darboux 变换公式，有

$$Q(x,t) = q + \frac{2(\nu-\bar{\nu})\phi_1\bar{\phi}_2}{|\phi_1|^2+|\phi_2|^2} = -q + \frac{q[(1+i\sigma)c_1\bar{c}_1e^{-\sigma t} + (1-i\sigma)c_2\bar{c}_2e^{\sigma t}]}{|\phi_1|^2+|\phi_2|^2} = -q + \left\{q\left[\frac{1}{2}(c_1\bar{c}_1e^{-\sigma t} + c_2\bar{c}_2e^{\sigma t})\frac{1}{2c^2} - \frac{1}{2}i(c_2\bar{c}_2e^{\sigma t} - c_1\bar{c}_1e^{-\sigma t})\frac{\sigma}{2c^2}\right]\right\}\Big/\left\{\frac{1}{4c^2}(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)\right\}$$

设 $e^{ip} = \frac{1+i\sigma}{2c}$，并选取 c_1,c_2 满足

$$c_1\bar{c}_2 = \frac{\sigma-i}{2c},\text{或者 } c_2\bar{c}_1 = \frac{\sigma+i}{2c}$$

则有

$$\cos 2p = \frac{1}{2c^2}-1,\qquad \sin 2p = \frac{\sigma}{2c^2}$$

进一步，

$$\frac{1}{4c^2}(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2) = \frac{1}{2}[c_1\bar{c}_1e^{-\sigma t} + c_2c_2e^{\sigma t}] + \sin p\cos x$$

于是

$$Q(x,t) = -q + \left\{q\left[\frac{1}{2}(c_1\bar{c}_1e^{-\sigma t} + c_2\bar{c}_2e^{\sigma t})\cdot(\cos 2p+1) - \frac{1}{2}i(c_2\bar{c}_2e^{\sigma t} - c_1c_1e^{-\sigma t})\sin 2p\right]\right\}\Big/\left\{\frac{1}{2}[c_1c_1e^{-\sigma t} + c_2\bar{c}_2e^{\sigma t}] + \sin p\cos x\right\}$$

再令 $c_1\bar{c}_1 = e^{-\sigma t_0}$，$c_2\bar{c}_2 = e^{\sigma t_0}$，并假设 $\sigma(t+t_0) = \tau$，则

$$Q(x,t) = -q + \frac{q[\cos 2p + 1 - i\sin 2p\tanh\tau]}{1+\sin p\cos x\operatorname{sech}\tau} = \left\{\frac{\cos 2p - i\sin 2p\tanh\tau - \sin p\operatorname{sech}\tau\cos x}{1+\sin p\cos x\operatorname{sech}\tau}\right\}q$$

这便是 q_h^- 的表达式。

在式(5.5.11)中，± 表示一个“数字 8”的图形的两叶。注意到 $-\cos x = \cos(x+\pi)$，这表明“+”的一叶表示中心在 $x=0$ 处激发，另一叶“-”的表示中心在 $x=\pi$ 处激发。因此，式(5.5.11)提供了一个“胡须环”的显式表达式。而从另外的观点看，它提供了不稳定流形的显式表达式。

$$W^u(S) = W^s(S) = \bigcup_{\gamma,t_0,\pm} q_h^{\pm}(t;\gamma,t_0,c)$$

5.5.5 一个重要的不变量

在这一节里，我们引入一个重要的且非常有用的常值运动。固定一个位势 $q_0 \in H^1_{e,p}$，它有纯实的或者纯虚的临界点 λ^c，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta(\lambda;q_0)|_{\lambda^c} = 0$$

令 $N_b = N_b(q_0)$ 表示 $H^1_{e,p}$ 中 q_0 的一个小邻域，并把临界点视为这个邻域上的泛函，$\lambda^c = \lambda^c(q)$：

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta(\lambda;q_0)\mid_{\lambda^c(q)} = 0;\quad \lambda^c(q_0) = \lambda^c$$

利用纯实(或纯虚)的临界点,引入重要不变量 $F: N_b \to R$,且

$$F: = \Delta(\lambda^c(q);q) \tag{5.5.12}$$

命题 5.5.4 如果对所有 $q\in N_b$, $\frac{d^2}{d\lambda^2}\Delta(\lambda;q)\neq 0$,则 $F:N_b\to R$ 是光滑的。

证明: 假若 $\lambda^c(q)$可微,则有

$$\frac{\delta F}{\delta q} = \frac{\delta}{\delta q}\Delta(\lambda^c(q);q) = \Delta'(\lambda^c(q);q)\frac{\delta\lambda^c}{\delta q} + \frac{\delta\Delta}{\delta q} = \frac{\delta\Delta}{\delta q}(\lambda;q)\mid_{\lambda=\lambda^c(q)}$$

而 $\lambda^c(q)$是光滑的,且由 $\Delta'(\lambda^c(q);q)=0$ 推得

$$\Delta''(\lambda^c(q);q)\frac{\delta\lambda^c}{\delta q} + \frac{\delta\Delta'}{\delta q} = 0$$

于是,假若 $\Delta''(\lambda^c(q);q)\neq 0$,我们能得到任意阶的连续微分。

注:若 $q_b\in H^1_{e,p}$满足$\Delta''[\lambda^c(q_b);q_b]=0$,则 q_b 是函数 $F(q)$的分支点,这种分支对整体理论产生挑战性的困难,当我们讨论函数 $F(q)$时,为回避分支点,而加上条件 $\Delta''[\lambda^c(q);q]\neq 0$ 是明智的

我们称式(5.5.5)所给出的具平面波形式的特征函数为 Bloch 函数。设$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(x,\lambda)$表示 Bloch 函数,即 Lax 对在$(q,\lambda)$处的解,这些函数通过一个周期上的输运条件所决定。

$$\boldsymbol{\psi}(x+2\pi,\lambda) = \rho(\lambda)\,\boldsymbol{\psi}(x,\lambda) \tag{5.5.13}$$

这里 $\rho(\lambda)$表示 Floquet 乘子,它可用 Floquet 判别式表示

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2}[\Delta(\lambda) + \sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}] \tag{5.5.14}$$

在$(\lambda,\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4})$的黎曼面上,函数 ρ 和$\boldsymbol{\psi}$是确定的,且$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(x,\lambda)$表示整个 λ 的两叶上$\boldsymbol{\psi}$的值。在分支点(简单周期和反周期点)上,两叶相交,$\boldsymbol{\psi}^{\pm}$变为线性相关。这与在一个单特征值处,特征空间是一维的这一事实一致。在实的重点处,$\boldsymbol{\psi}^{\pm}$仍线性无关,而在复的重点处,它们可线性无关,而不必相关。在复重点处的这两种可能性对非自伴谱问题而言是一个关键。

在任何情况下,对于固定的 λ,这些 Bloch 特征函数均能够由基本解矩阵 $M(x;\lambda)=\{Y^{(1)}(x;\lambda),Y^{(2)}(x;\lambda)\}$的列向量显式表示,

$$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(x;\lambda) = \alpha^{\pm}\{M_{21}(1;\lambda)Y^{(1)}(x;\lambda) + [M_{22}(1;\lambda)-\rho^{\pm}(\lambda)]Y^{(2)}(x;\lambda)\} \tag{5.5.15}$$

其中 $\alpha^{\pm}$表示规范化常数。

利用这些 Bloch 函数,能得到 Floquet 判别式的梯度的漂亮表达式。

推论 5.5.5 若 λ 不是分支点(即 λ 不是周期或反周期特征值),则

$$\frac{\partial}{\delta\boldsymbol{q}}\Delta(\lambda;q,q) = i\frac{\sqrt{\Delta^2-4}}{W[\boldsymbol{\psi}^+,\boldsymbol{\psi}^-]}\begin{bmatrix}\psi_2^+(x;\lambda)\psi_2^-(x;\lambda)\\ -\psi_1^+(x;\lambda)\psi_1^-(x;\lambda)\end{bmatrix} \tag{5.5.16}$$

这里$\boldsymbol{q}=(q,\bar{q})^{\mathrm{T}}$, $W(\boldsymbol{\psi}^+,\boldsymbol{\psi}^-)$表示 ψ^+ 和 ψ^- 的朗斯基行列式。利用连续性,这个表达式能扩展到周期或反周期特征值。

利用式(5.5.16),我们有下面的命题。

命题 5.5.6

$$\operatorname{grad}F(q,\bar{q}) = i\frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda^c)-4}}{W[\psi^+,\psi^-]}\begin{bmatrix}\psi_2^+(x;\lambda^c)\psi_2^-(x;\lambda^c)\\ -\psi_1^+(x;\lambda^c)\psi_1^-(x;\lambda^c)\end{bmatrix} \tag{5.5.17}$$

关于 F 的临界点,有如下定理。

定理 5.5.7 位势 q 是函数 F 的一个临界点,当且仅当 $\lambda^c(q)$

是一个有几何重数 2 的重点。

注:若 λ^c 是一个实的重点,那么它的几何重数总是 2。因此,若 $\lambda^c(q)$是一个实二重点,则位势 q 是 F 的一个临界点。而如果 $\lambda^c(q)$是一个复的二重点,它的几何重数或者为 2,或者为 1。那么,q 可以是,也可以不是 F 的临界点。

为了理解 F 的临界点,我们首先注意到,在一般情况下,非线性 Schrödinger 水平集是无穷维环面 $T^\infty = S \times S \times S \cdots$,这里的第 j 个圆的半径为 $r_j = |\Delta(\lambda_j^c) \mp 2|$。对于 q_*,如果 $\lambda_j^c(q_*)$是一个重点($\Delta(\lambda_j^c) = \pm 2$),则 $r_j = 0$。在这种情况下,函数 q_* 在奇异环面上。而关于这种有 $r = \Delta(\lambda^c) \mp 2 = 0$ 的奇异环面,在它上面的任何 q_* 都是 F 的临界点。

临界环的存在性能够由逆谱理论得到,利用有限亏格 θ 函数,逆谱理论能被用于构造临界环,文献[98]通过计算在 q_* 处 F 的海赛矩阵(Hessian)的显式表示,进一步研究了这些临界环面。如果重点 $\lambda^c(q_*)$是实的,F 的海赛矩阵表明在 q_* 处 F 或者是最大值或者是最小值。不过,当 $\lambda^c(q_*)$为纯虚数二重点时,F 有一个鞍型结构,此时,假若 F 是 NLS 方程的 Hamilton 量,那么,q_* 是一个不稳定不动点,然而,F 仅是 NLS 方程 Hamilton 量 H 的对合量。尽管如此,当 q_* 在奇异环面上时,它是不稳定的(双曲的)。我们假设 $\lambda^c(q_*) = \nu$ 是复双重点,而 q_* 具有 NLS 不稳定性,那么,NLS 流的 Lax 对能被用于建立 Bäcklund 变换 $q_* \to q_h$,并提供临界环的"胡须"(Whiskers)的表达式,这里 q_* 在临界环上。由此,我们得到一个重要的事实:

$$W^{cs}(q_*) = W^{cu}(q_*) = \{q \mid F(q) = \pm 2\}$$

这里,± 号依赖于 $\lambda^c(q_*)$是周期特征值还是反周期点。

5.5.6 $F'(q_h)$

设 q_* 在一个不稳定临界环上,具有不稳定性和纯虚数二重点 ν,它的"胡须"q_h 的表达式由 Bäcklund 变换式(5.5.9)给出。这里,我们给出一个有用的关于梯度 $F'(q_h)$的表达式。

由式(5.5.16)知

$$\frac{\delta F}{\delta q} = \lim_{\lambda \to \nu} i \frac{\sqrt{\Delta^2 - 4}}{W[\Psi^{(+)}, \Psi^{(-)}]} \begin{pmatrix} \Psi_2^{(+)} \Psi_2^{(-)} \\ -\Psi_1^{(+)} \Psi_1^{(-)} \end{pmatrix} \tag{5.5.18}$$

这里 $\Psi^\pm(x,\lambda)$是(Q,ν)处的 Floquet 判别式,利用 Bäcklund 公式计算这个极限可得

$$\frac{\delta F}{\delta q} = C_\nu \frac{c_1 c_2 [\Psi^{(+)}, \Psi^{(-)}]}{|\boldsymbol{\phi}|^2} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^2 \\ -\bar{\phi}_2^2 \end{pmatrix} \tag{5.5.19}$$

这里常数 C_ν 为

$$C_\nu = i(\nu - \bar{\nu}) \sqrt{\Delta(\nu) \Delta''(\nu)}$$

注:因为

$$\boldsymbol{\phi} = c_1 \boldsymbol{\psi}^{(+)} + c_2 \boldsymbol{\psi}^{(-)}$$

则由式(5.5.19)可得,当 $c_1/c_2 \to 0$ 或者 ∞ 时,

$$\frac{\delta F}{\delta q} \Big|_{(q_h, \nu)} \to 0$$

关于 5.3 节中的基本例子,我们进一步有:取 $q_* = c\exp\{-i[2(c^2 - \omega^2)t - \gamma]\} = ce^{i\theta}$,则

$$\frac{\delta F}{\delta q} = a \frac{[(\mp \sin p \cosh\tau \pm i \cos p \sinh\tau)\cos x + 1]}{[1 \mp \sin p \operatorname{sech}\tau \cos x]^2} c e^{i\theta}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \bar{q}} = \overline{\frac{\delta F}{\delta q}} \tag{5.5.20}$$

这里 $\tau = \sigma(t - t_0)$, $\tan p = \sigma$, $\sigma = \sqrt{4c^2 - 1}$, $a = 2\pi \sin^2 p \operatorname{sech}^2 \tau$。由这个表达式可知

$$F'(q_h(t)) \neq 0$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} F'(q_h(t)) \to 0$$

其中 $F'(q_h(t))$以指数率($\exp[-\sigma|t|]$)趋于 0。因此,q_* 是临界

点，而"胡须"$q_h(t)$不是。

5.6 同宿轨道的不变性

我们利用到目前为止所得到的局部分析结果和无扰动可积系统的整体信息，建立如下扰动 NLS 方程的同宿到鞍点 Q 的轨道的存在性

$$q_t = iH'(q) + \varepsilon G(q) \tag{5.6.1}$$

这里 $H'(q) = -q_{xx} - 2(q\bar{q} - \omega^2)q$，$G(q) = -\alpha q - \beta Bq - 1$，其中B是一个有界耗散算子。

更具体地，我们运用几何奇异扰动理论并构造 Melnikov 函数，从而证明同宿轨道的存在性。论证分两步进行——被称之为"第一测度"和"第二测度"。在第一测度里，我们构造一个距离函数 Δ（这不是可积理论中的 Floquet 判别式），它的零点对应于这样的轨道，它不在常值平面里，于反向时间（$t\to-\infty$）渐近地趋于鞍点 Q，而在正向时间（$t\to\infty$）接近 M_ε。第二测度则构造一个函数 d，它的零点对应于第一测度中得到的轨道之一，它同基点在 Q 的稳定流形里的纤维相交。因此，由纤维的定义，Δ 和 d 同时等于零便能保证关于鞍点的同宿轨道的存在性。

5.6.1 第一测度

为方便记，我们首先明确在这一章中所涉及的不变流形的记号。在 $\varepsilon=0$ 时，系统式(5.3.12)的线性化系统有

$$\begin{cases}\text{中心稳定流形 } E^{cs}(S_\omega)\\ \text{中心不稳定流形 } E^{cu}(S_\omega)\\ \text{中心流形 } E^{c}(S_\omega)\end{cases}$$

在 $\varepsilon=0$ 时，非线性系统式(5.3.12)有

$$\begin{cases}\text{中心稳定流形 } W_0^{cs}\\ \text{中心不稳定流形 } W_0^{cu}\\ \text{中心流形 } M\end{cases}$$

当 $\varepsilon>0$ 时，系统式(5.3.12)有局部不变流形 W_ε^{cs}，W_ε^{cu}，以及"慢流形"：$M_\varepsilon = W_\varepsilon^{cs}\cap W_\varepsilon^{cu}$。

在常值平面 Π_c 上，$Q(j_q,\theta_q)$是鞍点，它的稳定和不稳定流形分别用 C_ε^s，C_ε^u 表示。在 $\varepsilon=0$ 时，有对应的鞍点 $Q_0(j_0,\theta_0)$，以及 Q_0 的稳定与不稳定流形 C_0^s 和 C_0^u。而在全空间中，$Q(j_q,\theta_q,u_q=0)$也是鞍点，它有

$$\begin{cases}\text{二维不稳定流形 } W^u(Q)\\ \text{余维数为 2 的稳定流形 } W^s(Q)\end{cases}$$

在 M_ε 里，Q 的稳定流形记为 $W = W^s(Q)\cap M_\varepsilon$。

注意到，$\Pi_c\subset M\cap M_\varepsilon$ 且在 Π_c 里 Q 有一维不稳定流形（C_ε^u）

$$q = \left(\omega^2+\sqrt{\varepsilon}j_u(s)\right)^{1/2}\mathrm{e}^{i\theta_u(s)}$$

注：运用 5.2 节中对 Q 的稳定流形相同的讨论知，在常值平面 Π_c 上，关于(j,θ)坐标，Q 的不稳定流形可以参数化，且

$$y = y_u(s;\nu) = (j_u(s),\theta_u(s))$$

$$s = \exp[\mu\tau],\quad \tau<0$$

于是，利用(I,θ)坐标，则 Q 的不稳定流形为

$$I = \omega^2+\sqrt{\varepsilon}j_u(s),\quad \theta=\theta_u(s)$$

也即是

$$q = \sqrt{I}\mathrm{e}^{i\theta} = \left(\omega^2+\sqrt{\varepsilon}j_u(s)\right)^{1/2}\mathrm{e}^{i\theta_u(s)}$$

设 q_b 是 Q 的一维不稳定流形 C_ε^u 上对应于参数 $s=s_b$ 的点，则无扰动流有一条轨道在 $t=0$ 时通过 q_b，这条轨道为

$$q = r_b\mathrm{e}^{\{-i[2(r_b^2-\omega^2)t-\theta_b]\}}$$

即平面 Π_c 上通过点 $q_b=(j_b,\theta_b)$且以 r_b 为半径的圆。进而有一条轨道 q_h 在 $t\to\infty$ 时接近上面的轨道，有

$$q_h(t) = \left(\frac{\cos 2p - i\sin 2p\tanh\tau + \sin p\,\mathrm{sech}\tau\cos x}{1-\sin p\,\mathrm{sech}\tau\cos x}\right)\cdot$$

$$r_b\exp\{-i[2(r_b^2-\omega^2)t-\theta_b+2p]\}$$

这里

$$\tan p=\sqrt{4r_b^2-1}$$

$$\tau=(\tan p)(t+t_0)$$

$$r_b e^{i\theta_b}=\left(\omega^2+\sqrt{\varepsilon}j_u(s_b)\right)^{1/2}e^{i\theta_u(s_b)}$$

同时,当 $t\to\infty$ 时,有

$$q_h(t)\to r_b\exp\{-i[2(r_b^2-\omega^2)t-\theta_b+4p]\}$$

这意味着轨道 $q_h(t)$有一个 $-4p$ 的相移

$$e^{-4ip}=\left(\frac{1-i\sqrt{4r_b^2-1}}{2r_b}\right)^4$$

选择 t_0 使得在 $t=0$ 时,有

$$\| q_h(0)-q_b\|_{H^1}=\frac{\delta}{4} \tag{5.6.2}$$

又由于在 $t\to\infty$ 时,q_h 接近圆 S_{r_b}(Π_c 上过 q_b 且半径为 r_b 的无扰动流的轨道),利用 q_h 的显式表达式知。对于充分小的 ε,存在 $T_*(\delta)$使得

$$\mathrm{dist}(q_h(t),S_\omega)\leqslant\frac{\delta}{4},\quad t\geqslant T_*$$

让 q_b 是长度为 δ 的纤维的基点。在 $\upsilon=(\upsilon_u,\upsilon_s,\upsilon_c)$坐标系下,$q_b$ 的坐标为$(0,0,\upsilon_c=\eta_c)$,这里 $\eta_c=(\sqrt{\varepsilon}j_u(s_b),\theta_u(s_b),\upsilon_0=0)$。于是,过基点 q_b 的扰动纤维能被参数化,有

$$\upsilon_c=f^u(\eta_c,\eta_u;\varepsilon)$$

$$\upsilon_u=\eta_u+h_u^c(\upsilon_c;\varepsilon)$$

$$\upsilon_s=h_s(\upsilon_u,\upsilon_c;\varepsilon)$$

这里,$(\upsilon_u,\upsilon_s,\upsilon_c)$为纤维上点的坐标,$(0,0,\eta_c)$为纤维的基点,$0\leqslant\eta_u\leqslant\delta$ 相当于一个参数。

由式(5.6.2)知,$q_h(0)$属于一条无扰动纤维,在 $\varepsilon=0$ 时,这条无扰动纤维即是从 q_b 点出发的"胡须"的一段(实际上,这里的"胡须"是异宿轨道)。而 $q_h(0)$作为无扰动纤维(也以 q_b 为基点)上的一点,有坐标$(\upsilon_u,\upsilon_s,\upsilon_c)=(\eta_u+h_u^c(\upsilon_c;0),h_s(\upsilon_u,\upsilon_c,0),f^u(\eta_c,\eta_u;0))$,且对应于 $\eta_u=\bar{\eta}_u\leqslant\delta/2$。在扰动纤维上,取 $\eta_u=\bar{\eta}_u$,得到对应一点 $q_\varepsilon(0)=q_\delta$(见图 5.6.1)。

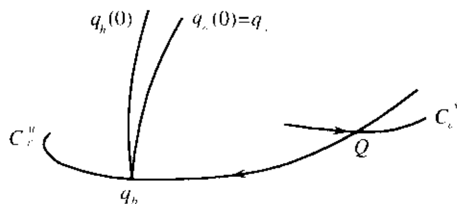


图 5.6.1　在 W_ε^u 纤维上的初始点

因为函数 f^u 和 h 关于 ε 是 C^2 的,则

$$\| q_\delta-q_h(0)\|_{H^1}\leqslant\| h_u^c(\upsilon_c;\varepsilon)-h_u^c(\upsilon_c;0)\|_{H^1}+$$
$$\| h_s(\upsilon_u,\upsilon_c;\varepsilon)-h_s(\upsilon_u,\upsilon_c;0)\|_{H^1}+$$
$$\| f^u(\eta_c,\eta_u;\varepsilon)-f^u(\eta_c,\eta_u;0)\|_{H^1}\leqslant C\varepsilon$$

用 $q_\varepsilon(t)$表示扰动方程以 $q_\varepsilon(0)=q_\delta$ 为初值的解(轨道),从5.4.2 节中的纤维结构知:$q_\varepsilon(t)$在 $t\to-\infty$ 时渐近地趋于 Q,且由它对初值的连续依赖性得到,对任何有限时间 T,当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时

$$\| q_\varepsilon(t)-q_h(t)\|_{H^1}\leqslant C(T)\varepsilon \tag{5.6.3}$$

定义

$$\begin{cases} q_0=q_h(T_*)\\ q_l=q_\varepsilon(T_*)\end{cases}$$

由于当 $t\to\infty$ 时,$q_h\to\Pi_c$,则点 $q_0\in W_0^{cs}$,且

$$q_0=r_b\exp\{-i[2(r_b^2-\omega^2)T_*-\theta_b+4p]\}+\delta q_0$$

这里 $\|\delta q_0\|_{H^1}\leqslant\frac{\delta}{2}$。注意到，当 $t\geqslant T_*(\delta)$时

$$\mathrm{dist}(q_h(t),S_\omega)\leqslant\frac{\delta}{4}$$

利用式(5.6.3)得

$$\|q_0-q_l\|_{H^1}\leqslant C(\delta)\varepsilon<\delta/4$$

$$\mathrm{dist}(q_l,S_\omega)\leqslant\delta/2$$

这里 ε 充分小。

为了证明 $q_l\in W_\varepsilon^{cs}$，我们沿着 W_0^{cs} 在 q_0 点的法线方向去测度 q_l 与 W_ε^{cs} 之间的距离。这项工作可按如下方式进行。

流形 W_0^{cs} 可作为一个图给出

$$v_u=h_u(v_s,v_c;0)$$

这里函数 h_u 有小的导数，这意味着 v_u 方向的向量 $\boldsymbol{V}=(1,0,0)$ 横截于 W_0^{cs}，这个向量 $\boldsymbol{V}$ 是在式(5.4.2)给出的特征函数 $e_u(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}(1+i\sigma)\cos x$。而 W_0^{cs} 也能够用 $\{q\in H^1:F(q)+2=0\}$ 来刻画。因此，e_u 的横截性转化为

$$\langle F'(q_0),e_u\rangle\neq 0 \tag{5.6.4}$$

上式左端为对偶对的缩写。因为 h_u 关于它的变量是 C^2 的，那么，若 q 是 q_0 的 ε 邻域里的一点，则沿着 e_u 方向且过 q 的直线相交于 W_ε^{cs} 的一点，这一点与 q 有 $O(\varepsilon)$阶距离，设 q_s 是过 q_l 点的直线与 W_ε^{cs} 的交点，于是，我们用

$$\Delta=\langle F^1(q_0),q_l-q_s\rangle$$

来定义 q_l 到 q_s 的距离测度(见图 5.6.2)。

为实际计算需要，我们定义，对于 $t\leqslant 0$，有轨道

$$\begin{cases}q_*(t)=q_h(t+T_*)\\ q_u(t)=q_\varepsilon(t+T_*)\end{cases}$$

而对于 $t\geqslant 0$，定义 $q_s(t)$是扰动系统的切断流以 q_s 为初值的轨道，

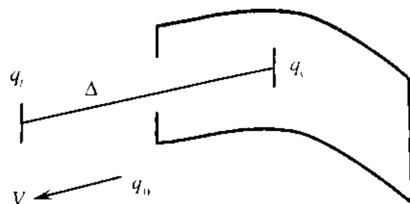


图 5.6.2 第一测度的原理图

$q_*(t)=q_h(t+T_*)$——$q_*(t)$是以 q_0 作为 $t=0$ 时刻的初值的轨道($t\geqslant 0$)。注意到，在 $t\geqslant T_*$时，$q_h(t)$属于 S_ω 的δ 邻域，所以，$q_*(t)(t\geqslant 0)$也是切断流的一个解(对应于 $\varepsilon=0$)。以上所有轨道在 $t=0$ 时的初值 q_l,q_s 和 q_0 相互间隔 $O(\varepsilon)$阶距离。

对于 $t\leqslant -T_*$，由前面的讨论可知，$q_u(t)$和 $q_*(t)$也在 S_ω 的δ 邻域里，利用方程组(5.4.8)和 Gronwall 不等式，以及式(5.6.3)，对于 $t<0$，有

$$\|q_u(t)-q_*(t)\|_{H^1}\leqslant C(\delta)\mathrm{e}^{-\delta t}\varepsilon \tag{5.6.5}$$

而在 $t\geqslant 0$ 时，轨道 $q_*(t)$和 $q_s(t)$都是切断方程组的解，再利用 Gronwall 不等式得

$$\|q_s(t)-q_*(t)\|_{H^1}\leqslant C\mathrm{e}^{\delta t}\varepsilon \tag{5.6.6}$$

这些轨道允许我们引入测度

$$\Delta^-(t)=\langle F'(q_*(t)),q_u(t)-q_*(t)\rangle,\quad t\leqslant 0$$

$$\Delta^+(t)=\langle F'(q_*(t)),q_s(t)-q_*(t)\rangle,\quad t\geqslant 0$$

从而

$$\Delta=\Delta^-(0)-\Delta^+(0)$$

命题 5.6.1 距离 Δ 由下式给出

$$\Delta=\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_*(t)),G(q_*(t))\rangle\mathrm{d}t+O(\varepsilon^2)$$

证明：注意到 $q_*(t)$是(x,t)的光滑函数，$F'(q_*)$是 q_* 的光滑函数。由命题 5.5.4 知，$F'(q_*)$在 H^1 中为 t 的 C^1 函数。又因

为 $q_u(t)$ 和 $q_s(t)$ 在 H^{-1} 中为 t 的 C^1 函数。由此推出，Δ^- 和 Δ^+ 是 t 的 C^1 函数。

我们利用方程(5.6.1)，对 $\Delta^-(t)$ 关于 t 求导

$$\dot{\Delta}^-(t) = \langle F''(q_*)\dot{q}_*, q_u - q_*\rangle + \langle F'(q_*), \dot{q}_u - \dot{q}_*\rangle = \langle F''(q_*)iH'(q_*), q_u - q_*\rangle + \langle F'(q_*), iH'(q_u) - iH'(q_*) + \varepsilon G\rangle \tag{5.6.7}$$

把 $H'(q)$ 在 q_* 处展开，并利用在 $t\leqslant 0$ 时 q_u 和 q_* 是有界的，我们有

$$H'(q_u) - H'(q_*) = H''(q_*)(q_u - q_*) + R(q_u, q_*)$$
$$\| R(q_u, q_*)\|_{H^1} \leqslant C\| q_u - q_*\|_{H^1}^2 \tag{5.6.8}$$

于是，方程(5.6.7)化为

$$\dot{\Delta}^-(t) = \langle iF''(q_*)H'(q_*), q_u - q_*\rangle + \langle F'(q_*), iH''(q_*)(q_u - q_*)\rangle + \varepsilon\langle F'(q_*), G(q_u)\rangle + \langle F'(q_*), iR(q_u, q_*)\rangle$$

又由于 $\{F(q), H(q)\} = 0$，这表明上式右端前两项和等于 0，从而方程简化为

$$\dot{\Delta}^-(t) = \varepsilon\langle F'(q_*), G(q_u)\rangle + \langle F'(q_*), iR\rangle$$

利用式(5.5.20)、式(5.6.5)和式(5.6.8)，对于 $t<0$，得

$$\begin{cases} \| F'(q_*)\|_{H^1} \leqslant Ce^{\sigma t} \\ \| q_u - q_*\|_{H^1} \leqslant Ce^{-\delta t}\varepsilon \\ \| R(t)\|_{H^1} \leqslant Ce^{-2\delta t}\varepsilon^2 \end{cases}$$

其中 $2\delta<\sigma$，并且在 $t\to-\infty$ 时 $\Delta^-(t)\to 0$。这表明

$$\Delta^-(0) = \varepsilon\int_{-\infty}^{0}\langle F'(q_*), G(q_*)\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2)$$

为了得到 Δ^+ 的一个类似的表达式，我们重复上面相同的工作。但要注意 $q_s(t)$ 是切断方程组的一个解，$q_*(t)$ 既是切断方程组的解，也是未切断方程组的解。因此，在 q_* 处展开切断方程组，并利用 $\{F(q_*), H(q_*)\} = 0$ 得

$$\dot{\Delta}^+ = \varepsilon\langle F'(q_*), G_\delta(q_s)\rangle + \langle F'(q_*), i\tilde{R}\rangle$$

这里，$\tilde{R}$ 是在 q_* 处展开切断流 $H'_\delta(q_s)$ 的剩余部分，

$$\|\tilde{R}\|_{H^1} \leqslant C(\delta)\| q_s - q_*\|_{H^1}^2$$

$G_\delta(q_s)$ 为在 q_s 处截断的扰动项。再利用式(5.5.20)、式(5.6.6)和式(5.6.8)，对于 $t\geqslant 0$，有

$$\begin{cases} \| F'(q_*)\|_{H^1} \leqslant Ce^{-\sigma t} \\ \| q_s - q_*\|_{H^1} \leqslant Ce^{\delta t}\varepsilon \\ \|\tilde{R}(t)\|_{H^1} \leqslant Ce^{2\delta t}\varepsilon^2 \end{cases}$$

因此

$$\Delta^+(0) = -\varepsilon\int_0^\infty\langle F'(q_*), G_\delta(q_s)\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2) = -\varepsilon\int_0^\infty\langle F'(q_*), G(q_*)\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2) \tag{5.6.9}$$

进而有关于距离 Δ 的表达式

$$\Delta = \Delta^-(0) - \Delta^+(0) = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_*), G(q_*)\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2)$$

这里 $\int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_*), G(q_*)\rangle \mathrm{d}t$ 即所谓的 Melnikov 函数。

因为 $q_*(t)$ 的基点

$$r_b e^{i\theta_b} = (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}j_u(s_b))^{1/2}e^{i\theta_u(s_b)}$$

依赖于 ε，我们可以利用基点为 $\omega e^{i\theta_b}$ 的同宿轨道 $q_\omega(t)$ 来进一步简化 Δ 的表达式。即，因为 $q_\omega(t)$ 距离 $q_*(t)$ 是 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 阶的，则可用 $q_\omega(t)$ 代替 $q_*(t)$，同时，使用 G 的具体表达式得。

推论 5.6.2 距离 Δ 有关于ε 的表达式

$$\Delta = \varepsilon M(\alpha,\beta,\theta_b) + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$M(\alpha,\beta,\theta_b) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_\omega(t)), G(q_\omega(t))\rangle \mathrm{d}t = -[\alpha M_\alpha + \beta M_\beta + M(\theta_b)] \tag{5.6.10}$$

这里

$$M_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_\omega(t)), q_\omega(t)\rangle \mathrm{d}t$$

$$M_\beta = \int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_\omega(t)), \mathrm{B}q_\omega(t)\rangle \mathrm{d}t$$

$$M(\theta_b) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle F'(q_\omega(t)), 1\rangle \mathrm{d}t$$

从上面的推论可知,要找到 Δ 的零点,转化为求 $M(\alpha,\beta,\theta_b)$的非退化零点,并利用隐函数定理即可。

M 关于θ_b 的依赖性能通过运用式(5.5.20)进行计算而得到,即,由

$$\frac{\delta F}{\delta q} = 2\pi\sin^2 p\,\mathrm{sech}^2\tau\{[(1-\sin p\cosh\tau + i\cos p\sinh\tau)\cos x + 1]\}/[(1-\sin p\,\mathrm{sech}\tau\cos x)^2]ce^{i\theta}$$

推算出

$$M(\theta_b) = \cos(\theta_b - 2p_0)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\,\frac{4\pi\omega\sin p_0\mathrm{sech}\tau}{\sigma A^2}\cdot(\mathrm{sech}\tau - \sin p_0\cos x) = M_0\cos(\theta_0 - 2p_0)$$

这里 $p_0 = \arctan\sqrt{4\omega^2-1}$, $A = 1-\sin p_0\mathrm{sech}\tau\cos x$。

假设 M_α 或M_β 是非零的,则函数

$$-M(\alpha,\beta,\theta_b) = \alpha M_\alpha + \beta M_\beta + M_0\cos(\theta_b - 2p_0) \tag{5.6.11}$$

有非退化零点。这意味着,我们能够选择参数使得 $\Delta = 0$,即

$$q_l = q_s \in W_\varepsilon^{cs}$$

5.6.2 第二测度

利用这个测度可以证明,我们能够选择参数 θ_b 使得点q_l 位于一条纤维上,这条纤维的基点(用 $q_{l,b}$表示)属于 Q 的稳定流形。

首先,我们知道,未扰动的轨道 $q_*(t) = q_h(t+T_*)$,在 $t\to\infty$ 时趋近于轨道

$$r_b\exp\{-i[2(r_b^2-\omega^2)(t+T_*) - \theta_b + 4p]\}$$

这意味着 $q_0 = q_h(T_*)$属于一条未扰动纤维,这条纤维的基点 $q_{0,b} = r_b\exp\{-i[2(r_b^2-\omega^2)T_* - \theta_b + 4p]\}$ 在 S_{r_b}上。而点 $q_l\in W_\varepsilon^{cs}$,则 q_l 属于一条扰动纤维,其基点 $q_{l,b}\in M_\varepsilon$(不一定在平面 Π_c 上),但 $q_{0,b}$和$q_{l,b}$之间有 $O(\varepsilon)$阶的距离(见图 5.6.3)。

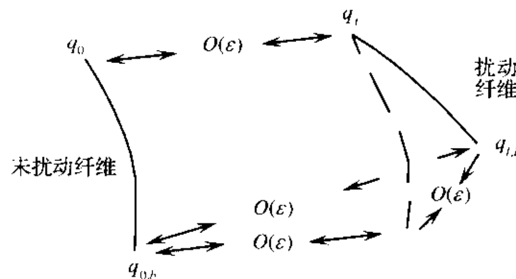


图 5.6.3 纤维的基点

事实上,在 $v=(v_u,v_s,v_c)$坐标系下,点 q_0 的坐标为

$$\begin{cases} v_{0,u} = h_u(v_{0,s}, v_{0,c};0) \\ v_{0,s} = \eta_{0,s} + h_s^c(v_{0,c};0) \\ v_{0,c} = f^s(\eta_{0,s},\eta_{0,c};0) \end{cases}$$

这里 $\eta_{0,s}\in[-\delta,\delta]$, $\eta_{0,c} = (\sqrt{\varepsilon}j_u(s_b), 2(r_b^2-\omega^2)T_* - \theta_b + 4p, 0)$ 是 Π_c 里 S_{r_b}上一点,基点 $q_{0,b}$的坐标对应上面表达式中的 $\eta_{0,s} = 0$,

即为$(0,0,\eta_{0,c})$。

而 q_l 在 v 坐标系下,有坐标

$$\begin{cases} v_{l,u} = h_u(v_{l,s}, v_{l,c};\varepsilon) \\ v_{l,s} = \eta_{l,s} + h_s^c(v_{l,c};\varepsilon) \\ v_{l,c} = f^s(\eta_{l,c}, \eta_{l,s};\varepsilon) \end{cases}$$

所在纤维的基点 $q_{l,b}$ 的坐标为

$$v_{l,u} = h_u(v_{l,s}, v_{l,c};\varepsilon)$$

$$v_{l,s} = h_s^c(v_{l,c};\varepsilon)$$

$$v_{l,c} = \eta_{l,c} = f^s(\eta_{l,c}, 0;\varepsilon)$$

因为 f^s 和 h_s^c 是 C^1 函数且可逆,而 q_0 和 q_l 之间有 $O(\varepsilon)$ 阶距离,则由反函数定理可知:点 q_l 的坐标参数$(\eta_{l,c},\eta_{l,s})$与点 q_0 的坐标参数$(\eta_{0,c},\eta_{0,s})$之间的差是 $O(\varepsilon)$ 阶的。从而

$$\| q_{0,b} - q_{l,b} \|_{H^1} = O(\varepsilon) \qquad (5.6.12)$$

为了构造一个距离函数测度从 $q_{l,b}\in M_\varepsilon$ 到 M_ε 中 Q 的稳定流形 W 的距离,我们注意到 $C_\varepsilon^s \subset W\cap\Pi_c$。$C_\varepsilon^s$ 在 $y=(j,\theta)$ 坐标系下,通过函数 $y_*(s,\sqrt{\varepsilon})$ 给出,这里 $s\in[0,s_0]$。引入变量 z, $z=(\omega^2+\sqrt{\varepsilon}j)^{1/2}e^{i\theta}$, C_ε^s 能被表示为

$$z_*(s,\sqrt{\varepsilon}) = (\omega^2+\sqrt{\varepsilon}j_0(s))^{1/2}e^{i\theta_0(s)} + O(\sqrt{\varepsilon})$$

这里$(j_0(s),\theta_0(s))$是关于未扰动(j,θ)方程组的平面同宿轨道.流形 M_ε 和 W 由下式给出

$$\begin{cases} M_\varepsilon = \{v\in H^1 : v_u = h_u^c(v_0;\varepsilon), v_s = h_s^c(v_0;\varepsilon)\} \\ W = \{v\in M_\varepsilon : r = g(s,v_0;\varepsilon)\} \end{cases}$$

这里 $s\in[0,s_0]$ 且 $\|v_0\|_{H^1}\in[0,\varepsilon^{3/4}]$, r 是由平面 Π_c 上点 y 到曲线 C_ε^s 的欧几里德距离。

对于每一点 $q\in M_\varepsilon$, q 与 Π_c 有一个阶为 $O(\varepsilon)$ 的距离,与 S_ω 有阶为 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 的距离。我们按以下方式确定与 q 相对应的点 $\tilde{q}\in W$(见图 5.6.4)。

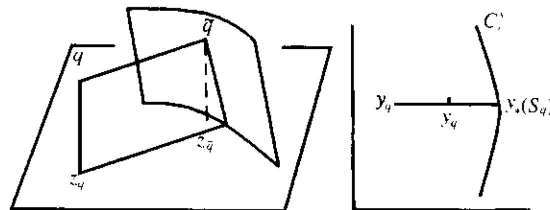


图 5.6.4 从 q 到 $\tilde{q}$ 的映射

(1) q 能够表示为$(z_q, v_{q,0})$,这里

$$z_q = (\omega^2+\sqrt{\varepsilon}j_q)e^{i\theta_q}$$

(2) 在 $y=(j,\theta)$ 坐标之下,设 $y_*(s_q)\in C_\varepsilon^s$ 是这样一点——它确定 $y_q=(j_q,\theta_q)$ 到 C_ε^s 的距离。由隐函数定理可知,假若(j_q,θ_q)在 C_0^s 的一个固定邻域里,则点 $y_*(s_q)$存在惟一。

(3) 在连接 y_q 与 $y_*(s_q)$ 的直线上,确定一点 $y_{\tilde{q}}$,它与 $y_*(s_q)$ 有一个距离 $r_{\tilde{q}}\equiv g(s_q, v_q;\sqrt{\varepsilon})$。在平面 Π_c 上,这一点的坐标为

$$z_{\tilde{q}} = (\omega^2+\sqrt{\varepsilon}j_{\tilde{q}})e^{i\theta_q}$$

(4) 定义 $\tilde{q}\in W$ 是对应于$(z_{\tilde{q}}, v_{q,0})$的点。

为了测度 q 到 $\tilde{q}$ 的距离,我们引入函数

$$d(q) = E(y_q) - E(y_{\tilde{q}})$$

这里 E 是由式(5.2.12)给出的无扰动常微分方程组的 Hamilton 量,

$$E(j,\theta) = \frac{1}{2}j^2 - \omega(\sin\theta + \alpha\omega\theta)$$

命题 5.6.3 映射 $q\mapsto\tilde{q}$ 有一个不动点当且仅当 $d(q)=0$,而且 $d(q)$ 有展开式

$$d(q) = E(j_q, \theta_q) - E_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$$

其中 $E_0 = E(j_0, \theta_0)$。

证明:要证明 $d(q)$的零点对应于 $q \to \bar{q}$ 的不动点,我们注意到:在 C_0^s 的邻域内,E 的水平集与 C_ε^s 的法线仅相交于一点。因此,y_q 与 $y_*(s_q)$的连线为 C_ε^s 的法线。于是,我们能够使用 E 作为距离测度,而且 $E(y_q) = E(y_{\bar{q}})$意味着 $y_q = y_{\bar{q}}$ 或者 $z_q = z_{\bar{q}}$。由前面的定义,q 和 $\bar{q}$ 的 v_0 坐标是相同的,则 $d(q) = E(y_q) - E(y_{\bar{q}})$ 的零点对应于 $q \to \bar{q}$ 的不动点。

为展开 $d(q)$,我们注意到

$$|y_{\bar{q}} - y_*(s_q)| = |r_{\bar{q}}| = O(\varepsilon)$$

其中 $|r_{\bar{q}}| = O(\varepsilon)$由式(5.4.40)得到,而 $y_*(s_q)$与未扰动稳定流形 C_0^s 之间有阶 $O(\sqrt{\varepsilon})$的距离,因此,有

$$E(y_{\bar{q}}) = E(y_*(s_q)) + O(\varepsilon) = E_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$$

命题获证。

我们用函数 d 测量 $q_{l,b}$到 W 的距离。由式(5.6.12)得

$$d(q_{l,b}) = d(q_{0,b}) + O(\varepsilon)$$

而基点 $q_{0,b}$为

$$r_b e^{i(\theta_b - 4p)} = \left(\omega^2 + \sqrt{\varepsilon} j_u(s_b)\right)^{1/2} e^{i(\theta_b - 4p)}$$

于是,我们有以下推论:

推论 5.6.4 $q_{l,b}$到 W 的距离为

$$d(q_{l,b}) = \omega[2\sin 2p_0 \cos(\theta_b - 2p_0) + 4\alpha\omega p_0] + O(\sqrt{\varepsilon})$$

证明: 由 d 的定义得

$$d(q_{0,b}) = E(j_u(s_b), \theta_b - 4p) - E_0$$

由于 $q_{0,b} \in C_\varepsilon^u$,而 C_ε^u 是 C_0^u 的 $O(\sqrt{\varepsilon})$阶扰动,我们还得到

$$E(j_u(s_b), \theta_b) - E_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$$

这一事实表明

$$\begin{aligned} d(q_0, b) &= E(j_u(s_0), \theta_b - 4p) - E(j_u(s_b), \theta_b) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \\ &- \omega[\sin(\theta_b - 4p) - \sin\theta_b + 4\alpha\omega p] + O(\sqrt{\varepsilon}) = \\ &\omega[2\sin 2p \cos(\theta_b - 2p) + 4\alpha\omega p] + O(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

最后,利用

$$\begin{aligned} p &= \arctan(4r_b^2 - 1)^{1/2} = \arctan\sqrt{4\omega^2 - 1} + O(\sqrt{\varepsilon}) = \\ &p_0 + O(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

可得到推论。

我们定义

$$\tilde{d}(\theta_b, \alpha) = 2\sin 2p_0 \cos(\theta_b - 2p_0) + 4\alpha\omega p_0$$

并假设 $\tilde{d}$ 有非退化零点,那么,我们能够选择参数使 d 等于零。

5.6.3 同宿轨道的存在性

固定 $\alpha \in (0, 1/\omega)$,M 和 $\tilde{d}$ 可视为 θ_b 和 β 的函数,

$$M(\alpha, \beta, \theta_b) = \alpha M_\alpha + \beta M_\beta + M_0 \cos(\theta_b - 2p_0)$$

$$\tilde{d}(\theta_b, \alpha) = 2\sin 2p_0 \cos(\theta_b - 2p_0) + 4\alpha\omega p_0$$

为了证明同宿到 Q 的轨道的存在性,需要证明 M 和 $\tilde{d}$ 对于某些 $\beta > 0$ 和 $\theta_b \in (\theta_{\min}, \theta_0)$以非退化的方式等于 0,这里

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}\right) - \pi$$

$$\sin(\theta_{\min}) + \alpha\omega\theta_{\min} = \sin\theta_0 + \alpha\omega\theta_0, \quad \theta_{\min} < \theta_0$$

为了让 $\tilde{d} = 0$,α 的取值范围必须限制到区间

$$(0, \alpha_*) = (0, \frac{1}{\omega}) \cap \left(0, \frac{\sin 2p_0}{2\omega p_0}\right) \tag{5.6.13}$$

进而,假若 $M_\beta \neq 0$,那么,由 $\tilde{d} = 0$ 和 $M = 0$ 得

$$\cos(\theta_b - 2p_0) = -\frac{2\alpha\omega p_0}{\sin 2p_0} \tag{5.6.14}$$

$$\beta = -\alpha\left[M_\alpha - \frac{2\omega p_0}{\sin 2p_0}M_0\right]/M_\beta \qquad (5.6.15)$$

利用隐函数定理可知,对于 ε 充分小,我们能够在由式(5.6.14)和式(5.6.15)所确定的 θ_b,β 的一个小的邻域内求解 $d=\Delta=0$。

定理 5.6.5 固定 $\omega\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 和 $\alpha\in(0,\alpha_*)$,若 θ_b 和 β 由式(5.6.14)、式(5.6.15)给出且满足 $\theta_b\in(\theta_{\min},\theta_0)$,$\beta>0$,那么,对于 ε 充分小,方程(5.6.1)具有同宿轨道的对称偶。

证明:利用隐函数定理,能够在由式(5.6.14)、式(5.6.15)给定的(θ_b,β)的一个小的邻域内求解方程组 $d=\Delta=0$。由 $\Delta=0$,这表明 $q_l\in W_\varepsilon^{cs}$,再由 $d=0$ 知,点 q_l 位于一条基点为 $q_{l,b}\in W$ 的纤维上,从而在 $t\geqslant 0$ 时,轨道 $q_s(t)$仍然在 S_ω 的一个小的邻域里。于是,轨道

$$q(t) = \begin{cases} q_u(t), & t\leqslant 0 \\ q_s(t), & t\geqslant 0\end{cases}$$

是一条同宿到 Q 的轨道。因为无扰动系统有两条同宿轨道,这样便得到了扰动系统同宿轨道对称偶的存在性。

注:(1) 利用式(5.6.14)、式(5.6.15)所得到的 d 和 Δ 的联立零点提供了所讨论系统的本质信息。其中第一个方程提供了起飞角度 θ_b 的近似表示,它是系统参数的函数;第二个式子则给出了参数所满足条件的近似表达式,这是为了保证同宿轨道的存在。

(2) 容易看出,若 $\beta=0,\alpha>0$,则函数 d 和 Δ 的联立零点不存在,这表明引入一些系统的参数是必要的,比如引入附加的耗散项 $\beta \mathrm{B}q$。

耗散算子B可以是离散 Laplace 算子:

$$\mathrm{B}q = q(x+h) - 2q(x) + q(x-h) \qquad (5.6.16)$$

这里 $h>0$ 固定。也可以是由它的特征 $b(k)$所定义的光滑 Laplace 算子

$$b(k) = \begin{cases} k^2, & k<K \\ 0, & k\geqslant K\end{cases} \qquad (5.6.17)$$

其中 K 是一个大的正整数。我们详细讨论后者,对于离散 Laplace 算子,可类似讨论。

利用式(5.6.17),可以得到 Melnikov 积分中耗散项的显式公式

$$M_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\,\frac{4\pi\omega^2\sin^2 p_0\operatorname{sech}\tau}{\sigma A^3}\cdot$$

$$[\operatorname{sech}\tau + \sin p_0\tanh^2\tau\cos x - \sin^2 p_0\operatorname{sech}\tau(2+\cos^2 x) +$$

$$2\sin^3 p_0\operatorname{sech}^2\tau\cos x]$$

$$M_\beta = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\,\frac{4\pi\omega^2\sin^2 p_0\operatorname{sech}\tau}{\sigma A^5}\cdot$$

$$[\sin p_0\operatorname{sech}\tau\cos x - \sin^2 p_0\operatorname{sech}^2\tau(1+\sin^2 x)]\cdot$$

$$[2\operatorname{sech}\tau - \sin p_0\operatorname{sech}^2\tau\cos x - 2\sin^2 p_0\operatorname{sech}\tau +$$

$$2\sin^3 p_0\operatorname{sech}^2\tau\cos x] + O(\sin^{k-2}p_0)$$

这里 $p_0=\arctan\sqrt{4\omega^2-1}$,$A=1-\sin p_0\operatorname{sech}\tau\cos x$,$O(\sin^{k-2}p_0)$是在我们的计算中用 $-\partial_x^2$ 代替B而产生的项。

利用这些公式,我们能够写式(5.6.15)为

$$\beta = \kappa(\omega)\alpha$$

其中

$$\kappa(\omega) \equiv -\left[M_\alpha - \frac{2\omega p_0}{\sin 2p_0}M_0\right]\Big/ M_\beta$$

对 $\kappa(\omega)$进行数值计算(见图 5.6.5)表明,$\kappa(\omega)>0$。可见,对于式(5.6.17)所确定耗散算子B,同宿到鞍点 Q 的轨道的对称偶存在。

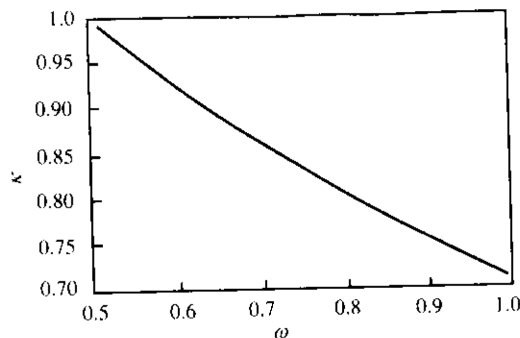


图 5.6.5 κ 作为 ω 的函数图

第六章 离散扰动非线性 Schrödinger 方程的同宿轨道和混沌

6.1 可积情况

在这一章,我们将研究如下扰动 NLS 方程

$$\begin{cases} iq_t = q_{xx} + 2[\,|q^2| - \omega^2]q + i\varepsilon[-\alpha q + \beta q_{xx} + \Gamma] \\ q(x+1) = q(x), \quad q(-x) = q(x), \quad \pi < \omega < 2\pi \end{cases} \tag{6.1.1}$$

的有限差分离散化,其中 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $\alpha > 0, \beta > 0, \Gamma > 0$ 为常数。当 $\varepsilon = 0$ 时,离散扰动 NLS 方程(6.1.1)具有如下 Hamilton 系统

$$\begin{cases} i\dot{q}_n = \dfrac{1}{h^2}[q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}] + |q_n|^2(q_{n+1} + q_{n-1}) - 2\omega^2 q_n \\ q_{n+N} = q_n \\ q_{n-N} = q_n \end{cases} \tag{6.1.2}$$

其中 $2 < N < \infty$,式(6.1.2)为 $2(M+1)$维系统。

$$M = \frac{N}{2} \quad (N\text{ 为偶数}); \qquad M = \frac{N-1}{2} \quad (N\text{ 为奇数})$$

$$h = \frac{1}{N}, \qquad N\tan\frac{\pi}{N} < \omega < N\tan\frac{2\pi}{N}, \quad N > 3;$$

$$3\tan\frac{\pi}{3} < \omega < \infty, \quad N = 3。$$

对应于 NLS 方程(6.1.1)的离散形式为

$$i\dot{q}_n = \frac{1}{h^2}[q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}] + |q_n|^2(q_{n+1} + q_{n-1}) -$$

$$2\omega^2 q_n + i\varepsilon\left[-\alpha q_n + \frac{\beta}{n^2}(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) + \Gamma\right]$$

$$(6.1.3)$$

式(6.1.2)能写成 Hamilton 形式

$$\dot{q}_n = \rho_n \frac{\partial H}{\partial \bar{q}_n}, \quad \dot{\bar{q}}_n = -\rho_n \frac{\partial H}{\partial q_n}$$

其中 $$\rho_n \equiv 1 + h^2 |q_n|^2$$

$$H \equiv -\frac{i}{h^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\bar{q}_n(q_{n+1} + q_{n-1}) -\right.$$

$$\left.\frac{2}{h^2}(1 + M^2h^2)\ln(1 + h^2|q_n|^2)\right\}$$

进一步，$\sum_{n=0}^{N-1}\{\bar{q}_n(q_{n+1} + q_{n-1})\}$也是式(6.1.2)的运动常数

这个不变性，连同 H，推出 $\sum_{n=0}^{N-1}\ln\rho_n$ 也是运动常数。因此，

$$D^2 = \prod_{n=0}^{N-1}\rho_n \tag{6.1.4}$$

也是运动常数。系统式(6.1.2)是 Hamilton 系统，具有$(M+1)$个运动常数，它的可积性可由离散的 Lax 对得到证明

$$\varphi_{n+1} = L_n^{(z)}\varphi_n \tag{6.1.5}$$

$$\dot{\varphi}_n = B_n^{(z)}\varphi_n \tag{6.1.6}$$

其中 $L_n^{(z)} \equiv \begin{pmatrix} z & ih\, q_n \\ ih\, \bar{q}_n & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$

$$B_n^{(z)} \equiv \frac{i}{h}\begin{pmatrix} 1-z^2+2i\lambda h-h^2 q_n\bar{q}_{n-1}+M^2h^2 & -zi\, q_n+\left(\frac{1}{z}\right)ih\, q_{n-1} \\ -zih\,\bar{q}_{n-1}+\left(\frac{1}{z}\right)ih\,\bar{q}_n & \frac{1}{z^2}-1+2i\lambda h+h^2\bar{q}_n\, q_{n-1}-\omega^2h^2 \end{pmatrix}$$

这里 $z \equiv \exp(i\lambda h)$。由超定方程组(6.1.5)、式(6.1.6)相容性决定 Lax 表示

$$\dot{L}_n = B_{n+1}L_n - L_nB_n$$

6.1.1 L_n 的谱理论

对于离散空间流式(6.1.5)，令 $Y^{(1)}$、$Y^{(2)}$表示式(6.1.5)的基本解，即具初值

$$Y_0^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad Y_0^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

的解，Floqnet 判别式

$$\Delta: C \times S \to C \tag{6.1.7}$$

定义为

$$\Delta(z;\boldsymbol{q}) \equiv \mathrm{tr}(M(N;z;\boldsymbol{q})) \tag{6.1.8}$$

其中 S 为相空间，定义如下：

$$S \equiv \left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix}\Big|\, r = -\bar{q},\, q = (q_0, q_1, \cdots, q_{N-1})^{\mathrm{T}}, \\ q_{n+N} = q_n,\, q_{n-N} = q_n\end{array}\right\}$$

$M(n;z;\boldsymbol{q}) \equiv$列$[Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}]$为式(6.1.5)的基本解矩阵，在 S 中能定义任意两个点$\boldsymbol{q}$与$\boldsymbol{p}$的内积为

$$\langle\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\rangle = 2\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1}\bar{q}_np_n$$

$\boldsymbol{q}$的模定义为$\|\boldsymbol{q}\|^2 = \langle\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\rangle$。

附注：$\Delta(z;\boldsymbol{q})$为可积系统式(6.1.2)的运动常数，对$\forall z \in C$。因 $\Delta(z;\boldsymbol{q})$为 z 的$(+N,-N)$阶亚纯函数，Floqnet 判别式 $\Delta(z;\boldsymbol{q})$作用于$(M+1)$个生成函数为独立运动常数，是方程组(6.1.2)完全可积的关键。

这里的 Floqnet 理论不是标准的，从 Wronski 关系式来看，

$$W_N(\psi^+,\psi^-) = D^2W_0(\psi^+,\psi^-)$$

其中 D 如式(6.1.4)所定义，

$$W_n(\psi^+,\psi^-) \equiv \psi_n^{(+,1)}\psi_n^{(-,2)} - \psi_n^{(+,2)}\psi_n^{(-,1)}$$

ψ^+、ψ^- 为线性方程组(6.1.5)的两个解。事实上，$W_{n+1}(\psi^+,\psi^-) = \rho_n W_n(\psi^+,\psi^-)$，由于这个非标准性，谱量的通常定义得到修正[95]。

周期和反周期点 z^s 定义为

$$\Delta(z^s;\boldsymbol{q}) = \pm 2D$$

临界点 z^c 定义为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}z}\right|_{(z^c,\boldsymbol{q})} = 0$$

多重点 z^m 是临界点，也是周期或反周期点。z^m 的代数重数定义为 $\Delta(z) \pm 2D$ 的零点的阶数。通常它为 2，但能超过 2；当它等于 2 时，称多重点为双重点，表示为 z^d。z^m 的几何重数定义为为(6.1.5)周期(或反周期)特征空间的维数，为 1 或 2。

运动常数一个重要序列 $\tilde{F}_j$

$$\tilde{F}_j:\Omega \subset S \to C \tag{6.1.9}$$

定义为

$$\tilde{F}_j(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{D}\Delta(z_j^c(\boldsymbol{q});\boldsymbol{q}) \tag{6.1.10}$$

其中 $\Omega \subset S$ 为 $\tilde{F}_j$ 的区域，我们将用 $\tilde{F}$ 建立 Melnikov 积分。

6.1.2 双曲结构和同宿轨道

式(6.1.2)的双曲结构和同宿轨道能通过 Backlund-Darbonx 变换来构造。首先我们建立 Backlund-Darbonx 变换，再来构造同宿轨道。

固定式(6.1.2)的一个解 $q_n(t)$，此时线性算子 L_n 具有几何重数 2 的重点 z^d，它不在单位圆上，以 (ϕ_n^+,ϕ_n^-) 表示 Lax 对式(6.1.5)、式(6.1.6)在 $z = z^d$ 上的二个线性无关解(Bloch 函数)。于是离散 Lax 对式(6.1.5)、式(6.1.6)的一般解在 $(q_n(t), z^d)$ 能表示为

$$\phi_n(t;z^d,c) = \phi^+ + c\phi_n^-$$

这里 c 是一个复参数，称为 Bachlund 参数，用 ϕ_n 可定义一个变换矩阵 Γ_n

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} z + (1/z)a_n & b_n \\ c_n & -1/z + zd_n \end{pmatrix}$$

其中

$$a_n = \frac{z^d}{(\bar{z}^d)^2\Delta_n}[\,|\phi_{n2}|^2 + |z^d|^2|\phi_{n1}|^2]$$

$$d_n = -\frac{1}{z^d\Delta_n}[\,|\phi_{n2}|^2 + |z^d|^2|\phi_n|^2]$$

$$b_n = \frac{|z^d|^4 - 1}{|z^d|^2\Delta_n}\phi_{n1}\bar{\phi}_{n2}$$

$$c_n = \frac{|z^d|^4 - 1}{z^d\bar{z}^d\Delta_n}\bar{\phi}_{n1}\phi_{n2}$$

$$\Delta_n = -\frac{1}{\bar{z}^d}[\,|\phi_n|^2 + |z^d|^2|\phi_{n2}|^2]$$

从以上式子有

$$\bar{a}_n = -d_n, \quad \bar{b}_n = c_n$$

再定义 Q_n 和 Ψ_n 为

$$\begin{cases} Q_n \equiv \dfrac{i}{h}b_{n+1} - a_{n+1}q_n & (6.1.11) \\ \Psi_n(t;z) \equiv \Gamma_n(z;z^d;\phi_n)\psi_n(t;z) & (6.1.12) \end{cases}$$

其中 ψ_n 为离散 Lax 对式(6.1.5)、式(6.1.6)的解。式(6.1.11)、式(6.1.12)分别是位势和特征函数的 Backlund-Darboux 变换，有定理。

定理 6.1.1(Backlund-Darboux 变换) 设 $q_n(t)$ 为式(6.1.2)的解，对于它线性算子 L_n 具有几何重数为 2 的重点 z^d，且不在单位圆上，它是不稳定的，以 (ϕ_n^+,ϕ_n^-) 表示离散 Lax 对在 (q_n, z^d) 上的二个线性无关解。由式(6.1.11)和式(6.1.12)分别定义 $Q_n(t)$ 和 $\Psi_n(t;z)$，则有

(1) $Q_n(t)$ 也是方程组(6.1.2)的解(Q_n 的偶性能由先取复

Backlund 参数 C 在一条曲线上确定);

(2) $\Psi_n(t;z)$ 为离散 Lax 对式(6.1.5)、式(6.1.6)在($Q_n(t)$, z)上的解;

(3) $\Delta(z;Q_n)=\Delta(z;q_n),\forall z\in C$;

(4) $Q_n(t)$同宿于 $q_n(t)$,即 $Q_n(t)\to e^{i\theta_\pm}q_n(t)$,具有指数率 $e^{-\sigma|t|}, t\to\pm\infty$。这里 $\theta_\pm$ 为位相,σ 为在重点 z^d 上的非零增长率,并可得到增长率 σ 和 $\theta_\pm$ 的明显表达式。

由此定理,可构造由 $q_n(t)$开始的同宿解。

现研究一个最重要的例子——式(6.1.2)均匀解的 Backlund-Darboux 变换,令

$$q_n=q,\quad \forall n,\quad q=a\exp\{-2i[(a^2-\omega^2)t]+iz\} \tag{6.1.13}$$

其中:$N\tan\frac{\pi}{N}<a<N\tan\frac{2\pi}{N}, N>3; 3\tan\frac{\pi}{3}<a<\infty, N=3$。

推论 6.1.2 如 q_n 为式(6.1.13)所确定,则 Q_n 为式(6.1.11)所定义具有明显表达式

$$Q_n\equiv Q_n(t;N,\omega,\gamma,\alpha,\pm)=q\left[\frac{G}{H_n}-1\right] \tag{6.1.14}$$

其中

$$G=1+\cos2p-i\sin2p\tanh\tau$$

$$H_n=1\pm\frac{1}{\cos\theta}\sin p\,\mathrm{sech}\tau\cos2n\theta$$

$$\tau=4N^2\sqrt{\rho}\sin\theta\sqrt{\rho\cos\theta-1}\,t+r$$

这里 r 为实参数。进一步,

$$p=\arctan\frac{\sqrt{\rho\cos^2\theta-1}}{\sqrt{\rho}\sin\theta}$$

$$\theta=\frac{\pi}{N},\rho=1+\frac{|q|^2}{N^2}$$

当 $\tau\to\pm\infty$时,$Q_n\to qe^{\mp i2p}$。因此,Q_n 是同宿于圆 $|q_n|=a$,异宿于圆上由位相 $-4p$ 分开的点。

定义 6.1.3 定义在 S 上的二维平面 Π:

$$\Pi\equiv\{\boldsymbol{q}\mid\boldsymbol{q}\in S, q_0=q_1=\cdots=q_{n-1}\} \tag{6.1.15}$$

Π 在流式(6.1.3)下是不变的,定义在 Π 上的环:

$$A\equiv\left\{\boldsymbol{q}\mid\boldsymbol{q}\in\Pi, N\tan\frac{\pi}{N}<|q_0|<N\tan\frac{2\pi}{N}, N>3,\right.$$
$$\left.3\tan\frac{\pi}{3}<|q_0|<\infty, N=3\right\} \tag{6.1.16}$$

定义在 A 中的共振圆

$$S_\omega\equiv\{\boldsymbol{q}\mid\boldsymbol{q}\in\Pi,|q_0|=\omega\} \tag{6.1.17}$$

S_ω 完全由不动点组成,是可积流式(6.1.2)确定的。以上如图 6.1.1 所示,在"数字 8⊗A"上有奇性水平集的几何解释和谱的识

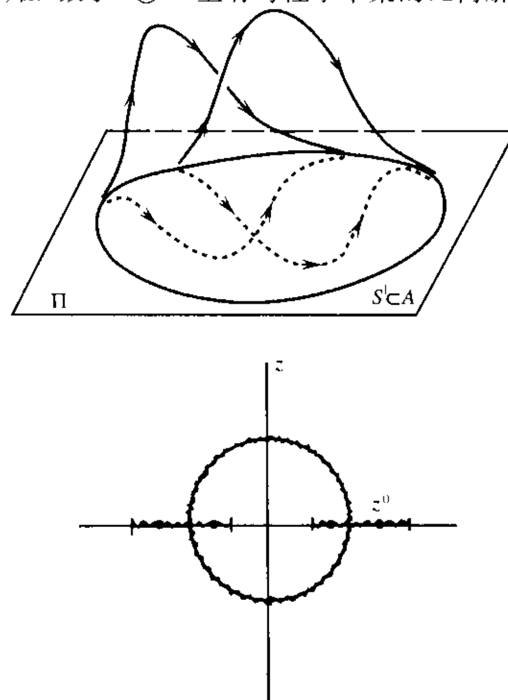


图 6.1.1 在"数字 8⊗A"里奇性水平集的几何解释和对应的谱的识别

别表示。

推论 6.1.4 在 S 中,关于可积流式(6.1.2)下,存在余维 1 的 S_ω 的"中心不稳定流形",表示为 W^{cu},则余维 1 的 S_ω 的"中心稳定流形",表示为 W^{cs}。也存在余维 2 的 S_ω 的中心流形,表示为 W^c,$W^c \cap \Pi = A$。进一步

$$W^{cu} = W^{cs} = \text{“数字 8”} \otimes W^c$$

$$\text{“数字 8”} \otimes A = \bigcup_{\substack{t \in (-\infty, +\infty) \\ \alpha \in (0, 2\pi) \\ \omega \in I_\omega, \sigma = \pm}} Q_N(t; N, \omega, \alpha, r = 0, \sigma)$$

这里 I_ω 表示式(6.1.3)中 ω 的限制区间,Q_n 给定于推论 6.1.2 中。

6.2 不变流形的不变性

这一节我们将讨论 S_ω 的中心稳定流形 W^{cs},中心不稳定流形 W^{cu}和中心流形 W^c 的不变性。这里"不变"的意思是指,存在正数 $\epsilon_2 > 0$,使得对任何 $\epsilon \in (-\epsilon_2, \epsilon_2)$,存在余维 1 的局部不变流形 W_ϵ^{cu} 和 W_ϵ^{cs},和余维 2 的不变流形 W_ϵ^c,且 $W_0^{cu} = W^{cu}$,$W_0^{cs} = W^{cs}$,$W_0^c = W^c$。在 S_ω 的某个邻域内,W_ϵ^{cu},W_ϵ^{cs} 和 W_ϵ^c 对 ϵ 是光滑的,$\epsilon \in (-\epsilon_2, \epsilon_2)$,我们将给出"局部不变"的定义。

6.2.1 不变平面的不变性

容易看到平面 Π 在扰动流式(6.1.3)下为不变流形,在这个平面上运动对于扰动和可积情况是很不同的,我们采用相平面分析方法。

在不变平面 Π 上,动力系统由以下二维 ODE 给定

$$iq_t = 2[|q|^2 - \omega^2]q + i\epsilon[-\alpha q + \Gamma] \tag{6.2.1}$$

采用振幅相角表示($q = Ie^{i\gamma}, I = |q|$),有如下方程

$$\dot{I} = \epsilon(-\alpha I + \Gamma \sin\gamma) \tag{6.2.2}$$

$$\dot{\gamma} = -\alpha(I^2 - \omega^2) - \epsilon(\Gamma/I)\sin\gamma \tag{6.2.3}$$

系统的相平面图如图 6.2.1 所示。

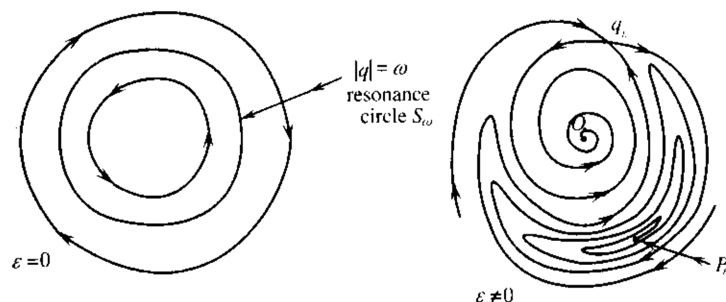


图 6.2.1 平面 Π 上动力系统的相平面图

在平面 Π 上和在共振圆 $I = \omega$ 的 $O(\sqrt{\epsilon})$邻域,令 $I \equiv \omega + \sqrt{\epsilon}J$,$\tau \equiv \sqrt{\epsilon}t$ 可得

$$J' = -\frac{\partial \mathscr{H}_1}{\partial \gamma} - \sqrt{\epsilon}\alpha J \tag{6.2.4}$$

$$\gamma' = \frac{\partial \mathscr{H}_1}{\partial J} - \sqrt{\epsilon}\left[2J^2 + \frac{\Gamma}{\omega + \sqrt{\epsilon}J}\sin\gamma\right] \tag{6.2.5}$$

其"$'$"$\equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$,$\mathscr{H}_1 \equiv \alpha\gamma\omega - \Gamma\sin\gamma - 2\omega J^2$。简单的相平面分析可知:一阶 $O(\epsilon^0)$近似,式(6.2.4)、式(6.2.5)的动力系统如图 6.2.2 所示为鱼状分布。$O(\sqrt{\epsilon})$阶近似,式(6.2.4)、式(6.2.5)的动力系统如图 6.2.3 所示。

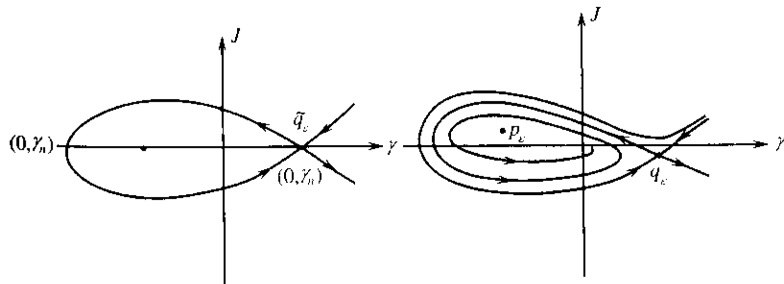


图 6.2.2 "鱼"结构　　　图 6.2.3 打破的"鱼"结构

在扰动下，平面 Π 上存在三个不动点：汇点 O_ε，靠近原点；汇点 p_ε，靠近共振圆；鞍点 q_ε，也靠近共振圆。"鱼"的坐标中，鞍点不动点表示为 $\hat{q}_\varepsilon$，位于 $(J,\gamma_s)=(0,\arccos[\chi_a\omega])$，我们看到"鱼"结构的条件为

$$\chi_a \leqslant \frac{1}{\omega} \tag{6.2.6}$$

而"鱼的鼻子"位于 $(J,\gamma_n)=(0,\gamma_n)$，其中 γ_n 满足方程

$$\chi_a\omega\gamma_n - \sin\gamma_n = \chi_a\omega\gamma_s - \sin\gamma_s \tag{6.2.7}$$

从上面分析可知，虽然 Π 在式(6.1.15)仍为不变平面，但在式(6.1.16)中定义的 A 不是不变的，而由下面 6.2.2 节中所给定的定义仍是局部不变的。

6.2.2 不变流形的不变性定理

利用 Fenichel[38,41] 所建立的法向双曲不变流形的不变性定理以及 Hadamard[142] 引进的图变换方法和几何奇性摄动理论，我们可建立局部和整体不变流形的不变性。

定义 6.2.1(局部不变性) 设 F^t 为 S 上定义的流(解算子)，V 为 S 的子流形，具有边界 $\partial V(\bar{V}\equiv V\cup\partial V)$。我们说 V 在 S 中的流 F^t 下是局部不变的，是指存在 V 在 S 中的一个邻域 U，使得 $Q\in V$，$\tau\geqslant 0$，$\bigcup_{t\in[0,\tau]}F^t(Q)\subset U$，则 $\bigcup_{t\in[0,\tau]}F^t(Q)\subset V$；如 $\tau\leqslant 0$ 和 $\bigcup_{t\in[\tau,0]}F^t(Q)\subset U$，则 $\bigcup_{t\in[\tau,0)}F^t(Q)\subset V$，换言之，轨线 $F^t(Q)$ 从 Q 点 $\subset(Q\in V)$ 开始向前或向后时间推移，无论如何它离开 V 仅能通过它的边界 ∂V。

定义 6.2.2(最大不变集) 设 F^t 为定义在 S 上的流(解算子)，V 为 S 的一个子集，定义

$$A^+(V)\equiv\{Q\in V\mid \bigcup_{t\in[0,\infty)}F^t(Q)\subset V\}$$

$$A^-(V)\equiv\{Q\in V\mid \bigcup_{t\in(-\infty,0]}F^t(Q)\subset V\}$$

$$I(V)\equiv\{Q\in V\mid \bigcup_{t\in(-\infty,+\infty)}F^t(Q)\subset V\}$$

分别称 $A^+(V)$、$A^-(V)$ 和 $I(V)$ 为 V 的最大正不变集，最大负不变集和 V 的最大不变集。

对方程组(6.1.3)，由 Fenichel[41] 可得如下定理：

定理 6.2.3(局部不变流形的不变性) 在相空间 S 中存在 S_ω 的一个邻域 $\mathscr{U}$，在它里面对任何固定的 $k(2\leqslant k<\infty)$ 存在正数 $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\mathscr{U},k)$，使得对任何 $\varepsilon\in(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)$ 存在式(6.1.3)扰动流下，一个 C^k 余维 1 的局部不变流形 W_ε^{cu}，C^k 的余维 1 的局部不变流形 W_ε^{cs} 和 C^k 余维 2 的局部不变流形 W_ε^{c}，且 $W_0^{cu}=W^{cu}$，$W_0^{cs}=W^{cs}$，$W_0^{c}=W^{c}$，其中 W^{cu}，W^{cs} 和 W^{c} 为 S_ω 的不变流形。如推论 6.1.4 所述，进一步 $A_\varepsilon\equiv\Pi\cap\mathscr{U}\subset W_\varepsilon^{c}$，对 $\forall\varepsilon\in(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)$，且

$$A^+(\mathscr{U})\subset W_\varepsilon^{cs}$$

$$A^-(\mathscr{U})\subset W_\varepsilon^{cu}$$

$$I(\mathscr{U})\subset W_\varepsilon^{c}$$

其中 $A^+(\mathscr{U})$，$A^-(\mathscr{U})$ 和 $I(\mathscr{U})$ 分别表示 $\mathscr{U}$ 中的最大正不变集，负不变集和最大不变集。

定理 6.2.4(不变流形的整体不变性) 整体不变中心不稳定流形，中心稳定流形和中心流形分别定义为 $\bigcup_{t\geqslant 0}F_\varepsilon^tW_\varepsilon^{cu}$，$\bigcup_{t\leqslant 0}F_\varepsilon^tW_\varepsilon^{cs}$ 和 $\bigcup_{-\infty<t<+\infty}F_\varepsilon^tW_\varepsilon^{c}$。对于 $0<T<\infty$，整体不变流形的如下部分：$\bigcup_{0\leqslant t\leqslant T}F_\varepsilon^tW_\varepsilon^{cu}$，$\bigcup_{-T\leqslant t\leqslant 0}F_\varepsilon^tW_\varepsilon^{cs}$ 和 $\bigcup_{-T\leqslant t\leqslant T}F_\varepsilon^tW_\varepsilon^{c}$ 是 ε 的 C^k 光滑函数，$\varepsilon\in(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)$。对 $\varepsilon=0$，它们分别用于 W^{cu}、W^{cs} 和 W^{c} 的相应部分。

6.2.3 不变流形局部不变性定理的证明

考虑扩大的相空间，引入 ε 作为变量，有如下扩大的方程组

$$\begin{cases} i\dot{q}_n=\dfrac{1}{h^2}[q_{n+1}-2q_n+q_{n-1}]+|q_n|^2(q_{n+1}+q_{n-1})- \\ \qquad 2\omega^2q_n+i\varepsilon\left[-\alpha q_n+\dfrac{\beta}{h^2}(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})+\tau\right] \\ \dot{\varepsilon}=0 \end{cases} \tag{6.2.8}$$

相应的扩大的函数空间变为 $\hat{S}$：

$$\hat{S} = S \times (-\varepsilon_3, \varepsilon_3)$$

我们能定义以 ε 为参数的不变平面族 $\hat{\Pi}_\varepsilon$

$$\hat{\Pi}_\varepsilon \equiv \{(\boldsymbol{q}, \varepsilon) \in \hat{S} \mid \boldsymbol{q} \in \Pi\} \qquad (6.2.9)$$

容易看到在流式(6.2.8)下 $\hat{\Pi}_\varepsilon$ 是不变的，限制在平面$\hat{\Pi}_\varepsilon$ 上，流式(6.2.8)变为

$$i\dot{q} = 2[\,|q|^2 - \omega^2]q + i\varepsilon[-\alpha q + \Gamma]$$

$$\dot{\epsilon} = 0$$

在扩大的函数空间里，共振圆 $\hat{S}_\omega$ 能定义为

$$\hat{S}_\omega \equiv \{(\boldsymbol{q}, 0) \mid (\boldsymbol{q}, 0) \in \Pi_0, \ |q| = \omega\}$$

现考虑不动点圆 $\hat{S}_\omega$ 的一个邻域，记

$$\begin{cases} q_n = [(\omega + \delta r) + \delta f_n(t)]\exp[i\theta(t)] \\ \varepsilon = \delta^2 \varepsilon' \end{cases} \qquad (6.2.10)$$

其中 $\delta > 0$ 为小参数，r 为实数，f_n 具空间平均值零，即$\langle f_n \rangle \equiv \sum_{n=0}^{N-1} f_n = 0$。

定义 6.2.5 定义 S 的平均值为零的子空间如下：

$$S_0 = \{\boldsymbol{q} \in S \mid \langle q_n \rangle = 0\}$$

定义 6.2.6 定义作为新变元$(r, \theta, f_n, \varepsilon')$的相空间

$$E \equiv \{(r, \theta, f_n, \varepsilon') \mid (r, \varepsilon') \in R^2, \theta \in [0, 2\pi], \boldsymbol{f}_n \in S_0\}$$

定义 6.2.7 定义相空间 E 的紧区域为

$$E_c \equiv \{(r, \theta, f_n, \varepsilon') \in E \mid |r| \leqslant 1, |\varepsilon'| \leqslant 1, \theta \in [0, 2\pi], \|\boldsymbol{f}_n\| \leqslant 1\}$$

将式(6.2.10)代入扩大的方程组(6.2.8)，并定义在 E_c 上，δ 为新扰动参数，ε 为变元，有

$$\begin{aligned} i\dot{f}_n = &\Big[\frac{1}{h^2}(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) + (\omega + \delta r)^2(f_{n+1} + \\ & f_{n-1} + 2\bar{f}_n)\Big] + \delta[2(\omega + \delta r)(f_n f_n - \langle f_n \bar{f}_n \rangle) + \\ & (\omega + \delta r)(f_n + f_n)(f_{n+1} + f_{n-1}) - \\ & \langle (f_n + f_n)(f_{n+1} + f_{n-1}) \rangle] + \\ & \delta^2\Big[f_n f_n(f_{n+1} + f_{n-1}) - \langle f_n \bar{f}_n(f_{n+1} + f_{n-1}) \rangle - \\ & f_n\Big(2\langle f_n \dot{f}_n \rangle + \frac{1}{2}[\langle (f_n + \bar{f}_n)(f_{n+1} + f_{n-1}) \rangle + \\ & \langle (f_n + \bar{f}_n)(f_{n+1} + \dot{f}_{n-1}) \rangle]\Big) - \varepsilon'\Big(\frac{\Gamma}{(\omega + \delta r)} f_n \sin\theta + \\ & i\Big[2f_n - \frac{\beta}{h^2}(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1})\Big]\Big)\Big] - \\ & \delta^3\Big[\frac{f_n}{\alpha(\omega + \delta r)}(\langle f_n \ddot{f}_n(f_{n+1} + f_{n-1}) \rangle + \\ & \langle f_n \bar{f}_n(f_{n+1} + \bar{f}_{n-1}) \rangle)\Big] \end{aligned} \qquad (6.2.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = &\delta\Big[-\varepsilon'(2(\omega + \delta r) - \Gamma\cos\theta) - i\frac{1}{2}(\omega + \delta r)\cdot \\ & (\langle (f_n + \bar{f}_n)(f_{n+1} + f_{n-1}) \rangle - \\ & \langle (f_n + f_n)(\bar{f}_{n+1} + f_{n-1}) \rangle)\Big] - \\ & i\frac{\delta^2}{2}[\langle f_n \dot{f}_n(f_{n+1} + f_{n-1}) \rangle - \\ & \langle f_n \bar{f}_n(\bar{f}_{n+1} + \bar{f}_{n-1}) \rangle] \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = -2\delta r(2\omega + \delta\gamma) - \delta^2\Big[\frac{\varepsilon'\tau}{\omega + \delta r}\sin\theta + 2\langle f_n\bar{f}_n\rangle +$$

$$\frac{1}{2}(\langle(f_n + \bar{f}_n)(f_{n+1} + f_{n-1})\rangle + \langle(f_n + \bar{f}_n)\cdot$$

$$(\bar{f}_{n+1} + f_{n-1})\rangle)\Big] - \frac{\delta^3}{2(\omega + \delta r)}\cdot$$

$$[\langle f_n f_n(f_{n+1} + f_{n-1})\rangle + \langle f_n\bar{f}_n(\bar{f}_{n+1} + \bar{f}_{n-1})\rangle]$$

$$\varepsilon' = 0$$

上述方程组设 $\delta\neq0$。当 $\delta=0$ 时，我们可得方程组

$$\begin{cases} i\dot{f}_n = \Big[\dfrac{1}{h^2}(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) + \\ \qquad \omega^2(f_{n+1} + f_{n-1} + 2f_n)\Big] \\ \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \\ \varepsilon' = 0 \end{cases} \tag{6.2.12}$$

此时可定义 E_c 的子集

$$\mathrm{A}_c \equiv \{(r,\theta,f_n,\varepsilon') \in E_c \mid \vec{f} = 0\}$$

它由不动点组成。在A_c 的任何点，它的稳定空间是一维的，不稳定空间也是一维的，它的中心空间是余维 2 的。线性增长(衰减)率为

$$\Omega = 2\sqrt{(1-\cos^2 k_1)\left(\frac{1}{h^2}+\omega^2\right)\left(\omega^2 - N^2\tan^2\frac{\pi}{N}\right)}$$

对于A_c 中的任何点是相同的，这里 $k_1 = 2\pi/N$，A_c 的中心稳定、中心不稳定和中心流形分别是相应的中心稳定、中心不稳定和中心线性子丛的嵌入，分别记以L^{cs}、L^{cu}和L^{c}。L^{cs}和L^{cu}为余维 1，L^{c} 为余维 2，视 δ 为扰动参数，则 $\delta\neq0$ 方程组为 $\delta=0$ 方程组的扰动。

我们需研究这些不变流形在 δ 扰动下的不变性。根据 Fenichel 理论，我们可以断言：对于 $\forall\,\delta\in[0,\delta_0]$，不变流形$\mathrm{W}_\delta^{cs}$、$\mathrm{W}_\delta^{cu}$ 和W_δ^{c} 分别表示为通过L^{cs}、L^{cu}和L^{c} 的图，且$\mathrm{W}_{\delta=0}^{cs} = \mathrm{L}^{cs}$，$\mathrm{W}_{\delta=0}^{cu} = \mathrm{L}^{cu}$，$\mathrm{W}_{\delta=0}^{c} = \mathrm{L}^{c}$。要害的问题是 δ_0 与 ε' 无关。如令 $\delta=\delta_0$，通过尺度变换式(6.2.10)可将 E_c 变换为S的子域 D_c。可以断言 D_c 与 ε 无关，当 $\varepsilon'\to0$ 时 $\varepsilon\to0$，D_c 为 $O(\varepsilon^0)$阶的。

从上面知道，在不变平面 Π 上，扰动方程精确地具有三个不动点：$(O_\varepsilon, q_\varepsilon, p_\varepsilon)$，其中 O_ε 为原点的变形，而其他两点则来自圆 S_ω 的两个点。在平面 Π 上，O_ε 和 p_ε 为收点，而 q_ε 为鞍点。在整个相空间 S 上，线性稳定性分析表明 O_ε 是汇点，而 p_ε，q_ε 为鞍点。进一步，p_ε 的不稳定线性子空间是一维的，p_ε 的稳定线性子空间是余维 1 的，q_ε 的不稳定线性子空间是二维的，而 q_ε 的稳定线性子空间是余维 2 的。由不变流形理论可知 $W^u(p_\varepsilon)$存在，是一维的；$W^s(p_\varepsilon)$也是存在的，是余维 1 的；$W^u(q_\varepsilon)$存在，二维的；$W^s(q_\varepsilon)$存在具有余维 2。

下面我们考虑 q_ε 的线性稳定性。考虑 q_ε 的调和扰动

$$q_n = q_\varepsilon + \eta\tilde{q}_n,\quad 0<\eta\ll1$$

$$\tilde{q}_n = (A_j e^{\Omega_j t} + B_j e^{\Omega_j t})\cos k_j n$$

其中 $k_j = \dfrac{2\pi j}{N}$，A_j、B_j 为复常数。在 k_j 处有如下色散关系

$$\Omega_j \equiv \Omega_j^{\pm} = -\varepsilon[\alpha + 2\beta h^{-2}(1-\cos k_j)] \pm 2\sqrt{E_j F_j} \tag{6.2.13}$$

其中

$$E_j = 2\mid q_\varepsilon\mid^2 + (\mid q_\varepsilon\mid^2 - \omega^2) - (1-\cos k_j)\left(\frac{1}{h^2} + \mid q_\varepsilon\mid^2\right)$$

$$F_j = (1-\cos k_j)\left(\frac{1}{h^2} + \mid q_\varepsilon\mid^2\right) - (\mid q_\varepsilon\mid^2 - \omega^2)$$

从方程(6.2.4)、式(6.2.5)可计算$\mid q_\varepsilon\mid = \omega - C\varepsilon + O(\varepsilon^2)$，对某个

正常数 C,我们有如下的吸引或排斥率渐近式

(1) $j=0$;因此,$k_0=0$,$E_0=2|q_\varepsilon|^2+(|q_\varepsilon|^2-\omega^2)>0$,$F_0=-(|q_\varepsilon|^2-\omega^2)>0$;则 $E_0F_0>0$,

$$E_0F_0=4\varepsilon C\omega^3+O(\varepsilon^2)$$

因此,$\Omega_0^\pm$ 具有渐近形式:

$$\Omega_0^\pm=\pm 4\varepsilon^{1/2}C^{1/2}\omega^{3/2}+O(\varepsilon)$$

(2) $j=1$;因此 $k_1=\frac{2\pi}{N}$,$F_1>0$,因 $N\tan\frac{\pi}{N}<\omega<N\tan\frac{2\pi}{N}$,$E_1=(1+\cos k_1)\left(\omega^2-N^2\tan^2\frac{\pi}{N}\right)+O(\varepsilon)>0$,因此 $E_1F_1>0$,

$$E_1F_1=(1-\cos^2k_1)(1/h^2+\omega^2)\left(\omega^2-N^2\tan^2\frac{\pi}{N}\right)+O(\varepsilon)$$

因此,$\Omega_1^\pm$ 具有渐近形式

$$\Omega_1^\pm=\pm 2\sqrt{(1-\cos^2k_1)\left(\frac{1}{h^2}+\omega^2\right)\left(\omega-N^2\tan^2\frac{\pi}{N}\right)}+O(\varepsilon)$$

(3) 对 $j=2,3,\cdots,M$($M=N/2$,N 为偶数;$M=(N-1)/2$,N 为奇数);$F_j>0$,因 $N\tan\frac{\pi}{N}<\omega<N\tan\frac{2\pi}{N}$,$E_j=(1+\cos k_j)\left(\omega^2-N^2\tan^2\frac{j\pi}{N}\right)+O(\varepsilon)<0$,因此 $E_jF_j<0$,$\Omega_j^\pm$ 具有形式

$$\Omega_j^\pm=-\varepsilon[\alpha+2\beta h^{-2}(1-\cos k_j)]\pm 2i\sqrt{|E_jF_j|}$$

于是我们有三个不同的吸引排斥率:$O(\varepsilon^0)(j=1)$,$O(\varepsilon^{1/2})(j=0)$,$O(\varepsilon)$(其余 j),$j=2$ 为最慢的吸引方向。振幅 A_j,B_j 满足方程

$$[i\Omega_j-(2k_1(\cos k_j-1)+k_2)]A_j=2|q_\varepsilon|^2\bar{B}_j \quad (6.2.14)$$

$$[i\bar{\Omega}-(2k_1(\cos k_j-1)+k_2)]B_j=2|q_\varepsilon|^2\bar{A}_j \quad (6.2.15)$$

其中 $k_1=h^{-2}+|q_\varepsilon|^2+i\varepsilon\beta h^{-2}$,$k_2=4|q_\varepsilon|^2-2\omega^2-i\varepsilon\alpha$。式(6.2.14)、式(6.2.15)的相容条件给出色散关系式(6.2.13)。

(1) 对 $j=0,1$;Ω_j 是实的,则从式(6.2.14)、式(6.2.15)关系有

$$\left|i\bar{\Omega}_j-(2k_1(\cos k_j-1)+k_2)\right|=2|q_\varepsilon|^2$$

因此,能写

$$i\bar{\Omega}_j^\pm-(2k_1(\cos k_j-1)+k_2)=2|q_\varepsilon|^2e^{i\varphi_j^\pm}$$

其中

$$\varphi_j^\pm=\arctan\left\{\frac{\Omega_j^\pm-(2\mathrm{Im}\{k_1\}(\cos k_j-1)+\mathrm{Im}\{k_2\})}{2\mathrm{Re}\{k_1\}(1-\cos k_j)-\mathrm{Re}\{k_2\}}\right\} \quad (6.2.16)$$

则 $B_j=e^{-i\varphi_j^\pm}\bar{A}_j$。因此有

$$\tilde{q}_n=(A_j+e^{-i\varphi_j^\pm}\bar{A}_j)e^{\Omega_j^\pm t}\cos k_jn$$

令 $A_j=r_je^{i\theta_j}$,则

$$A_j+e^{-i\varphi_j^\pm}\bar{A}_j=r_je^{-i\frac{1}{2}\varphi_j^\pm}\left[e^{i\left(\theta_j+\frac{1}{2}\varphi_j^\pm\right)}+e^{-i\left(\theta_j+\frac{1}{2}\varphi_j^\pm\right)}\right]=$$

$$2r_j\cos\left(\theta_j+\frac{1}{2}\varphi_j^\pm\right)e^{-i\frac{1}{2}\varphi_j^\pm}\equiv C_j^\pm e^{-i\frac{1}{2}\varphi_j^\pm}$$

其中 $C_j^\pm\equiv 2r_j\cos\left(\theta_j+\frac{1}{2}\varphi_j^\pm\right)$ 为实参数。因此 $\tilde{q}_n$ 为

$$\tilde{q}_n=C_j^\pm e^{-i\frac{1}{2}\varphi_j^\pm}e^{\Omega_j^\pm t}\cos k_jn$$

这里 $\varphi_j^\pm$ 为固定位相由式(6.2.16)所给定,$C_j^\pm$ 为定常数。

(2) 对 $j=2,\cdots,M$,Ω_j 为复的,$B_j=b_jA_j$,$b_j=2|q_\varepsilon|^2(i\bar{\Omega}_j^\pm-(2k_1(\cos k_j-1)+k_2))^{-1}$,则 $\tilde{q}_n$ 具有形式

$$\tilde{q}_n=[A_je^{i\mathrm{Im}\{\Omega_j^\pm\}t}+b_j\bar{A}_je^{-i\mathrm{Im}\{\Omega_j^\pm\}t}]e^{\mathrm{Re}\{\Omega_j^\pm\}t}\cos k_jn$$

其中 A_j 为复参数。

6.3 Fenichel 纤维

显然在定理 6.2.2 中的中心稳定流形 W_ε^{cs} 和中心不稳定流形 W_ε^{cu} 对 ε 是 C^k 光滑,但在 W_ε^{cs} 和 W_ε^{cu} 中的轨线甚至仅是 C^0 连续,这是由于时间上的奇异性质。我们的中心任务是寻找出一条相连于 q_ε 的同宿轨道,为此,需要在 $W_\varepsilon^c, W_\varepsilon^{cs}, W_\varepsilon^{cu}$ 的邻域建立更好的坐标系。Fenichel 引用不同的时间尺度和 Hadamard 的图变换建立了一个称为"Fenichel 纤维"的坐标,这些纤维具有某些很好的性质(对于我们的情况,纤维为一维曲线)。特别地,它们对 ε 是光滑的,我们将表示 W_ε^{cs} 和 W_ε^{cu} 作为这些 Fenichel 纤维的并集。

6.3.1 Fenichel 纤维表示的一个例子

考虑简单的二维系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1$。图 6.3.1 给出作为奇性扰动的轨线。

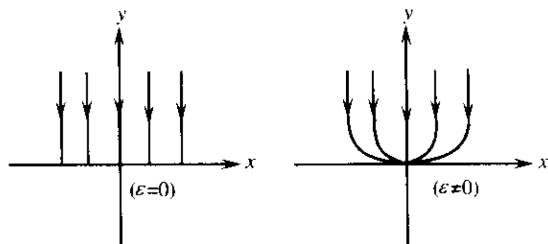


图 6.3.1 简单例子中的轨线

Fenichel 纤维定义如下:定义一族一维曲线,$q_0=(x_0,0)\in R$ 为基点

$$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(q_0)=\{q=(x_0,y)\mid y\in R\}$$

为稳定 Fenichel 纤维如图 6.3.2 所示。

纤维具有如下好的性质:

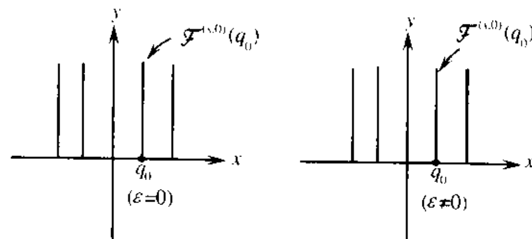


图 6.3.2 简单例子中的纤维

(1) "$\varepsilon\neq 0$ 纤维"是和"$\varepsilon=0$ 纤维"一样的;

(2) 以 F_ε^t 表示解算子,设 $q_0\in R$ 为一基点,$q_0=(x_0,0)$,则 $F_\varepsilon^t\cdot q_0=(x_0e^{-\varepsilon t},0)$。$\forall q_1\in\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(q_0)$,则 $q_1=(x_0,y_1)$,对某个 $y_1\in R$,$F_\varepsilon^t q_1=(x_0e^{-\varepsilon t},ye^{-t})$。因此有

$$\|F_\varepsilon^t\cdot q_1-F_\varepsilon^t\cdot q_0\|=e^{-t}\|q_1-q_0\|$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 R^2 中欧氏模。因此在纤维上的点,具有性质:

(3) 虽然纤维本身对流不具有不变性,但作为一族纤维,它在流下是不变的,即纤维丛和解算子可交换

$$F_\varepsilon^t\cdot\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(q_0)=\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(F_\varepsilon^t\cdot q_0)$$

6.3.2 纤维定理

为此,先叙述某些定义。

定义 6.3.1 (局部的子流形的正(负)的不变族)

设 V 为 S 中在流 F_ε^t 下的一个局部不变子流形,令 $\{M(Q):Q\in V\}$ 为 S 的一族子流形,具有参数 $Q\in V$,我们说 $\{M(Q):Q\in V\}$ 是在流 F_ε^t 下的一族局部正不变子流形。如果 $F_\varepsilon^t(M(Q))\subset M(F_\varepsilon^t(Q)),\forall Q\in V,t\geqslant 0$ 使得 $\bigcup_{t'\in(0,t)}F_\varepsilon^{t'}(Q)\subset V$。类似地,如果 $F_\varepsilon^t(M(Q))\subset M(F_\varepsilon^t(Q)),\forall Q\in V,\forall t\leqslant 0$,使得 $\bigcup_{t'\in[t,0]}F_\varepsilon^{t'}(Q)\subset V$,则称 $\{M(Q):Q\in V\}$ 为一族局部的在流 F_ε^t 下的负不变子流形。

定义 6.3.2 (C^{r_2}流形的 C^{r_1}族) 设 V 是 S 中的局部不变子流形,$\{\mathscr{M}(Q):Q\in V\}$ 为 S 中的 C^{r_2}子流形,参数 $Q\in V$,令

$$M = \{(Q, Q') \mid Q \in V, Q' \in \mathscr{M}(Q)\}$$

我们说$\{\mathscr{M}(Q): Q \in V\}$是$C^{r_2}$子流形的$C^{r_1}$族,如果$M$是$C^{r_1}$的$S \times S$的子流形。

由Fenichel纤维定理可得。

定理 6.3.3 设定理6.2.2的不变流形的局部保持性的条件满足,则在局部不变中心稳定流形W_ε^{cs}的内部,存在C^k一维流形的C^{k-1}族$\{\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q}): \boldsymbol{q} \in W_\varepsilon^c\}$,即稳定Fenichel纤维,则$W_c^{cs}$能表示为这些纤维的并

$$W_\varepsilon^{cs} = \bigcup_{q \in W_\varepsilon^c} \mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$$

且每条纤维$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$和不变中心流形$W_\varepsilon^c$横截相交于一点,即纤维的基点;二条纤维$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q}_1)$和$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q}_2)$要么不相连$(\boldsymbol{q}_1 \neq \boldsymbol{q}_2)$,要么相同$(\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2)$, $\forall\, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in W_\varepsilon^c$。进一步,这些稳定纤维具有如下性质:

(1)$\{\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q}): \boldsymbol{q} \in W_\varepsilon^c\}$是关于$\varepsilon \in C^{k-1}$光滑,$\varepsilon \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$;更详细地,令$\hat{S} \equiv S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$,则$\{(\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q}), \varepsilon): (\boldsymbol{q}, \varepsilon) \in W_\varepsilon^c \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)\}$为在$S$中的$C^k$一维流形的$C^{k-1}$族。

(2) $\{\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q}): \boldsymbol{q} \in W_\varepsilon^c\}$是一个子流形的局部正不变族。

(3) 设$k_s \equiv \sqrt{(1 - \cos^2 k_1)(1/h^2 + \omega^2)\left(\omega^2 - N^2 \tan^2 \dfrac{\pi}{N}\right)}$,则存在一个正常数$C_s$,使得如$\boldsymbol{q} \in W_\varepsilon^c$, $\boldsymbol{q}_1 \in \mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(q)$,则

$$\| F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}_1) - F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}) \| \leqslant C_s e^{-k_s \tau} \| \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q} \|, \forall\, \tau \geqslant 0$$

使得$F_\varepsilon^t(\boldsymbol{q}) \in W_\varepsilon^c$, $t \in [0, \tau]$。进一步,如$\boldsymbol{q} \in$最大正不变集$A^+(\mathscr{U})$,则$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q}) = \{\boldsymbol{q} \in \mathscr{U}: \| F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}_1) - F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}) \| \leqslant C_s e^{-k_s \tau} \| \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q} \|, \forall\, \tau \geqslant 0\}$。

(4) 对任何$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in W_\varepsilon^c$, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{p}$, $\forall\, \boldsymbol{q}_1 \in \mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$, $\forall\, \boldsymbol{p}_1 \in \mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(p)$

如

$$F_\varepsilon^t(\boldsymbol{q}), F_\varepsilon^t(\boldsymbol{p}) \in W_\varepsilon^c, \quad \forall\, t \in [0, +\infty)$$

进一步

$$\| F_\varepsilon^t(\boldsymbol{p}_1) - F_\varepsilon^t(\boldsymbol{q}) \| \to 0, \quad t \to \infty$$

则

$$\left\{ \frac{\| F_\varepsilon^t(\boldsymbol{q}_1) - F_\varepsilon^t(\boldsymbol{q}) \|}{\| F_\varepsilon^t(\boldsymbol{p}_1) - F_\varepsilon^t(\boldsymbol{q}) \|} \right\} \Big/ e^{-\frac{1}{2} k_s t} \to 0, \quad t \to \infty$$

类似地,对W_ε^{cu}也类似成立。

附注:Fenichel纤维的惟一性。如$\boldsymbol{q} \in A^+(\mathscr{U})$,则Fenichel纤维$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$具有定理6.3.3中(4)意义下的惟一性。设$\mathscr{F}_1^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$, $\mathscr{F}_2^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$为具相同基点$\boldsymbol{q} \in W_\varepsilon^c$的两个不同的稳定Fenichel纤维,进一步,$\boldsymbol{q} \in A^+(\mathscr{U})$,则存在两个点$\boldsymbol{p}_1 \in \mathscr{F}_1^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{p})$和$\boldsymbol{q}_1 \in \mathscr{F}_2^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$,使得$\boldsymbol{p}_1$不属于$\mathscr{F}_2^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{q}_1$不属于$\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})$。由定理6.3.3(4)有

$$\left\{ \frac{\| F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}_1) - F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}) \|}{\| F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{p}_1) - F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}) \|} \right\} \to 0, \quad t \to \infty$$

和

$$\left\{ \frac{\| F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{p}_1) - F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}) \|}{\| F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}_1) - F_\varepsilon^\tau(\boldsymbol{q}) \|} \right\} \to 0, \quad t \to \infty$$

由矛盾性推出惟一性。

6.3.3 "数 8⊗A"的惟一显式的 Fenichel 纤维

从可积理论,可知道$\mathscr{F}^{(s,0)}(\boldsymbol{q})$和$\mathscr{F}^{(u,0)}(\boldsymbol{q})$很清楚。在某些情况下,还可明显表示出来。例如对于"数字8⊗A",从推论6.1.2可得惟一的Fenichel纤维明显表达式。

定理 6.3.4 对于可积离散NLS方程(1.2)有

(1)"数字8⊗A"具基点$\boldsymbol{q} \in A: (q_n \equiv q, \forall\, n, q = a\exp(i\gamma))$的稳定纤维为

$$\mathscr{F}^{(s,0)}(\boldsymbol{q}) = q e^{i2p}\left[\frac{G}{H_n} - 1\right]$$

其中

$$G = 1 + \cos 2p - i \sin 2p \tanh r$$

$$H_n = 1 \pm \frac{1}{\cos\theta}\sin p\,\mathrm{sech}\,r\cos 2n\theta$$

$$p = \arctan\frac{\sqrt{\rho\cos^2\theta - 1}}{\sqrt{s}\sin\theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{N}\quad,\quad s = 1 + \frac{|q|^2}{N^2}$$

这里 $r \in (-\infty, +\infty)$ 为一维纤维的参数，当 $r \to +\infty$ 时，$\mathscr{F}^{(s,0)}(\boldsymbol{q}) \to q$，且此时 $|\mathscr{F}^{(s,0)}(\boldsymbol{q})|$ 为“数字 8⊗A”具基点（在 A 中）的惟一稳定 Fenichel 纤维。

(2) 在“数字 8⊗A”中具基点 $\boldsymbol{q} \in A: \{q_n \equiv q, \forall n; q = a e^{i\gamma}\}$ 的不稳定纤维为

$$\mathscr{F}^{(u,0)}(\boldsymbol{q}) = q e^{-i2p}\left[\frac{G}{H_n} - 1\right]$$

当 $r \to -\infty$ 时，$\mathscr{F}^{(u,0)}(\boldsymbol{q}) \to q$，且 $|\mathscr{F}^{(u,0)}(\boldsymbol{q})|$ 为“数字 8⊗A”中具基点 $\boldsymbol{q} \in A$ 的惟一不稳定 Fenichel 纤维。

6.4 Melnikov 测量：$W^u(q_\varepsilon) \cap W_\varepsilon^{cs}$

这一节我们将给出 Melnikov 测量（通称“第一测量”），通过它要回答这样的问题：是否存在不同于 $W^u(q_\varepsilon)|_\Pi (\equiv W^u(q_\varepsilon) \cap \Pi)$ 的任何其他的 $W^u(q_\varepsilon)$ 和 W_ε^{cs} 之间的相交？我们知道 W_ε^{cs} 在 S 中为余维 1的子流形，而 $W^u(q_\varepsilon)$ 为二维子流形。一般来说，交集 $W^u(q_\varepsilon) \cap W_\varepsilon^{cs}$ 将是一维的，因我们知道平凡相交 $W^u(q_\varepsilon)|_\Pi$ 是一维的。另一个问题是：是否存在“非平凡”相交？

6.4.1 主要原理

首先，再写方程(6.1.3)为向量形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{q}_n = \rho_n\{J\mathrm{grad}_{\boldsymbol{q}_n}H\} + \varepsilon\,\boldsymbol{\varepsilon}_n \tag{6.4.1}$$

其中

$$\boldsymbol{q}_n \equiv (q_n, r_n)^T, r_n = -\bar{q}_n, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H \equiv -\frac{i}{h^2}\sum_{n=0}^{N-1}\Big\{\bar{q}_n(q_{n+1} + q_{n-1}) - \frac{2}{h^2}(1 + \omega^2 h^2)\ln(1 + h^2 |q_n|^2)\Big\}$$

$$\boldsymbol{g}_n \equiv (g_{n,1}, g_{n,2})^{\mathrm{T}}$$

$$g_{n,1} \equiv -\alpha q_n + \Gamma + \beta N^2(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})$$

$$g_{n,2} \equiv -\alpha r_n - \Gamma + \beta N^2(r_{n+1} - 2r_n + r_{n-1})$$

因我们的工作空间是高维的相空间，首先一个自然的问题是：究竟需要多少个测度量来决定 $W^u(q_\varepsilon)$ 和 W_ε^{cs} 相交？回答是只要一个测度量就足够了。从直观上，W_ε^{cs} 具有余维 1（由 $\mathrm{grad}\tilde{F}_1$ 坐标化），为了测量 $W^u(q_\varepsilon)$ 和 W_ε^{cs} 之间的距离，我们仅需沿着横截方向 $\overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1}$ 来测量，这就要求一个 Melnikov 积分就行了，如图 6.4.1 所示。

严格的理论分析：在 S 中考虑共振圆 S_ω 的一个 $O(\varepsilon^0)$ 邻域 $\mathscr{U}$，具有边界 $\partial\mathscr{U}$，在 $\mathscr{U}$ 的邻域由定理 6.2.3（不变流形的局部不变性）和纤维定理 6.3.3 有

$$W^u(q_\varepsilon) = \bigcup\{\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})\,|\,\boldsymbol{q} \in W^u(q_\varepsilon)|_\Pi\} \tag{6.4.2}$$

$$W^u(q_\varepsilon)|_\Pi = \{(\gamma, I)\,|\,I = \omega + \sqrt{\varepsilon}J^u(\gamma)\} \tag{6.4.3}$$

其中 $J^u(\gamma)$ 表示在平面 Π 上的曲线，它是 q_ε 的不稳定流形限制在这个平面上，见方程(6.2.4)、式(6.2.5)。类似地 W_ε^{cs} 具有纤维表示

$$W_\varepsilon^{cs} = \bigcup\{\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})\,|\,\boldsymbol{q} \in W_\varepsilon^c\} \tag{6.4.4}$$

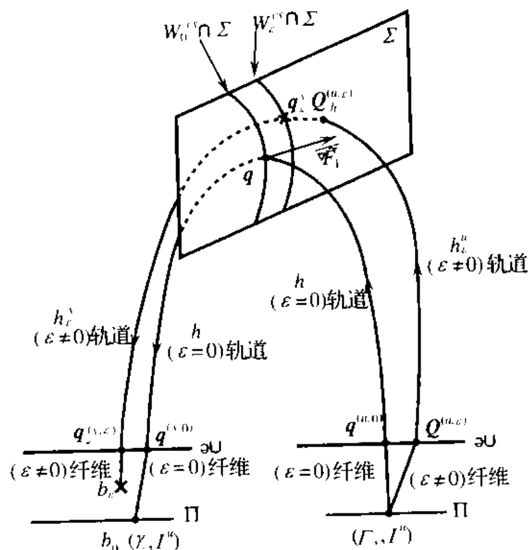


图 6.4.1 Melnikov 测度的几何解释

令 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 为在 W_ε^c 中共振圆 S_ω 的一个 $O(\varepsilon^0)$ 邻域，选取 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 含在 $\mathscr{U}$ 中，即 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 从不接触 $\mathscr{U}$ 的边界。注意到 $W^u(q_\varepsilon)|_\Pi\subset\mathscr{M}_\varepsilon$，事实上，可选取 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 如此之大，使整个“鱼”位在其中。定义

$$W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)\equiv\bigcup\{\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})\mid\boldsymbol{q}\in\mathscr{M}_\varepsilon\}\tag{6.4.5}$$

$$W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)\equiv\bigcup\{\mathscr{F}^{(s,\varepsilon)}(\boldsymbol{q})\mid\boldsymbol{q}\in\mathscr{M}_\varepsilon\}\tag{6.4.6}$$

定义 $\partial\mathscr{U}_\varepsilon^u\equiv\partial\mathscr{U}\cap W^u(\mathscr{M}_\varepsilon)$，$\partial\mathscr{U}_\varepsilon^s\equiv\partial\mathscr{U}\cap W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$。作为纤维定理 6.3.3 的推论，有如下引理。

引理 6.4.1 在 S 中，$\partial\mathscr{U}_\varepsilon^u$ 中的每一点是在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 中具有惟一基点的由式(6.4.5)表示的惟一不稳定纤维上。类似地，在 $\partial\mathscr{U}_\varepsilon^s$ 上的每点是在 $\mathscr{M}_\varepsilon$ 中的惟一基点由式(6.4.6)表示的惟一稳定纤维上。

类似地，定义 $\partial\mathscr{U}(q_\varepsilon)\equiv\partial\mathscr{U}\cap W^u(q_\varepsilon)$，以下引理也是纤维定理 6.3.3 的推论。

引理 6.4.2 在 S 中，在 $\partial\mathscr{U}^u(q_\varepsilon)$ 上的每一点都是在 $W^u(q_\varepsilon)|_\Pi$ 中具惟一基点的以式(6.4.2)、式(6.4.3)表示的惟一不稳定纤维上。

现开始研究 $W^u(q_\varepsilon)$ 和 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)\subset W_\varepsilon^{cs}$ 相交的可能性。考虑在 $W^u(q_\varepsilon)$ 中不稳定纤维的 $W^u(q_\varepsilon)|_\Pi$ 的所有基点(见图 6.4.1)选取一个基点 $(\gamma,I^u)\in W^u(q_\varepsilon)|_\Pi$，则存在惟一的一条扰动不稳定纤维，$\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(\gamma,I^u)$ 具有基点 (γ,I^u)。同时也存在惟一的一条未扰动纤维，该纤维可由纤维定理 6.3.3 明显表示出来。由纤维定理 6.3.3，$\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(\gamma,I^u)$ 对 ε 是 C^{k-1} 光滑的，因此 $\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(\gamma,I^u)$ 是在 $\mathscr{F}^{(u,0)}(\gamma,I^u)$ 的 $O(\varepsilon)$ 邻域。我们知道 $\mathscr{F}^{(u,0)}(\gamma,I^u)$ 是和余维 1 的边界 $\partial\mathscr{U}$ 横截相交，因此 $\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(\gamma,I^u)$ 也和余维 1 的边界 $\partial\mathscr{U}$ 横截相交，令

$$\boldsymbol{q}^{(u,\varepsilon)}\equiv\mathscr{F}^{(u,\varepsilon)}(\gamma,I^u)\cap\partial\mathscr{U},\quad\boldsymbol{q}^{(u,0)}\equiv\mathscr{F}^{(u,0)}(\gamma,I^u)\cap\partial\mathscr{U}$$

则有

$$\boldsymbol{q}^{(u,\varepsilon)}=\boldsymbol{q}^{(u,0)}+O(\varepsilon)\tag{6.4.7}$$

从 $\boldsymbol{q}^{(u,0)}$ 出发，未扰动 NLS 方程(6.1.2)具有轨线 h 同宿于不变平面 Π，且有显式表达式。在有限时间之后，h 将和 $\partial\mathscr{U}$ 第二次相交，我们用 $\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 表示在着陆一边(Landing side)的惟一交点。必须强调：$\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 是在基点为 $(\gamma_*,I^{(s,0)})\in\Pi$ 的惟一一条未扰动稳定纤维上，且 $I^{(s,0)}=I^u$。从 $\boldsymbol{q}^{(u,\varepsilon)}$ 开始，扰动的离散 NLS 方程(6.1.3)也有一条轨道 h_ε^u。由解算子的光滑性知，在一个有限时间区间里，h_ε^u 将在 h 的 $O(\varepsilon)$ 邻域内。因此，h_ε^u 也和 $\partial\mathscr{U}$ 在点 $\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}$ 相交，且 $\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}$ 在 $\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 的 $O(\varepsilon)$ 邻域内。而 Melnikov 测度用于决定 $\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}$ 是否在 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$ 里。

接下来是在 h 上介于 $\boldsymbol{q}^{(u,0)}$ 和 $\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 之间的一点处建立同宿坐标系。对于这样的任何一点 $\boldsymbol{q}_h$，让 Σ 表示点 $\boldsymbol{q}_h$ 处横截于同宿轨道 h 的余维 1 的超平面，且包含向量 $\mathrm{grad}\tilde{F}_1$。$W_0^{cs}\cap\Sigma$ 在 Σ 里有余维 1，且 $\mathrm{grad}\tilde{F}_1$ 横截于 $W_0^{cs}\cap\Sigma$。设 $\{\boldsymbol{r}_j\}$ 是点 $\boldsymbol{q}_h$ 处 $W_0^{cs}\cap\Sigma$ 的切空间的坐标，即 $\{\mathrm{grad}\tilde{F}_1,\boldsymbol{r}_j\}$ 是关于 Σ 的原点在 $\boldsymbol{q}_h$ 的坐标系。在这组坐标之下，交点 $\boldsymbol{q}_h^{(u,\varepsilon)}\equiv h_\varepsilon^u\cap\Sigma$ 有表示式

$$q_h^{(u,\varepsilon)} = \varepsilon a^u \overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1} + \sum_j \varepsilon a_j^u r_j \tag{6.4.8}$$

这是由关系式(6.4.7)和解算子 F_ε^t 的正则性所得到的。对于任意 $q^s \in W^s(\mathscr{M}_\varepsilon) \cap \Sigma$，有

$$q^s = f^s(|a_j^s|)\overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1} + \sum_j a_j^s r_j \tag{6.4.9}$$

这里，$|a_j^s|$ 是余维 1 的超曲面 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon) \cap \Sigma$ 在 Σ 里的参数，$f^s(|a_j^s|)$ 是光滑函数。现在，我们选取 a_j^s 的一个特殊值，$a_j^s = \varepsilon a_j^u$，对所有 j。这种特殊的选取确定了 $\Sigma_s(\Sigma_s \equiv W^s(\mathscr{M}_\varepsilon) \cap \Sigma)$ 上的一个惟一点 q^s_*，且有表达式

$$q^s_* = f^s(|\varepsilon a_j^n|)\overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1} + \sum_j \varepsilon a_j^u r_j \tag{6.4.10}$$

由整体不变的不变流形定理 6.2.4，整体不变中心稳定流形 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon) \subset W_\varepsilon^{cs}$ 对 ε 为 C^k 光滑，因此 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon) \cap \Sigma$ 存在 Σ 中的 $W_0^{cs} \cap \Sigma$ 的 $O(\varepsilon)$ 邻域内，它通过原点。我们有

$$f^s(|\varepsilon a_j^u|) = \varepsilon a^s \tag{6.4.11}$$

a^s 为某实数，由方程(6.4.8)、式(6.4.10)、式(6.4.11)可在 $q_n^{(u,\varepsilon)}$ 和 q^s_* 之间定义符号距离

$$\begin{aligned} d_1 = & \text{Signed Distance}\{q_n^{(u,\varepsilon)}, q^s_*\} \\ \equiv & \varepsilon(a^u - a^s)\|\mathrm{grad}\tilde{F}_1\|^2 \\ \equiv & \langle \overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1}, q_n^{(u,\varepsilon)} - q^s_* \rangle \end{aligned} \tag{6.4.12}$$

我们的问题是要简化测量 $q_n^{(u,\varepsilon)}$ 和 q^s_* 之间的距离。即在 $\overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1}$ 方向仅有一个测度量就够了(见图 6.4.1)。

6.4.2 Melnikov 积分的确定

给出轨线 h 和 h_ε^u 的如下参数化：

$$h \equiv h(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

$$h(0) = q_h$$

$$h_\varepsilon^u \equiv h_\varepsilon^u(t), \quad -\infty < t \leqslant 0$$

$$h_\varepsilon^u(0) = q_h^{(u,\varepsilon)}$$

令 h_ε^s 表示轨线 $F_\varepsilon^t(q^s_*)$，$0 \leqslant t < \infty$，具有参数化

$$h_\varepsilon^s \equiv h_\varepsilon^s(t), \quad 0 \leqslant t < \infty$$

$$h_\varepsilon^s(0) = q^s_*$$

注意到

$$d_1 = \text{Signed Distance}\{q_h^{(u,\varepsilon)}, q^s_*\} = \langle \overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1}, q_h^{(u,\varepsilon)} - q^s_* \rangle$$

可分解 d_1 为

$$d_1 = \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(q_h)}, q_h^{(u,\varepsilon)} - q_h \rangle - \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(q_h)}, q^s_* - q_h \rangle$$

令

$$\triangle^-(t) \equiv \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}(h(t), h_\varepsilon^s(t)) - h(t) \rangle, \quad 0 \leqslant t < +\infty$$

$$\triangle^+(t) \equiv \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}(h(t), h_\varepsilon^u(t)) - h(t) \rangle, \quad -\infty < t \leqslant 0$$

则

$$d_1 = \triangle^-(0) - \triangle^+(0) \tag{6.4.13}$$

定理 6.4.3

$$\triangle^-(0) = \varepsilon\int_{-\infty}^{0} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, g(h(t)) \rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2)$$

$$\triangle^+(0) = -\varepsilon\int_{0}^{+\infty} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, g(h(t)) \rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2)$$

因此 $d_1 =$ 符号距离$\{q_*^{(u,\varepsilon)}, q^s_*\} = \varepsilon M_{\tilde{F}_1} + O(\varepsilon^2)$。其中

$$M_{\tilde{F}_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, g(h(t)) \rangle \mathrm{d}t =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\Lambda-1} \left(\frac{\delta \tilde{F}_1}{\delta q_n} g_{n,1} + \frac{\delta \tilde{F}_1}{\delta r_n} g_{n,2} \right) \bigg|_{h(t)} \right\} \mathrm{d}t$$

证：因 $h(t)$，$h_\varepsilon^s(t)$ 和 $h_\varepsilon^u(t)$ 为下列方程的解

$$\dot{h}(t) = \mathscr{J}\nabla H(h(t))$$

$$\dot{h}_\varepsilon^s(t) = \mathscr{J}\nabla H(h_\varepsilon^s(t)) + \varepsilon \boldsymbol{g}(h_\varepsilon^s(t))$$

$$\dot{h}_\varepsilon^u(t) = \mathscr{J}\nabla H(h_\varepsilon^u(t)) + \varepsilon \boldsymbol{g}(h_\varepsilon^u(t))$$

其中 $\mathscr{J}$为辛矩阵,可写成方块形式,$\mathscr{J}=\mathrm{diag}\{J_0,\cdots,J_{N-1}\}$,

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \rho_n \\ -\rho_n & 0 \end{pmatrix}$$

这里 ρ_n 为式(6.1.2)给定,因此

$$\dot{h}_\varepsilon^s(t) - \dot{h}(t) = \mathscr{J}\nabla H(h_\varepsilon^s(t)) - \mathscr{J}\nabla H(h(t)) + \varepsilon \boldsymbol{g}(h_\varepsilon^s(t)) = \nabla(\mathscr{J}\nabla H)(h(t)) \cdot (h_\varepsilon^s(t) - h(t)) + \varepsilon \boldsymbol{g}(h(t)) + R_1 + R_2$$

其中

$$R_1 \equiv \mathscr{J}\nabla H(h_\varepsilon^s(t)) - \mathscr{J}\nabla H(h(t)) - \nabla(\mathscr{J}\nabla H)(h(t)) \cdot (h_\varepsilon^s(t) - h(t))$$

$$R_2 \equiv \varepsilon(\boldsymbol{g}(h_\varepsilon^s(t)) - \boldsymbol{g}(h(t)))$$

微分$\triangle^+(t)$得

$$\dot{\triangle}^+(t) = \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, \dot{h}_\varepsilon^s(t) - \dot{h}(t)\rangle + \langle \overline{\nabla^2 \tilde{F}_1(h(t))}\dot{h}(t), h_\varepsilon^s(t) - h(t)\rangle = \varepsilon\langle \nabla \tilde{F}_1(h(t)), \boldsymbol{g}(h(t))\rangle + \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_1\rangle + \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_2\rangle + E$$

其中

$$E = \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))} \cdot \nabla(\mathscr{J}\nabla H)(h(t)) \cdot (h_\varepsilon^s(t) - h(t))\rangle + \langle \overline{\nabla^2 \tilde{F}_1(h(t)) \cdot \mathscr{J}\nabla H(h(t))}, h_\varepsilon^s(t) - h(t)\rangle$$

由 Poisson 括号知

$$\{\tilde{F}_1, H\} = \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}, \mathscr{J}\nabla H\rangle = 0$$

微分可得

$$\langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(\boldsymbol{q})}, \nabla(\mathscr{J}\nabla H)(\boldsymbol{q}) \cdot \delta \boldsymbol{q}\rangle + \langle \overline{\nabla^2 \tilde{F}_1(\boldsymbol{q}) \cdot \delta \boldsymbol{q}}, \mathscr{J}\nabla H(\boldsymbol{q})\rangle = 0$$

由于$\nabla^2 \tilde{F}_1(\boldsymbol{q})$为对称双线性算子,因此

$$\langle \overline{\nabla^2 \tilde{F}_1(\boldsymbol{q}) \cdot \delta \boldsymbol{q}}, \mathscr{J}\nabla H(\boldsymbol{q})\rangle = \langle \overline{\nabla^2 \tilde{F}_1(\boldsymbol{q}) \cdot \mathscr{J}\nabla H(\boldsymbol{q})}, \delta \boldsymbol{q}\rangle$$

置$\boldsymbol{q} = h(t)$,$\delta \boldsymbol{q} = h_\varepsilon^s(t) - h(t)$,可知 $E = 0$。于是有

$$\dot{\triangle}^+(t) = \varepsilon\langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}(h(t)), \boldsymbol{g}(h(t))\rangle + \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}(h(t)), R_1\rangle + \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}(h(t)), R_2\rangle \tag{6.4.14}$$

类似地有

$$\dot{\triangle}^-(t) = \varepsilon\langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}(h(t)), \boldsymbol{g}(h(t))\rangle + \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}(h(t)), R_3\rangle + \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1}(h(t)), R_4\rangle \tag{6.4.15}$$

其中

$$R_3 \equiv \mathscr{J}\nabla H(h_\varepsilon^u(t)) - \mathscr{J}\nabla H(h(t)) - \nabla(\mathscr{J}\nabla H)(h(t) \cdot (h_\varepsilon^u(t) - h(t)))$$

$$R_4 \equiv E(\boldsymbol{g}(h_\varepsilon^u(t)) - \boldsymbol{g}(h(t)))$$

令$\boldsymbol{q}_*^{(s,\varepsilon)}$表示 $h_\varepsilon^s(t)$和$\partial\mathscr{U}$的交点,则$\boldsymbol{q}_*^{(s,\varepsilon)}$是在以 $b_\varepsilon \in \mathscr{M}_\varepsilon \subset W_\varepsilon^c$ 为基点的惟一稳定纤维上,我们先建立以下两个引理,完成定理证明后再予以证明。

引理 6.4.4 $\lim\limits_{t \to -\infty} \triangle^-(t) = 0$

如果 $F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon) \in W_\varepsilon^c$, $\forall 0 \leqslant \tau < +\infty$,则 $\lim\limits_{t \to \infty} \triangle^+(t) = 0$,如果 $F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon)$不在 W_ε^c 中,$\forall 0 \leqslant \tau < +\infty$,则它停留在 W_ε^c 中($\forall 0 \leqslant \tau \leqslant T(\varepsilon)$)。其中 $T(\varepsilon) \approx O\left(\frac{2}{k_1} ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$;进一步 $\triangle^+(T(\varepsilon)) \approx$

$O(\varepsilon^2)$。

引理 6.4.5

$$\int_{-\infty}^{0}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),R_3\rangle}\mathrm{d}t\approx O(\varepsilon^2)$$

$$\int_{-\infty}^{0}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),R_4\rangle}\mathrm{d}t\approx O(\varepsilon^2)$$

$$\int_{0}^{+\infty(\text{或}T(\varepsilon))}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),R_1\rangle}\mathrm{d}t\approx O(\varepsilon^2)$$

$$\int_{0}^{+\infty(\text{或}T(\varepsilon))}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),R_2\rangle}\mathrm{d}t\approx O(\varepsilon^2)$$

$$\int_{T(\varepsilon)}^{+\infty}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),\boldsymbol{g}(h(t))\rangle}\mathrm{d}t\approx O(\varepsilon^2)\quad(6.4.16)$$

由引理 6.4.4、引理 6.4.5 和方程(6.4.14)、式(6.4.15),可得 $\triangle^-(0),\triangle^+(0)$如下表示:

$$\triangle^-(0)=\varepsilon\int_{-\infty}^{0}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),\boldsymbol{g}(h(t))\rangle}\mathrm{d}t+O(\varepsilon^2)$$

$$\triangle^+(0)=-\varepsilon\int_{0}^{\infty(\text{或}T(\varepsilon))}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),\boldsymbol{g}(h(t))\rangle}\mathrm{d}t+O(\varepsilon^2)$$

再由式(6.4.16),能表示$\triangle^+(0)$为

$$\triangle^+(0)=-\varepsilon\int_{0}^{+\infty}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),\boldsymbol{g}(h(t))\rangle}+O(\varepsilon^2)$$

于是完成了定理 6.4.3 的证明。

现证明引理 6.4.4,即寻求 $\lim\limits_{t\to-\infty}\triangle^-(t)$和 $\lim\limits_{t\to+\infty}\triangle^+(t)$。因

$$\triangle^-(0)=\triangle^-(-\infty)+\int_{-\infty}^{0}\dot{\triangle}^-(t)\mathrm{d}t$$

$$\triangle^+(0)=\triangle^+(+\infty)-\int_{0}^{+\infty}\dot{\triangle}^+(t)\mathrm{d}t$$

先计算 $\lim\limits_{t\to-\infty}\triangle^-(t)$,有

$$\lim_{t\to-\infty}\triangle^-(t)=\lim_{t\to-\infty}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),h_\varepsilon^u(t)-h(t)\rangle}$$

从后面的$\nabla\tilde{F}_1(h(t))$的明显表达式,可知存在 $T_1>0,C_1>0$,使得

$$\|\nabla\tilde{F}_1(h(t))\|\leqslant C_1\mathrm{e}^{k_1t},\quad\forall-\infty<t\leqslant-T_1$$
$$(6.4.17)$$

其中 $k_1>0$。由纤维定理 6.3.3,可知存在 $C_2>0,C_3>0$ 使得

$$\|h_\varepsilon^u(\tau-T_\varepsilon^u)-F_\varepsilon^\tau(\gamma,I^u)\|\leqslant C_2\mathrm{e}^{k_2\tau}\quad(6.4.18)$$

$$\|h(\tau-T_0^u)-F_0^\tau(\gamma,I^u)\|\leqslant C_3\mathrm{e}^{k_2\tau}\quad(6.4.19)$$

这里 $$-\infty<\tau\leqslant0$$

$$k_2>0,\quad h_\varepsilon^u(-T_\varepsilon^u)=\boldsymbol{q}^{(u,\varepsilon)},\quad h(-T_0^u)=\boldsymbol{q}^{(u,0)}$$

我们知道

$$F_\varepsilon^\tau(\gamma,I^u)\to q_\varepsilon,\quad\tau\to-\infty\quad(6.4.20)$$

$$F_0^\tau(\gamma,I^u)=(\gamma-2[(I^u)^2-\omega^2]\tau,I^u)\quad(6.4.21)$$

由关系式(6.4.18)~式(6.4.21)可知当 $t\to-\infty$时

$$\|h_\varepsilon^u(t)-h(t)\|\approx O(t)\quad(6.4.22)$$

从式(6.4.17)、式(6.4.22)知

$$\lim_{t\to-\infty}\triangle^-(t)=0$$

其次,计算 $\lim\limits_{t\to+\infty}\triangle^+(t)$

$$\lim_{t\to+\infty}\triangle^+(t)=\lim_{t\to+\infty}\overline{\langle\nabla\tilde{F}_1(h(t)),h_\varepsilon^s(t)-h(t)\rangle}$$

由$\nabla\tilde{F}_1(h(t))$的明显表达式,可知存在 $T_2>0,C_4>0$ 使得

$$\|\nabla\tilde{F}_1(h(t))\|\leqslant C_4\mathrm{e}^{-k_1t},\quad\forall T_2\leqslant t<+\infty$$
$$(6.4.23)$$

其中 $k_1>0$ 于式(6.4.17)中给出。令 $b_0\equiv(\gamma_*,I^u)$表示未扰动纤维的基点,且$\boldsymbol{q}^{(s,0)}$在其上,由纤维定理 6.3.3 可知,存在 $C_5>0$,使

得

$$\| h(\tau + T_0^s) - F_0^\tau(b_0) \| \leqslant C_5 e^{-k_2\tau}, \quad \forall 0 \leqslant \tau < +\infty \tag{6.4.24}$$

其中 $k_2>0$ 于式(6.4.19),$h(T_0^s)=\boldsymbol{q}^{(s,0)}$。

设$\boldsymbol{q}_*^{(s,\varepsilon)}$表示 $h_\varepsilon^s(t)$和$\partial \mathscr{U}$的交点,$\boldsymbol{q}_*^{(s,\varepsilon)}$在基点为 $b_\varepsilon \in \mathscr{M}_\varepsilon \subset W_\varepsilon^c$ 的惟一扰动稳定纤维上,且

$$F_0^\tau(b_0) = (\gamma_* - 2[(I^u)^2 - \omega^2]\tau, I^u) \tag{6.4.25}$$

分两种情况讨论:① $F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon)\in W_\varepsilon^c, 0\leqslant\tau<+\infty$;② $F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon)$不含于 $W_\varepsilon^c, \forall 0\leqslant\tau<+\infty$。

第一种情况,$F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon)\in W_\varepsilon^c, \forall 0\leqslant\tau<+\infty$,则存在 $C_6>0$ 使得

$$\| h_\varepsilon^s(\tau + T_\varepsilon^s) - F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon) \| \leqslant C_6 e^{-k_2\tau}, \quad \forall 0 \leqslant \tau < +\infty \tag{6.4.26}$$

这里 k_2 由式(6.4.19)给出,$h_\varepsilon^s(T_\varepsilon^s)=\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}$。进一步存在 $T_3>0$, $C_7>0$,使得

$$\| F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon) \| \leqslant C_7 e^{k_1\tau/10}, \quad \forall T_3 \leqslant \tau < +\infty \tag{6.4.27}$$

这里 $k_1>0$。由式(6.4.24)~式(6.4.27)可知,当 $t\to+\infty$时

$$\| h_\varepsilon^s(t) - h(t) \| \approx O(e^{\frac{1}{5}k_1 t}) \tag{6.4.28}$$

由式(6.4.23)和式(6.4.28)可知

$$\lim_{t\to+\infty} \triangle^+(t) = 0$$

第二种情况,即 $F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon)\notin W_\varepsilon^c, \forall 0\leqslant\tau<+\infty$。从式(6.4.23)可知,对于 $T(\varepsilon)\sim O((2/k_1)\ln(1/\varepsilon))$有

$$\| \nabla \tilde{F}_1(h(t)) \| \leqslant \varepsilon^2 e^{-k_1(t-T(\varepsilon))}, \quad \forall T(\varepsilon) \leqslant t < +\infty \tag{6.4.29}$$

其次证明

$$F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon) \in W_\varepsilon^c, \quad \forall 0 \leqslant \tau \leqslant T(\varepsilon)$$

W_ε^c 在 $\mathscr{U}$中有表示

$$\tilde{F}_1 = -2 + \varepsilon f_1(\{\tilde{F}_j, \quad \theta_j\}, j = 0,2,3,\cdots,M)$$

$$\theta_1 = \varepsilon\varphi_1(\{\tilde{F}_j,\theta_j\}, \quad j = 0,2,3,\cdots,M)$$

其中,$\{\tilde{F}_j,\theta_j\}$为$\varepsilon=0$可积流式(6.1.2)的角变量,$\{\tilde{F}_j\}$已在6.1节中定义过,

$$\theta_j \in [0,2\pi], \quad j = 0,2,3,\cdots,M$$

$$R^- < \tilde{F}_0 < R^+$$

$$0 \leqslant (-1)^{j+1}[\tilde{F}_j(\boldsymbol{q}) - 2(-1)^j] < \delta_j, \quad j = 2,3,\cdots,M$$

这里 R^-, R^+ 和 $\delta_j(j=2,3,\cdots,M)$均为正常数。在扰动流式(6.1.3)下,有

$$\frac{d\tilde{F}_j(\boldsymbol{q})}{dt} = \varepsilon\hat{f}_j(\boldsymbol{q}), \quad j = 0,2,3,\cdots,M$$

则对任何 $0\leqslant\tau\leqslant T(\varepsilon), j=0,2,3,\cdots,M$

$$\tilde{F}_j(\boldsymbol{q}(\tau)) = \tilde{F}_j(\boldsymbol{q}(0)) + O\left(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

置$\boldsymbol{q}(0)=b_\varepsilon$,有

$$\tilde{F}_j(F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon)) = \tilde{F}_j(b_\varepsilon) + O\left(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

因此,$F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon)\in W_\varepsilon^c, 0\leqslant\tau\leqslant T(\varepsilon)$,于是存在常数 $C_8>0$,使得

$$\| F_\varepsilon^\tau(b_\varepsilon) \| \leqslant C_8, \quad \forall 0 \leqslant \tau \leqslant T(\varepsilon)$$

由式(6.4.26)、式(6.4.29)可得

$$\langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(T(\varepsilon))), h_\varepsilon^s(T(\varepsilon))} \rangle \approx O(\varepsilon^2)$$

且存在 $C_9>0$,使得

$$\| h(\tau) \| \leqslant C_9, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T(\varepsilon)$$

则有

$$\langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(T(\varepsilon)))}, h(T(\varepsilon))\rangle \approx O(\varepsilon^2)$$

$$\triangle^+(T(\varepsilon)) \approx O(\varepsilon^2)$$

此时可表示$\triangle^+(0)$为

$$\triangle^+(0) = \triangle^+(T(\varepsilon)) - \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{\triangle}(t)\mathrm{d}t$$

其中

$$\triangle^+(T(\varepsilon)) \approx O(\varepsilon^2)$$

由此得引理 6.4.4。

现证引理 6.4.5,我们要估计

$$\int_{-\infty}^{0} \langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_3\rangle \mathrm{d}t$$

$$\int_{-\infty}^{0} \langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_4\rangle \mathrm{d}t$$

$$\int_{0}^{+\infty(\text{或}T(\varepsilon))} \langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_1\rangle \mathrm{d}t$$

$$\int_{0}^{+\infty(\text{或}T(\varepsilon))} \langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_2\rangle \mathrm{d}t$$

R_3、R_4 具有坐标表示

$$R_3 \equiv \{R_3^{(1,n)}, R_3^{(2,n)}\}(n = 0,1,\cdots,N-1), \quad R_3^{(2,n)} = -\overline{R_3^{(1,n)}}$$

$$R_4 \equiv \{R_4^{(1,n)}, R_4^{(2,n)}\}(n = 0,1,\cdots,N-1), \quad R_4^{(2,n)} = -\overline{R_4^{(1,n)}}$$

$$R_3^{(1,n)} = -i\{(q_{n+1} + q_{n-1})|\delta q_n|^2 + (\delta q_{n+1} + \delta q_{n-1})[q_n\overline{\delta q_n} + \bar{q}_n\delta q_n + |\delta q_n|^2]\}$$

$$R_4^{(1,n)} = \varepsilon[-\alpha\delta q_n + \beta N^2(\delta q_{n+1} - 2\delta q_n + \delta q_{n-1})]$$

其中$\boldsymbol{q} = h(t)$,$\delta\boldsymbol{q} \equiv h_\varepsilon^u(t) - h(t)$。对 R_1 和 R_2 有类似的式子,令

$$T^u \equiv \max\{T_\varepsilon^u, T_0^u\}, \quad T^s \equiv \max\{T_\varepsilon^s, T_0^s\}$$

我们知道

$$\| h_\varepsilon^u(t) - h(t) \| \approx O(\varepsilon), \quad \forall t \in [-T^u, 0]$$

$$\| h_\varepsilon^s(t) - h(t) \| \approx O(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, T^s]$$

则有

$$\| R_3(t) \| \approx O(\varepsilon^2), \quad \forall t \in [-T^u, 0]$$

$$\| R_4(t) \| \approx O(\varepsilon^2), \quad \forall t \in [-T^u, 0]$$

$$\| R_1(t) \| \approx O(\varepsilon^2), \quad \forall t \in [0, T^s]$$

$$\| R_2(t) \| \approx O(\varepsilon^2), \quad \forall t \in [0, T^s]$$

且存在 $C_{10} > 0$ 使得

$$\| \nabla \tilde{F}_1(h(t), t) \| \leqslant C_{10}, \quad \forall t \in [-T^u, T^s]$$

因此

$$\int_{-T^u}^{0} \langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_3\rangle \mathrm{d}t \approx O(\varepsilon^2) \tag{6.4.30}$$

$$\int_{-T^u}^{0} \langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_4\rangle \mathrm{d}t \approx O(\varepsilon^2) \tag{6.4.31}$$

$$\int_{0}^{T^s} \langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_1\rangle \mathrm{d}t \approx O(\varepsilon^2) \tag{6.4.32}$$

$$\int_{0}^{T^s} \langle\overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_2\rangle \mathrm{d}t \approx O(\varepsilon^2) \tag{6.4.33}$$

我们知道

$$h(t) \in \mathscr{U}, \quad \forall t \in [T^s, +\infty), t \in (-\infty, -T^u)$$

$$h_\varepsilon^u(t) \in \mathscr{U}, \quad \forall t \in (-\infty, -T^u)$$

$$h_\varepsilon^s(t) \in \mathscr{U}, \quad \forall t \in [T^s, T(\varepsilon)], \text{或 } t \in [T^s, +\infty)$$

这里 $\mathscr{U}$ 为局部不变流形的存在区域。下面我们要证明存在 C_{11}, C_{12},使得

$$\| h_\varepsilon^u(t) - h(t) \| \leqslant C_{11} e^{-\frac{1}{10}k_1(t+T^u)} \cdot [\| h_\varepsilon^u(-T^u) - h(-T^u) \| + \varepsilon], \forall t \in (-\infty, -T^u), \varepsilon \in [0, \varepsilon_2] \tag{6.4.34}$$

$$\| h_\varepsilon^s(t) - h(t) \| \leqslant C_{12} e^{\frac{1}{10}k_1(t-T^s)} [\| h_\varepsilon^s(T^s) - h(T^s) \| + \varepsilon], \forall t \in (T^s, +\infty) \text{ 或 } t \in [T^s, T(\varepsilon)], \varepsilon \in [0, \varepsilon_2] \tag{6.4.35}$$

考虑扩大的方程组,定义在 E_c 上,具有形式

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{2}k_1 x + \delta f_1(x,y,z) \\ \dot{y} = \dfrac{1}{2}k_1 y + \delta f_2(x,y,z) \\ \dot{z} = Az + \delta f_3(x,y,z) \end{cases}$$

其中"x","y"分别表示 $\delta=0$ 方程组一维稳定和不稳定方向,"z"表示 $\delta=0$ 方程余维 2 的中心方向,A 使得 e^{At} 为单位矩阵,$\forall t \in (-\infty, +\infty)$。令 $\psi(x,y,z)$ 为 E_c 上的截断函数,即它为光滑函数,在 E_c 外为 0,而 E_c 内为 1,则 W_δ^{cs} 具有积分方程表示

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}k_1 t}x(0) + \delta\int_0^t e^{-\frac{1}{2}k_1(t-s)} f_1(x(s), y(s), z(s)) \cdot \psi(x(s), y(s), z(s))ds$$

$$z(t) = e^{At}z(0) + \delta\int_0^t e^{A(t-s)} f_3(x(s), y(s), z(s)) \cdot \psi(x(s), y(s), z(s))ds$$

$$y(t) = \delta\int_{+\infty}^t e^{\frac{1}{2}k_1(t-s)} f_2(x(s), y(s), z(s)) \cdot \psi(x(s), y(s), z(s))ds$$

令 $(x^1(t), y^1(t), z^1(t))$ 和 $(x^2(t), y^2(t), z^2(t))$ 为 W_δ^{cs} 中的两个解,令

$$u(t) \equiv x^1(t) - x^2(t), \quad v(t) \equiv y^1(t) - y^2(t), \quad w(t) \equiv z^1(t) - z^2(t)$$

则

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}k_1 t}u(0) + \delta\int_0^t e^{-\frac{1}{2}k_1(t-s)}[f_{11}u + f_{12}v + f_{13}w]ds$$

$$w(t) = e^{At}w(0) + \delta\int_0^t e^{A(t-s)}[f_{31}u + f_{32}v + f_{33}w]ds$$

$$v(t) = \delta\int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}k_1(t-s)}[f_{21}u + f_{22}v + f_{23}w]ds$$

其中

$$f_{ij} \equiv f_{ij}(x^1, y^1, z^1; x^2, y^2, z^2), \qquad i,j = 1,2,3$$

进一步,存在 $C_{13} > 0$,使得

$$\| f_{ij}(x^1, y^1, z^1; x^2, y^2, z^2) \| < C_{13}, \quad \forall (x^k, y^k, z^k) \in E_c, \quad k = 1,2$$

令

$$J(t) \equiv \| u(t) \| + \| v(t) \| + \| w(t) \|$$

则有

$$J(t) \leqslant e^{\frac{1}{10}k_1 t}J(0) + \delta C_{13}\left[\int_0^t e^{-\frac{1}{2}k_1(t-s)}J(s)ds + \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}J(s)ds + \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}k_1(t-s)}J(s)ds\right]$$

从这个不等式有

$$I \equiv \sup_{t\in[0,\infty)}\{e^{-\frac{1}{10}k_1 t}J(t)\} < \infty$$

进一步

$$J(t) \leqslant e^{\frac{1}{10}k_1 t}J(0) + \delta C_{13} I\Big[\int_0^t e^{-\frac{1}{2}k_1(t-s)} e^{\frac{1}{10}k_1 s}ds +$$

$$\int_0^t e^{\|A\|(t-s)} e^{\frac{1}{10}k_1 s}ds + \int_{+\infty}^t e^{\frac{1}{2}k_1(t-s)} e^{\frac{1}{10}k_1 s}ds\Big] \leqslant$$

$$e^{\frac{1}{10}k_1 t}J(0) + \delta C_{14} I e^{\frac{1}{10}k_1 t}$$

其中 C_{14}为常数。于是有

$$e^{-\frac{1}{10}k_1 t}J(t) \leqslant J(0) + \delta C_{14} I$$

左端取上确界得

$$I \leqslant J(0) + \delta C_{14} I$$

选取 δ 充分小,使得 $\delta C_{14} < 1$ 有

$$I \leqslant C_{15} J(0)$$

这里 C_{15}为常数,因此得到

$$J(t) \leqslant C_{15} J(0) e^{\frac{1}{10}k_1 t}$$

应用这个不等式于

$$h_\varepsilon^s(\tau + T^s) \text{ 和 } h(\tau + T^s)$$

可得不等式(6.4.35)。类似地可得到不等式(6.4.34),由不等式(6.4.34)、式(6.4.35)有

$$\| R_3(t) \| \leqslant \varepsilon^2 C_{16} e^{-\frac{1}{2}k_1(t+T^u)}, \quad \forall t \in (-\infty, -T^u] \tag{6.4.36}$$

$$\| R_4(t) \| \leqslant \varepsilon^2 C_{17} e^{-\frac{1}{2}k_1(t+T^u)}, \quad \forall t \in (-\infty, -T^u] \tag{6.4.37}$$

$$\| R_1(t) \| \leqslant \varepsilon^2 C_{18} e^{-\frac{1}{2}k_1(t-T^s)}, \quad \forall t \in [T^s, T(\varepsilon)] \text{ 或 } t \in [T^s, +\infty) \tag{6.4.38}$$

$$\| R_2(t) \| \leqslant \varepsilon^2 C_{19} e^{\frac{1}{2}k_1(t-T^s)}, \quad \forall t \in [T^s, T(\varepsilon)] \text{ 或 } t \in [T^s, +\infty) \tag{6.4.39}$$

其中 C_{16}、C_{17}、C_{18}、C_{19}为不依赖于 ε 的常数。

从不等式(6.4.36)~不等式(6.4.39)和不等式(6.4.17)、不等式(6.4.23)得

$$\int_{-\infty}^{-T^u} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_3 \rangle dt \approx O(\varepsilon^2) \tag{6.4.40}$$

$$\int_{-\infty}^{-T^u} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_4 \rangle dt \approx O(\varepsilon^2) \tag{6.4.41}$$

$$\int_{T^s}^{+\infty(\text{或}T(\varepsilon))} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_1 \rangle dt \approx O(\varepsilon^2) \tag{6.4.42}$$

$$\int_{T^s}^{+\infty(\text{或}T(\varepsilon))} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_2 \rangle dt \approx O(\varepsilon^2) \tag{6.4.43}$$

由估计式(6.4.30)~式(6.4.33)和式(6.4.40)~式(6.4.43)有

$$\int_{-\infty}^{0} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_3 \rangle dt \approx O(\varepsilon^2)$$

$$\int_{-\infty}^{0} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_4 \rangle dt \approx O(\varepsilon^2)$$

$$\int_{0}^{+\infty(\text{或}T(\varepsilon))} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_1 \rangle dt \approx O(\varepsilon^2)$$

$$\int_{0}^{+\infty(\text{或}T(\varepsilon))} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, R_2 \rangle dt \approx O(\varepsilon^2)$$

从不等式(6.4.29)有

$$\int_{T(\varepsilon)}^{+\infty} \langle \overline{\nabla \tilde{F}_1(h(t))}, \boldsymbol{g}(h(t)) \rangle dt \approx O(\varepsilon^2)$$

引理得证。

6.4.3 逼近

我们将用另一条未扰动轨道同宿于共振圆 S_ω 逼近未扰动轨道 h 同宿于 A 中的一个圆，由此得到 Melnikov 积分的近似

$$M_{\tilde{F}_1} = \hat{M}_{\tilde{F}_1} + O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

其中 $\hat{M}_{\tilde{F}_1} = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\delta\tilde{F}_1}{\delta q_n}g_{n,1}+\frac{\delta\tilde{F}_1}{\partial r_n}g_{n,2}\right)\Big|_{h_\omega}\right\}\mathrm{d}t$

我们知道，由上面的构造，h 依向后时间和 $\partial\mathscr{U}$ 相交于 $\boldsymbol{q}^{(u,0)}$，因此 $\boldsymbol{q}^{(u,0)}$ 是在以 $(\gamma,I^u)\in W^u(q_\varepsilon)|_{\mathrm{II}}$ 为基点的惟一未扰动不稳定纤维 $\mathscr{F}^{(u,0)}(\gamma,I^u)$ 上。从 $W^u(q_\varepsilon)|_{\mathrm{II}}$ 的表示式(6.4.3)可知，$I^u=\omega+\sqrt{q}J^u(\gamma)$。因此 $(\gamma,I=\omega)$ 是在 (γ,I^u) 的 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 邻域。进一步，不稳定纤维 $\mathscr{F}^{(u,0)}(\gamma,\omega)$ 也是一条轨线，表以 h_ω，它是同宿于共振圆 S_ω 的。它是向后时间的不稳定纤维，向前时间的稳定纤维。令 $\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)}\equiv\mathscr{F}^{(u,0)}(\gamma,\omega)\cap\partial\mathscr{U}$，由纤维定理 6.3.3 可知，$q_\omega^{(u,0)}$ 在 $\boldsymbol{q}^{(u,0)}$ 的 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 邻域内。由解算子 F_0^t 的正则性，在区域 $S/\mathscr{U}$(即在 S 中的 $\mathscr{U}$ 的补域)h_ω 在 h 的 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 邻域。设 $\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 为 h 和 $\partial\mathscr{U}$ 在向前时间的交点，$\boldsymbol{q}_\omega^{(s,0)}$ 为 h_ω 和 $\partial\mathscr{U}$ 向前时间的不变点，则 $\boldsymbol{q}_\omega^{(s,0)}$ 是在 $\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 的 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 邻域内。我们现在针对向后时间 $(t\to-\infty)$ 和向前时间 $(t\to\infty)$ 估计在 $\mathscr{U}$ 里 h_ω 和 h 的偏差，因为向后时间与向前时间的估计是平行的，我们以估计向后时间 $(t\to-\infty)$ 作为例子。由纤维定理 6.3.3，在不稳定纤维上的一点指数近似于向后流的基点。

令 $T^\varepsilon\equiv\frac{1}{k_u}\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则对一切 $t\in(-\infty,-T^\varepsilon]$

$$\|F_0^t(\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)})-F_0^t(\gamma,\omega)\|\leqslant\hat{C}_u\sqrt{\varepsilon}$$

其中 $\hat{C}_u=C_u\|\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)}-(\gamma,\omega)\|$；类似地

$$\|F_0^t(\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)})-F_0^t(\gamma,I^u)\|\leqslant\hat{C}'_u\sqrt{\varepsilon}$$

其中 $\hat{C}'_u=C_u\|\boldsymbol{q}^{(u,0)}-(\gamma,I^u)\|$，等价地，$\forall\varepsilon\in(-\infty,-T^\varepsilon]$ 有

$$F_0^t(\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)})=F_0^t(\gamma,\omega)+O(\sqrt{\varepsilon})$$

$$F_0^t(\boldsymbol{q}^{(u,0)})=F_0^t(\gamma,I^u)+O(\sqrt{\varepsilon})$$

已知 $\overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1}|_{F_0^t(\gamma,\omega)}$ 或 $F_0^t(\gamma,I^u)\equiv0$，$\forall t\in(-\infty,\infty)$。而且从 $\overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1}$ 的明显表达式有

$$\|\overline{\mathrm{grad}\tilde{F}_1}\|_{h\text{或}h_\omega}\leqslant C_1\mathrm{e}^{k_u t},\forall t\in(-\infty,-T^\varepsilon)$$

其中 C_1 与 ε 无关。因此

$$\int_{-\infty}^{-T^\varepsilon}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\delta\tilde{F}_1}{\delta q_n}g_{n,1}+\frac{\delta\tilde{F}_1}{\delta r_n}g_{n,2}\right)\Big|_{h\text{或}h_\omega}\right\}\mathrm{d}t\approx O(\sqrt{\varepsilon})$$

其次我们估计 $F_0^t(\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)})$ 和 $F_0^t(\boldsymbol{q}^{(u,0)})$ 的差，$t\in[-T^\varepsilon,0]$。从推论 6.1.2 和定理 6.3.4，我们有 $F_0^t(\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)})$ 和 $F_0^t(\boldsymbol{q}^{(u,0)})$ 的明显表达式

$$F_0^t(\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)})=q_0\left[\frac{G}{H_n}-1\right],\quad q=q_0$$

$$F_0^t(\boldsymbol{q}^{(u,0)})=q_1\left[\frac{G}{H_n}-1\right],\quad q=q_1$$

其中 $q_0=\omega\exp\{i(\gamma-2p_0)\}$，$q_1=I^u\exp\{-2i[(I^u)^2-\omega^2]t+i(\gamma-2p_1)\}$，$p_0$、$p_1$ 分别为推论 6.1.2 中给定对应于 $|q|=\omega$ 和 $|q|=I^u$ 的值。由以上明显表达式并注意到

$$2[(I^u)^2-\omega^2]T^\varepsilon\approx O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

对一切 $t\in[-T^\varepsilon,0]$，我们有

$$\|F_0^t(\boldsymbol{q}_\omega^{(u,0)})-F_0^t(\boldsymbol{q}^{(u,0)})\|\leqslant\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}$$

其中常数 $\tilde{C}$ 与 ε 无关。因此

$$\int_{-T^\varepsilon}^{0}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\delta\tilde F_1}{\delta q_n}g_{n,1}+\frac{\delta\tilde F_1}{\delta r_n}g_{n,2}\right)\bigg|_h\right\}\mathrm{d}t=$$

$$\int_{-T^\varepsilon}^{0}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\delta\tilde F_1}{\delta q_n}g_{n,1}+\frac{\delta\tilde F_1}{\delta r_n}g_{n,2}\right)\bigg|_{h_\omega}\right\}\mathrm{d}t+O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

最后,有

$$M_{\tilde F_1}=\hat M_{\tilde F_1}+O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right)\tag{6.4.44}$$

其中 $\hat M_{\tilde F_1}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\delta\tilde F_1}{\delta q_n}g_{n,1}+\frac{\delta\tilde F_1}{\delta r_n}g_{n,2}\right)\bigg|_{h_\omega}\right\}\mathrm{d}t$

6.4.4 $\hat M_{\tilde F_1}$的计算

令 $-\gamma_1=\gamma-2p$,其中

$$p=\arctan\frac{\sqrt{\rho\cos^2\theta-1}}{\sqrt{\rho}\sin\theta},\quad\theta=\frac{\pi}{N},\quad\rho=1+\frac{\omega^2}{N^2}$$

则 h_ω 具有推论 6.1.2 的表示

$$Q_n\equiv Q_n(t,r;N,\omega,\gamma_1,\pm)=\omega\mathrm{e}^{-i\gamma_1}\left[\frac{G}{H_n}-1\right]\tag{6.4.45}$$

其中

$$G=1+\cos2p-i\sin2p\tanh\tau$$

$$H_n=1\pm\frac{1}{\cos\theta}\sin p\,\mathrm{sech}\,\tau\cos2n\theta$$

$$\tau=4N^2\sqrt{\rho}\sin\theta\sqrt{\rho\cos^2\theta-1}\;t+r$$

在 $q_n\equiv\omega\mathrm{e}^{-i\gamma_1}$时,令 z_+ 为 Lax 对式(6.1.5)、式(6.1.6)的实重点,有

$$z_+=\sqrt{\rho}\cos\theta+\sqrt{\rho\cos^2\theta-1}$$

在 z_+上有两个线性无关的 Bloch 函数

$$\psi_n^+=(\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{i\theta})^n\mathrm{e}^{\Omega_+t}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{z_+}-\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{-i\gamma_1/2}\\-i(\omega/N)\mathrm{e}^{i\gamma_1/2}\end{pmatrix}$$

$$\psi_n^-=(\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{-i\theta})^n\mathrm{e}^{\Omega_-t}\begin{pmatrix}-i(\omega/N)\mathrm{e}^{-i\gamma_1/2}\\(z_+-\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{-i\theta})\mathrm{e}^{i\gamma_1/2}\end{pmatrix}$$

其中

$$\Omega_+=iN^2\left[\sqrt{\rho}\left(\frac{1}{z_+}-z_+\right)\mathrm{e}^{i\theta}+2\ln z_+\right]$$

$$\Omega_-=iN^2\left[\sqrt{\rho}\left(\frac{1}{z_+}-z_+\right)\mathrm{e}^{-i\theta}+2\ln z_+\right]$$

令 $\phi_n=c_+\psi_n^++c_-\psi_n^-$,则有

$$\frac{\delta\tilde F_1}{\delta q_n}\bigg|_{h_\omega}=C_{z_+}\frac{W_n}{\hat\triangle_nA_{n+1}}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{z_+^2}\right)\bar\phi_{n1}\cdot\phi_{(n+1),1}\\\left(\frac{1}{z_+^2}\right)\bar\phi_{n2}\cdot\phi_{(n+1),2}\end{pmatrix}$$

其中 C_{z_+} 为复常数,且

$$W_n=\psi_{n1}^+\psi_{n2}^--\psi_{n2}^+\psi_{n1}^-$$

$$\hat\triangle_n=|\phi_{n1}|^2+|z_+|^2|\phi_{n2}|^2$$

$$A_n=|\phi_{n2}|^2+|z_+|^2|\phi_{n1}|^2$$

令 $G_n=\frac{\delta\tilde F_1}{\delta q_n}\Big|_{h_\omega}$,分解 G_n 为

$$G_n=G_n^e+G_n^o$$

其中 G_n^e 为 G_n 的偶部分,即 $G_n^e=G_{N-n}^e$,G_n^o 为 G_n 的奇部分,而 $G_n^o=-G_{N-n}^o$。G_n^o 在 Melnikov 积分中没有贡献。相差一个实常

数,我们有

$$G_n^e = \frac{\operatorname{sech}\tau}{\Lambda_n}\{\cos\theta\operatorname{sech}\tau + (\sin p - i\cos p\tanh\tau)\cos 2n\theta\}$$

其中

$$\Lambda_n = 1 + 2(1/\cos\theta)\sin p\operatorname{sech}\tau\cos 2n\theta\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1/\cos^2\theta)\sin^2 p\operatorname{sech}^2\tau(\cos 4n\theta + \cos 4\theta)$$

最后,我们得到 Melnikov 函数的明显表达式。

命题 6.4.6

$$\hat{M}_{\tilde{F}_1} = \Gamma(M_\Gamma - \chi_\alpha M_\alpha + \chi_\beta M_\beta) \tag{6.4.46}$$

其中

$$\chi_\alpha = \alpha/\Gamma,\quad \chi_\beta = \beta/\Gamma,\quad M_\Gamma = \cos\gamma_1\hat{M}_\Gamma$$

$$\hat{M}_\Gamma \equiv \hat{M}_\Gamma(\omega, N) = \int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}\tau\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\Lambda_n}\cdot\{\cos\theta\operatorname{sech}\tau + \sin p\cos 2n\theta\}\mathrm{d}\tau$$

$$M_\alpha \equiv M_\alpha(\omega, N) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\operatorname{Re}\{G_n^e Q_n\}\mathrm{d}\tau$$

$$M_\beta \equiv M_\beta(\omega, N) = N^2\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\operatorname{Re}\cdot\{G_n^e(Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1})\}\mathrm{d}\tau$$

Q_n 为式(6.4.45)所定义。

6.4.5 $W^u(q_\varepsilon)$和 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)\subset W_\varepsilon^{cs}$ 相交

$$d_1 = \text{Signed Distance}\{q_h^{(u,\varepsilon)}, q_*^s\} = \varepsilon\left\{\hat{M}_{\tilde{F}_1} + O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\} \tag{6.4.47}$$

其中 $\hat{M}_{\tilde{F}_1}$为式(6.4.46)所定义。进一步

$$d_1 = F(\varepsilon;\omega,\alpha,\beta,\Gamma;\gamma_1)$$

其中 ε 为小参数, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$, ε_2 为定理 6.2.3 中给定的正数, $\{\omega,\alpha,\beta,\Gamma\}$为定义在 Σ_N 中的外参数,

$$\Sigma_N = \left\{(\omega,\alpha,\beta,\Gamma) \mid \omega\in\left(N\tan\frac{\pi}{N}, N\tan\frac{2\pi}{N}\right), \Gamma\in(0,1)\right.$$
$$\left.\alpha\in(0,\alpha_0), \beta\in(0,\beta_0), \alpha_0,\beta_0\text{ 为固定正数}\right\}$$

γ_1 为内参数,从表达式(6.4.46)可知, $\hat{M}_{\tilde{F}_1}$依赖于$(\omega,\alpha,\beta,\Gamma)$和 γ_1。置 $\hat{M}_{\tilde{F}_1}=0$,有

$$\cos\gamma_1\hat{M}_\Gamma(\omega,N) - \chi_\alpha M_\alpha(\omega,N) + \chi_\beta M_\beta(\omega,N) = 0 \tag{6.4.48}$$

由式(6.4.48)可得如下引理。

引理 6.4.7 设 $N\tan\frac{\pi}{N} < \omega < N\tan\frac{2\pi}{N}$,在 R^2 的第一象限存在一个区域 D_ω,使得对任何$(\chi_\alpha,\chi_\beta)\in D_\omega$,则存在 γ_1 的两个值: $\gamma_1^\pm = \gamma_1^\pm(\omega,\chi_\alpha,\chi_\beta) = \pm\arccos\{(\chi_\alpha M_\alpha - \chi_\beta M_\beta)/\hat{M}_\Gamma\}$, $\hat{M}_{\tilde{F}_1}|_{\gamma_1^\pm} = 0$。$\hat{M}_{\tilde{F}_1}$看做 γ_1 的函数,它的零点是简单的。

由引理 6.4.7 和隐函数定理可得

定理 6.4.8 ($W^u(q_\varepsilon)$和 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon\subset W_\varepsilon^{cs})$相交) 存在 Σ_N 的子区域 Σ_N^s 和正数 ε_4,使得对任何固定的参数$\{\omega,\alpha,\beta,\Gamma;\varepsilon\}\in\Sigma_N^s\times(0,\varepsilon_4)$,存在 $\gamma_1=\gamma_1^{[\pm,\varepsilon]}$ 的两个值,它以 $O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$逼近于 $\gamma_1^\pm$,在其上 $W^u(q_\varepsilon)$和 $W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)\subset W_\varepsilon^{cs}$ 横截相交。更进一步,这种相交是一般的,即两个的相交集为一维曲线,这两条曲线 $h_\varepsilon^{(u,\pm)}$ 能如下被确定:从 $\gamma^{(\pm,\varepsilon)}$能找到 $\gamma^{(\pm,\varepsilon)} = -\gamma_1^{(\pm,\varepsilon)} + 2p$,则 $\gamma=\gamma^{(\pm,\varepsilon)}$被确认为在 $W^u(q_\varepsilon)$中扰动不稳定纤维的起飞基点,在此纤维上有两点 $h_\varepsilon^{(u,\pm)}\cap\partial\mathscr{U}$存在。

6.5 q_ε 同宿轨道的存在性:第二测量

前面我们已证明 $W^u(q_\varepsilon)$ 和 $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)\subset W^{cs}_\varepsilon$ 真正相交,因此外参数在某个固定区域内,存在轨线向后趋于 q_ε,向前趋于 $\mathcal{M}_\varepsilon$,表示其中的一条为 h_ε。这一节,我们将证明在外参数空间的余维 1 子流形上,这些轨线事实上是点 q_ε 的同宿轨道,即向前它们也趋于 q_ε,如图 6.5.1 所示。

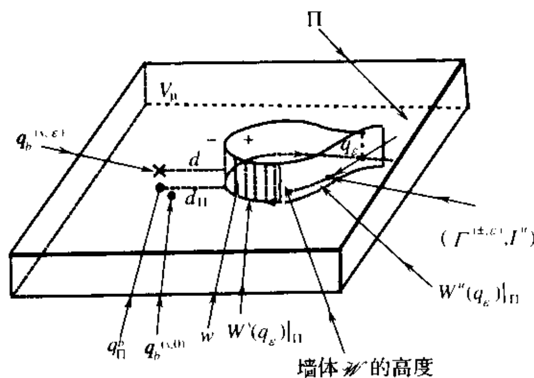


图 6.5.1 第二测度的几何解释

定义 6.5.1 定义如下限制

$$W^s(q_\varepsilon)|_\Pi \equiv \Pi\cap W^s(q_\varepsilon)$$

$$W^s(q_\varepsilon)|_{\mathcal{M}_\varepsilon} \equiv \mathcal{M}_\varepsilon\cap W^s(q_\varepsilon)$$

$$W^u(q_\varepsilon)|_{\mathcal{M}_\varepsilon} \equiv \mathcal{M}_\varepsilon\cap W^u(q_\varepsilon)$$

从前面的讨论可得

引理 6.5.2 $W^u(q_\varepsilon)|_{\mathcal{M}_\varepsilon}=W^u(q_\varepsilon)|_\Pi$,它是一维的,$W^s(q_\varepsilon)|_\Pi$ 也是一维的,$W^s(q_\varepsilon)|_{\mathcal{M}_\varepsilon}$ 在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 中具有余维 1。

令 $\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}\equiv\partial\mathscr{U}\cap h_\varepsilon$(称为着陆点)表示轨线 h_ε 和 $\partial\mathscr{U}$ 的交点,注意到 $\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}\in\partial\mathscr{U}_\varepsilon\equiv\partial\mathscr{U}\cap W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$,则 $\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}$ 是在以 $\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)}\in\mathcal{M}_\varepsilon$ 为基点的 $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$ 中惟一稳定纤维上。由纤维定理 6.3.3,$\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}$ 和 $\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)}$ 依向前时间具有相同的行态。因此,当 $t\to+\infty$,h_ε 是否趋于 q_ε 的问题归结为 $\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)}$ 是否 $\in W^s(q_\varepsilon)$? 前面已知,$\boldsymbol{q}^{(s,\varepsilon)}$ 是在 $\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 的 $O(\varepsilon)$ 邻域,而 $\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 是未扰动轨道 h 和 $\partial\mathscr{U}$ 的交点(依向前时间),且 $\boldsymbol{q}^{(s,0)}$ 是在以 $\boldsymbol{q}_b^{(s,0)}$ 为基点的未扰动纤维上,它必然位于不变平面 Π 上,由纤维定理 6.3.3,$\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)}$ 是以 $O(\varepsilon)$ 逼近于不变平面 Π,即有

$$距离\{\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)},\boldsymbol{q}_b^{(s,0)}\}=O(\varepsilon),\quad 距离\{\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)},\Pi\}=O(\varepsilon) \tag{6.5.1}$$

在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 中定义 $\Pi\cap M_\varepsilon$ 的邻域 V_μ 如下

$$V_\mu\equiv\{\boldsymbol{q}\mid\boldsymbol{q}\in\mathcal{M}_\varepsilon,\text{Distance}\{\boldsymbol{q},\Pi\}\leqslant\varepsilon^\mu,0<1-\mu\ll1\} \tag{6.5.2}$$

则由式(6.5.1)有引理:

引理 6.5.3 着陆基点(landing base point)$\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)}\in V_\mu$。

从引理 6.5.2 $W^s(q_\varepsilon)|_{\mathcal{M}_\varepsilon}$ 在 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 中具有余维 1。这里,对如下墙的高度作一些假设

$$\mathscr{W}\equiv(W^s(q_\varepsilon)|_{\mathcal{M}_\varepsilon})\cap V_\mu$$

假设Ⅰ:墙 $\mathscr{W}$ 的高度如图 6.5.1 所示充分大,使得 $\mathscr{W}$ 分 V_μ 为两个不相连的区域。且 $\mathscr{W}$ 和 Π 横截相交,$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$。

其次,我们考虑在 $\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)}$ 和 $\mathscr{W}$ 之间的符号矩离,令 $q_\Pi^b\in\mathcal{M}_\varepsilon\cap\Pi$ 为 Π 上的一点,从式(6.5.1)有

$$\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)}=q_\Pi^b+\varepsilon g \tag{6.5.3}$$

其中 g 是有界的。由假设Ⅰ,能特征化 $\mathscr{W}$ 如下:对任何 $\boldsymbol{q}\in\mathscr{W}$,存在 $q_\Pi\in W^s(q_\varepsilon)|_\Pi$,使得

$$\boldsymbol{q}=q_\Pi+\varepsilon^\mu f \tag{6.5.4}$$

其中 f 为有界的。因此

$$\mathscr{W}=\{\boldsymbol{q}=q_\Pi+\varepsilon^\mu f\mid q_\Pi\in W^s(q_\varepsilon)|_\Pi,f\ 为有界的\}$$

如图 6.5.1 所示。令 d_{Π} 为 q_{Π}^{b} 和 $W^{s}(q_{\varepsilon})|_{\Pi}$ 之间的符号矩离，d_2 为 $\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)}$ 和 $\mathscr{W}$ 在 V_{μ} 中之符号距离，我们有

$$|d_2| = \inf_{q_{\Pi}\in W^{s}(q_{\varepsilon})|_{\Pi}, f\in S(q_{\Pi})} \{\|\boldsymbol{q}_b^{(s,\varepsilon)} - (q_{\Pi} + \varepsilon^{\mu} f)\|\} =$$

$$\inf_{q_{\Pi}\in W^{s}(q_{\varepsilon})|_{\Pi}, f\in S(q_{\Pi})} \{\| q_{\Pi}^{b} - q_{\Pi} + (\varepsilon g - \varepsilon^{\mu} f)\|\} \quad (6.5.5)$$

$$|d_{\Pi}| = \inf_{q_{\Pi}\in W^{s}(q_{\varepsilon})|_{\Pi}} \{\| q_{\Pi}^{b} - q_{\Pi}\|\} =$$

$$\min_{q_{\Pi}\in W^{s}(q_{\varepsilon})|_{\Pi}} \{| q_{\Pi}^{b} - q_{\Pi}|\} \quad (6.5.6)$$

由式(6.5.3)、式(6.5.4)有

$$d_2 = d_{\Pi} + O(\varepsilon^{\mu}) \quad (6.5.7)$$

令 $\hat{d}_{\Pi}$ 表示 d_{Π}^{b} 和 $W^{s}(\boldsymbol{q}_{\varepsilon})|_{\Pi}$ 未破裂鱼边界的符号距离，则有

$$d_{\Pi} = \hat{d}_{\Pi} + O(\varepsilon) \quad (6.5.8)$$

如图 6.5.2 所示。在图 6.5.3 中 γ_s 和 γ_n 作为 χ_a 和 ω 的函数。对于适当的 χ_a 和 ω，$\gamma_s - \gamma_n > 4p$，如图 6.5.4 所示。因此，在原来坐标 (γ, I) 中，符号距离 $d_{\Pi} = \text{Distance}\{d_{\Pi}^{b}, W^{s}(q_{\varepsilon})\}$ 和符号距离 $\hat{d}_{\Pi} = \text{Distance}\{d_{\Pi}^{b}, W^{s}(\tilde{q}_{\varepsilon})|_{\Pi}\}$ 为 $O(\sqrt{\varepsilon})$，我们有

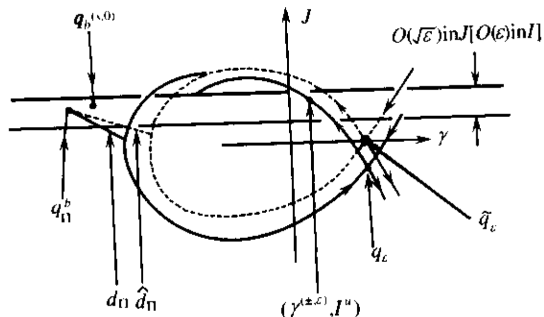


图 6.5.2 简化的几何图

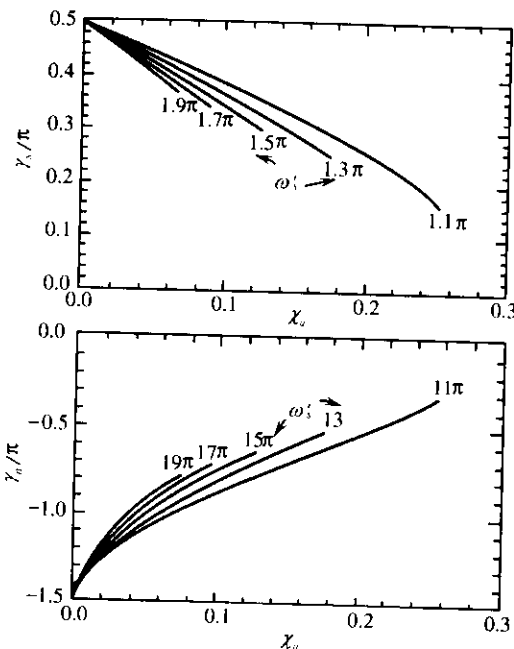


图 6.5.3 函数 $\alpha_s = \alpha_s(\chi_a, \omega)$ 和 $\alpha_n = \alpha_n(\chi_a, \omega)$

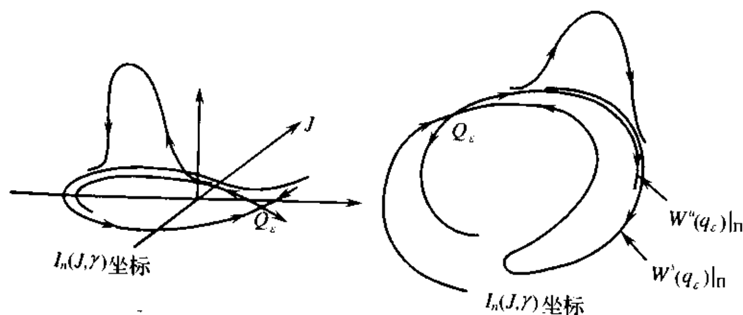


图 6.5.4 在“鱼”结构中异宿轨道的相移

定理 6.5.4

$$d_2 = \hat{d}_{\Pi} + O(\varepsilon^{\mu}) \quad (6.5.9)$$

其中 $\hat{d}_{\rm II}$ = 符号距离 $\{q_{\rm II}^b, W^s(\tilde{q}_\varepsilon)|_{\rm II}\}$ 在 $(-C\sqrt{\varepsilon}, C\sqrt{\varepsilon})$ 中取值 $\hat{d}_{\rm II}=0$的根近似为方程

$$4\alpha\omega p - 2\Gamma\sin 2p\cos\gamma_1 = 0$$

的根。

证明:从式(6.5.7)、式(6.5.8)有关系式(6.5.9),注意到 $\hat{d}_{\rm II}=0$,当且仅当

$$\triangle\mathscr{H}_1 \equiv \mathscr{H}_1(q_{\rm II}^b) - \mathscr{H}_1(\tilde{q}_\varepsilon) = 0$$

其中 $\tilde{q}_\varepsilon \equiv (J, \gamma_s) \equiv (0, \arccos|\chi_\alpha\omega|)$,$\mathscr{H}_1 = \alpha\gamma\omega - \Gamma\sin\alpha - 2\omega J^2$。我们有

$$\mathscr{H}_1(\tilde{q}_\varepsilon) = \mathscr{H}_1(\gamma^{(\pm,\varepsilon)}, \Gamma^\mu) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

$$\mathscr{H}_1(q_{\rm II}^b) = \mathscr{H}_1(\boldsymbol{q}_b^{(s,0)}) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

其中$\boldsymbol{q}_b^{(s,0)} \equiv (-\gamma_1 - 2p + O(\sqrt{\varepsilon}), \Gamma^\mu)$,$\gamma^{(\pm,\varepsilon)} = -\gamma_1 + 2p$(见推论6.1.2和定理6.4.8),因此有

$$\triangle\mathscr{H}_1 = 4\alpha\omega p - 2\Gamma\sin 2p\cos\gamma_1 + O(\sqrt{\varepsilon})$$

如图6.5.5所示,定理证毕。

现组合Melnikov测量和第二测量后得到两个距离方程 $d_1=0$, $d_2=0$ 的近似根

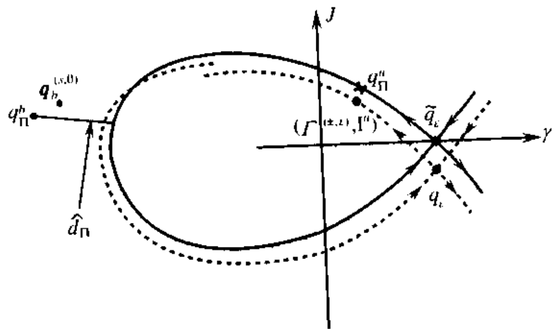


图6.5.5 近似几何图形

$$\begin{cases} \cos\gamma_1\hat{M}_\Gamma(\omega,N) - \chi_\alpha M_\alpha(\omega,N) + \\ \quad \chi_\beta M_\beta(\omega,N) = 0 \\ 4\alpha\omega p - 2\Gamma\sin 2p\cos\gamma_1 = 0 \end{cases} \tag{6.5.10}$$

其中 $\hat{M}_\Gamma(\omega,N)$、$M_\alpha(\omega,N)$、$M_\beta(\omega,N)$为命题6.4.6所定义。解式(6.5.10)可得 χ_α、χ_β 和 ω 的关系

$$\chi_\beta = \kappa(\omega,N)\chi_\alpha$$

$$\kappa(\omega,N) = \frac{1}{M_\beta(\omega,N)}\left\{M_\alpha(\omega,N) - \omega\hat{M}_\Gamma(\omega,N)\frac{2p}{\sin 2p}\right\} \tag{6.5.11}$$

由隐函数定理,有如下定理。

定理6.5.5 对任何 $N(7\leqslant N<\infty)$存在正数 ε_0,使得对 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$存在余维1的子流形 $E_\varepsilon\subset\Sigma_N$,$E_\varepsilon$ 为超平面$\beta=\kappa\alpha$ 的 $O(\varepsilon^\nu)$ 的扰动,其中 $\kappa=\kappa(\omega;N)$如图6.5.6所示,$\nu=\frac{1}{2}-\delta_0$,$0<\delta_0\ll\frac{1}{2}$。对于任何外参数$(\omega,\alpha,\beta,\Gamma)\in E_\varepsilon$ 存在一条渐近于不动点 q_ε 的同宿轨道。

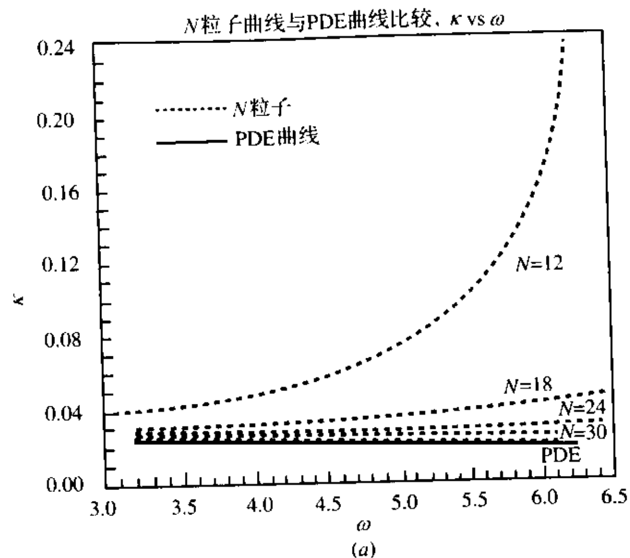
附注:两个测量 $d_1=0$,$d_2=0$是可以同时被满足。首先,选取"起飞"位相 $\gamma=-\gamma_1+2p$,其中 γ_1 满足

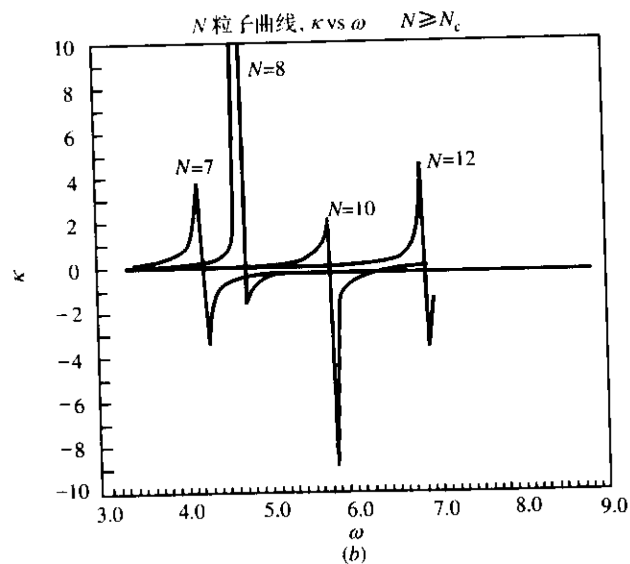
$$\cos\gamma_1 = \frac{1}{\hat{M}_\Gamma(\omega,N)}[\chi_\alpha M_\alpha(\omega,N) - \chi_\beta M_\beta(\omega,N)]$$

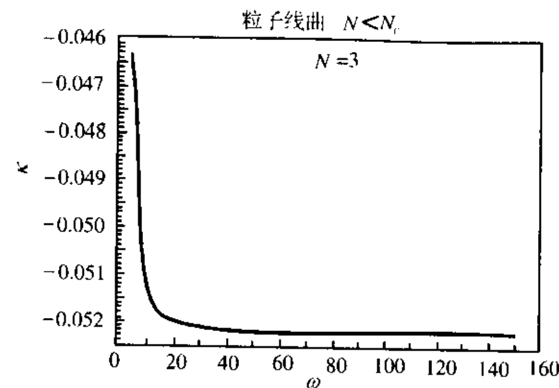
近似,则 χ_α,χ_β 为如下线性关系所定义。

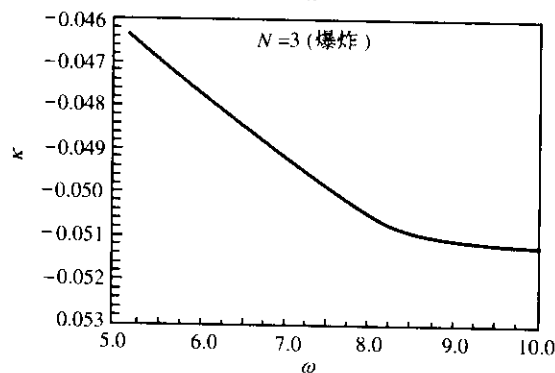
$$\chi_\beta = \kappa(\omega,N)\chi_\alpha,\ \kappa(\omega,N) = \frac{1}{M_\beta(\omega,N)}\left\{M_\alpha(\omega,N) - \omega\hat{M}_\Gamma(\omega,N)\frac{2p}{\sin 2p}\right\}$$

对于 $N \geqslant 7$，κ 是正的，如图 6.5.6 所示。









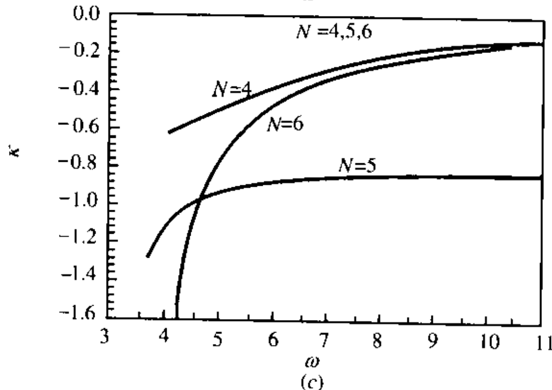


图 6.5.6 $\kappa=\kappa(\omega,N)$对于不同 N 值的曲线
(a) N 粒子曲线与 PDE 曲线比较；
(b) N 粒子曲线；(c) 粒子曲线。

6.6 符号动力学的一般理论

为了研究方程组(6.1.3)的混沌状态,我们建立常微分方程组$(2m+n)$维的有关混沌理论。

6.6.1 总的框架

设有$(2m+n)$维方程组

$$
\begin{cases}
\dot{x}_j = \varepsilon_j\alpha_j x_j - \beta_j y_j + x_j(x,y,z), \\
\dot{y}_j = \beta_j x_j + s\alpha_j y_j + y_j(x,y,z), \quad j = 1,\cdots,m; k = 1,\cdots,n \\
\dot{z}_k = \delta_k\gamma_k z_k + z_k(x,y,z),
\end{cases}
\tag{6.6.1}
$$

其中

$$
\varepsilon_j = \begin{cases} -1, & 1 \leqslant j \leqslant m_1 \\ 1, & m_{-1} < j \leqslant m \end{cases}
$$

$$
\delta_k = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n_1 \\ -1, & n_1 < k \leqslant n \end{cases}
$$

$$x \equiv (x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$$

$$y \equiv (y_1,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$$

$$z \equiv (z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$$

$$x_j(0,0,0) = y_j(0,0,0) = 0$$

$$\mathrm{grad}x_j(0,0,0) = \mathrm{grad}y_j(0,0,0) = 0, \quad j = 1,\cdots,m$$

$$z_k(0,0,0) = \mathrm{grad}z_k(0,0,0) = 0, \quad k = 1,\cdots,n$$

设$x_j(x,y,z)$,$y_j(x,y,z)$和$z_k(x,y,z)$在(0,0,0)邻域属于C^∞,α_j,β_j和γ_k为正常数,因此,(0,0,0)为鞍点。我们假设方程组

(6.6.1)具有如下性质:假设

(1) $\alpha_1 < \alpha_j, \forall 2 \leqslant j \leqslant m_1; \alpha_1 < \gamma_k, \forall n_1 < k \leqslant n$;

(2) $\gamma_1 < \gamma_k, \forall 1 \leqslant k \leqslant n_1; \gamma_1 < \alpha_j, \forall m_1 < j \leqslant m$;

(3) $\alpha_1 < \gamma_1$。

性质(2)说明α_1为最小的吸引率,γ_1为最小的排斥率,且α_1小于γ_1。设解算子F_0^t

$$F_0^t:(x(0),y(0),z(0)) \longrightarrow (x(t),y(t),z(t))$$

对t属于C^1,对固定的t为C^2微分同胚。

我们定义两个 Poincaré 截面Σ_0和Σ_1在(0,0,0)小邻域。Poincaré 映照

$$P: U \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_0$$

可分为两个映照组成:

$$P = P_1^0 \circ P_0^1$$

其中

$$P_0^1: U_0 \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$$

$$P_1^0: U_1 \subset \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_0$$

这里P_0^1为(0,0,0)邻域中的流,P_1^0为(0,0,0)邻域外的整体流。我们定义Σ_0,Σ_1位于同宿轨道线h的管状邻域内,从Σ_1上的点开始的轨线正向到达Σ_0的"时间"是有限的,因此我们可用线性变换近似P_1^0,从Σ_0上开始飞行的轨线到达Σ_1的"飞行时间"是无限的,P_0^1为局部流所引进。我们在映照P下在Σ_0上构造 Smale 马蹄,限制于Σ_0上的某 Cantor 子集上,P的动力学是拓扑共轭于符号的位移自同构。

高维构造 Smale 马蹄是具许多困难的,主要困难有:

(1) 在鞍点(0,0,0)处,方程组(6.6.1)存在许多不同的吸引率和排斥率,使线性化方程组在(0,0,0)邻域不能近似整个非线性动力系统,例如,方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y \\ \dot{z} = -z + xy \end{cases}$$

在(0,0,0)邻域的解为

$$\begin{cases} x(t) = x(t_1)e^{(t-t_1)} \\ y(t) = y(0)e^{-\frac{1}{2}t} \\ z(t) = z(0)e^{-t} + \frac{2}{3}x(t_1)y(0)e^{-\frac{1}{2}t}[e^{(t-t_1)}(1-e^{-\frac{3}{2}t})] \end{cases}$$

令 $x(t_1) = y(0) = z(0) = \eta$，则 $z(t_1) = \eta e^{-t_1} + \frac{2}{3}\eta^2 e^{-\frac{1}{2}t_1}[1-e^{-\frac{3}{2}t_1}]$。

当 $t \to +\infty$ 时

$$z(t_1) \approx e^{-\frac{1}{2}t_1}$$

因此，对长时间，线性系统被非线性效应控制。

(2) 作为近似 P_1^0 的仿射变换，具有非奇大矩阵表示，它很难在 Σ_1 上跟踪。

(3) 在高维情况下，Cenley-Moser 条件很难验证。第一个困难能通过光滑规范变换来克服[139]，第二个能通过 P 的不动点及其局部结构来克服，第三个困难靠不动点 P 附近的局部几何结构来克服。

6.6.2 光滑规范变换

考虑方程组(6.6.1)的线性部分，令

$$a_j(j = 1,\cdots,2m+n)$$

为特征值，有

$$a_j = \begin{cases} \delta_j\gamma_j, & j = 1,\cdots,n \\ \epsilon_k\alpha_k + i\beta_k, & j = 2k-1+n, k = 1,\cdots,m \\ \epsilon_k\alpha_k - i\beta_k, & j = 2k+n, k = 1,\cdots,m \end{cases}$$

这里 $i = \sqrt{-1}$，于是

$$\epsilon_k = \begin{cases} -1, & 1 \leqslant k \leqslant m_1 \\ 1, & m_1 < k \leqslant m \end{cases}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant j \leqslant n_1 \\ -1, & n_1 < j \leqslant n \end{cases}$$

设如下非共振条件满足：

(G1)
$$a_j \neq \sum_{k=1}^{2m+n} l_k a_k \mod[i2\pi] \tag{6.6.2}$$

对于 $j = 1,\cdots,2m+n$；非负整数 $l_1,\cdots,l_{2m+n}$ 的所有集合满足

$$2 \leqslant \sum_{k=1}^{2m+n} l_k < \infty$$

则存在 C^2 微分同胚

$$R:(x,y,z) \longrightarrow (x',y',z')$$

它在(0,0,0)邻域的外面为恒等变换。进一步

$$R(0,0,0) = (0,0,0)$$

$$\text{grad}R(0,0,0) = \text{恒等矩阵}$$

更重要的，在 $(x',y',z') = (0,0,0)$ 的小邻域 Ω 内，方程组(6.6.1)归结为线性方程组

$$\begin{cases} \dot{x}'_j = \epsilon_j\alpha_j x'_j - \beta_j y'_j, \\ \dot{y}'_j = \beta_j x'_j + \epsilon_j\alpha_j y'_j, \quad j = 1,\cdots,m; \quad k = 1,\cdots,n \\ \dot{z}'_k = \delta_k\gamma_k z'_k \end{cases} \tag{6.6.3}$$

令 L^t 表示方程组(6.6.3)的解算子，式(6.6.1)的解算子表示为 F_0^t，令

$$F^t \equiv RF_0^t R^{-1}$$

则 F^t 是方程组(6.6.1)在 R 变换下的解算子。进一步在 Ω 中

$F^t = L^t$,变换方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}' = \varepsilon\rho_j x'_j - \beta_j y'_j + x'_j(x,y,z) \\ \dot{y}'_j = \beta_j x'_j + \varepsilon\rho_j y'_j + y'_j(x,y,z) \\ \dot{z}'_k = \delta_k\gamma_k z'_k + z'_k(x,y,z) \end{cases} \tag{6.6.4}$$

其中 x'_j, y'_j, z'_k 在 Ω 内消失。因 F_0^t 对固定的 t 为 C^2 微分同胚,对 F^t 也然,因 R 与 t 无关,F_0^t 对 t 属于 C^1,因此 F^t 也然。从现在开始,我们去掉"′"的记号。

附注:在式(6.6.1)中要求 x_j, y_j 和 $z_k \in C^\infty$,能降低为 $\in C^N$,

$$N = N(2m+n; |a_j|, j = 1,\cdots,2m+n)$$

6.6.3 某些定义

这里我们要定义二个 Poincaré 截面 Σ_0 和 Σ_1 和两个 Poincaré 映照 P_0^1、P_1^0。已知

$$h \subset W^s \cap W^u$$

W^s 和 W^u 分别表示原点(0,0,0)的稳定与不稳定流形。且把 $\Omega \cap W^s$ 和 $\Omega \cap W^u$ 的包含原点的子流形记为 W_{loc}^s 和 W_{loc}^u。

我们知道,W_{loc}^s 和 W_{loc}^u 分别相连于稳定和不稳定子空间。特别,它们有如下表示:

$$W_{\text{loc}}^s \equiv \{(x,y,z) \mid x_j = 0, y_j = 0, m_1 < j \leqslant m; z_k = 0, 1 \leqslant k \leqslant n_1\}$$

$$W_{\text{loc}}^u \equiv \{(x,y,z) \mid x_j = 0, y_j = 0, 1 \leqslant j \leqslant m_1; z_k = 0, n_1 < k \leqslant n\}$$

记 $h \cap W_{\text{loc}}^s \equiv h^+$ 为向前时间的线段,$h \cap W_{\text{loc}}^u \equiv h^-$ 为向后时间线段,由方程组(6.6.1)的假设(2),α_1 为最少吸引率,γ_1 为最少排斥率,因此一般来说

(G2) h^+ 正切于(x_1, y_1)平面在(0,0,0)上,h^- 正切于正 z_1 轴在(0,0,0)上。

特别,h^+ 和 h^- 能分别表示如下:

$$\begin{cases} x_j^+(t) = e^{-\alpha_j t}(x_j^+(0)\cos\beta_j t - y_j^+(0)\sin\beta_j t) \\ y_j^+(t) = e^{-\alpha_j t}(x_j^+(0)\sin\beta_j t + y_j^+(0)\cos\beta_j t), \quad 1 \leqslant j \leqslant m_1 \\ z_k^+(t) = e^{-\gamma_k t}z_k^+(0), \quad (n_1 < k \leqslant n) \end{cases} \tag{6.6.5}$$

$$\begin{cases} x_j^-(t) = e^{\alpha_j t}(x_j^-(0)\cos\beta_j t - y_j^-(0)\sin\beta_j t) \\ y_j^-(t) = e^{\alpha_j t}(x_j^-(0)\sin\beta_j t + y_j^-(0)\cos\beta_j t), \quad m_1 \leqslant j \leqslant m \\ z_k^-(t) = e^{\gamma_k t}z_k^-(0), \quad (1 < k \leqslant n_1) \end{cases} \tag{6.6.6}$$

其中$(x_j^+(0), y_j^+(0), z_k^+(0))$和$(x_j^-(0), y_j^-(0), z_k^-(0))$分别表示 $h^+ \subset W_{\text{loc}}^s$ 和 $h^- \in W_{\text{loc}}^u$ 的任意点。"Genericity"对应于

$$(x_1^+(0))^2 + (y_1^+(0))^2 \neq 0 \tag{6.6.7}$$

$$z_1^-(0) \neq 0 \quad . \tag{6.6.8}$$

令 η 为小参数,η_1 为另一个小参数,使得

$$\eta\exp\{-2\pi\alpha_1/\beta_1\} < \eta_1 < \eta$$

这个约束对于保证 P_0^1 是一一对应的是必要的。

定义 6.6.1 Poincaré 截面 Σ_0 定义为约束

$$y_1 = 0, \quad \eta_1 < x_1 < \eta$$

$$0 < z_1 < \eta$$

$$x_j^2 + y_j^2 < \eta^2, \quad j = 2,3,\cdots,m$$

$$|z_k| < \eta, \quad k = 2,3,\cdots,n$$

定义 6.6.2 Poincaré 截面 Σ_1 定义为约束

$$z_1 = \eta$$

$$|z_k| < \eta, \quad k = 2,3,\cdots,n$$

$$x_j^2 + y_j^2 < \eta^2, \quad j = 1,2,\cdots,m$$

定义 6.6.3 从 Σ_0 到 Σ_1 的 Poincaré 映照 P_0^1 定义为

$$P_0^1: U_0 \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$$

$$\forall q \in U_0, \quad P_0^1(q) = F^{t_*}(q) \in \Sigma_1$$

这里 $t_* = t_*(q) > 0$ 为使得 $F^{t_*}(q) \in \Sigma_1$ 的最小时间。

定义 6.6.4 Poincaré 映照 P_1^0 从 Σ_1 到 $\bar{\Sigma}_0(\equiv \Sigma_0 \cup \partial\Sigma_0)$,定义为

$$P_1^0: U_1 \subset \Sigma_1 \longrightarrow \bar{\Sigma}_0$$

$$\forall q \in U_1, \quad P_1^0(q) = F^{T(q)}(q) \in \bar{\Sigma}_0$$

其中 $T(q) > 0$ 为使得 $F^{T(q)}(q) \in \bar{\Sigma}_0$ 的最小时间。

若 η 充分小

$$\Sigma_0 \subset \Omega, \quad \Sigma_1 \subset \Omega$$

由 h^+ 的表示式(6.6.5),能选取 η,使得 h^+ 在 q^+ 处相交于 Σ_0 的边界($z_1 = 0$)。

$$q^+ \equiv h^+ \cap \partial\Sigma_0$$

这里 q^+ 具有坐标

$$x_1 = x_1^+, \quad y_1 = 0$$

$$x_j = x_j^+, \quad y_j = y_j^+, \quad 2 \leqslant j \leqslant m_1$$

$$z_k = z_k^+, \quad n_1 < k \leqslant n$$

$$x_j = 0, \quad y_j = 0, \quad m_1 < j \leqslant m$$

$$z_k = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_1$$

其中 $\eta_1 < x_1^+ < \eta, x_j^+, y_j^+$ 和 z_k^+ 满足 Σ_0 定义中相应的不等式。类似地,h^- 相交 Σ_1 在

$$q^- \equiv h^- \cap \Sigma_1$$

这里 q^- 具有坐标

$$z_1 = \eta$$

$$x_j = x_j^-, \quad y_j = y_j^-, \quad m_1 < j \leqslant m$$

$$z_k = z_k^-, \quad 2 \leqslant k \leqslant n_1$$

$$x_j = 0, \quad y_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m_1$$

$$z_k = 0, \quad n_1 < k \leqslant n$$

x_j^-, y_j^- 和 z_k^- 满足 Σ_1 定义中相应的不等式。

最后,我们有一个重要的事实

$$P_1^0(q^-) = q^+ \tag{6.6.9}$$

引理 6.6.5 若 η 充分小,则 Poincaré 截面 Σ_0 和 Σ_1 横截于向量场。

证: 首先证明 $\bar{\Sigma}_0$ 在点 q^+ 处横截于向量场。令 n_0 为 $\bar{\Sigma}_0$ 的单位法向量,则 n_0 具有坐标表示:$y_1 = 1$,其余坐标为 0。向量场 v^+ 在 q^+ 能通过式(6.6.5)对 t 微分得到。注意计算内积

$$\langle n_0, v^+ \rangle$$

我们仅知道 v^+ 的 y_1 坐标为

$$x_1^+(0)\cos\beta_1 t_+ - y_1^+(0)\sin\beta_1 t_+$$

其中 t_+ 满足方程

$$x_1^+(0)\sin\beta_1 t_+ + y_1^+(0)\cos\beta_1 t_+ = 0 \tag{6.6.10}$$

假设

$$\langle n_0, v^+ \rangle = 0$$

则

$$x_1^+(0)\cos\beta_1 t_+ - y_1^+(0)\sin\beta_1 t_+ = 0 \tag{6.6.11}$$

由方程(6.6.10)、式(6.6.11)推得

$$x_1^+(0) = y_1^+(0) = 0$$

这与一般条件式(6.6.7)矛盾,因而

$$\langle n_0, v^+ \rangle \neq 0$$

由此，连同向量场在 Σ_0 的光滑性，对于充分小的 η 推出 Σ_0 横截于向量场（在 Σ_0 的任意点上）。类似地，对 Σ_1 也成立，引理证毕。

引理 6.6.6 如果 η 充分小，则 Poincaré 映照 P_0^1 是 1 对 1 的。更进一步，假若 U_1 在 q^- 的充分小的邻域内，则 P_1^0 也是 1 对 1 的。

证：断言 P_1^0 是 1 对 1 的理由来自 F^t 对 t 属于 C^1 和对固定的 t 是 C^2 微分同胚。其次我们证明 P_0^1 是 1 对 1 的。设 p_1, p_2 为 $U_0 \subset \Sigma_0$ 中的两个不同点，且

$$P_0^1(p_1) = P_0^1(p_2) \tag{6.6.12}$$

我们仅需研究点 p_1、p_2 的 (x_1, y_1, z_1) 坐标：$P_0^1(p_1)$ 和 $P_0^1(p_2)$。让 t_1 和 t_2 分别表示从 p_1、p_2 开始，并到达 $P_0^1(p_1)$、$P_0^1(p_2)$ 的轨线所需时间，则

$$t_1 = \frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{\eta}{z_1}\bigg|_{p_1}, \quad t_2 = \frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{\eta}{z_1}\bigg|_{p_2}$$

引入符号 $z_1|_{p_1}$ 表示 p_1 的 z_1 坐标。因 $z_1|_{p_1} > 0$，$z_1|_{p_2} > 0$，t_1、t_2 均为有限。由

$$x_1|_{P_0^1(p_1)} = x_1|_{P_0^1(p_2)}, \quad y_1|_{P_0^1(p_1)} = y_1|_{P_0^1(p_2)}$$

导致

$$x_1|_{p_1} e^{-\alpha_1 t_1}\cos\beta_1 t_1 = x_1|_{p_2} e^{-\alpha_1 t_2}\cos\beta_1 t_2 \tag{6.6.13}$$

$$x_1|_{p_1} e^{-\alpha_1 t_1}\sin\beta_1 t_1 = x_1|_{p_2} e^{-\alpha_1 t_2}\sin\beta_1 t_2 \tag{6.6.14}$$

因 t_1、t_2 为有限的，而且 $x_1|_{p_1}$ 和 $x_1|_{p_2}$ 满足约束

$$\eta_1 < x_1 < \eta \tag{6.6.15}$$

这里 $\eta_1 > \eta\exp\{-2\pi\alpha_1/\beta_1\}$，则从式(6.6.13)、式(6.6.14)有

$$\tan\beta_1 t_1 = \tan\beta_1 t_2$$

因此，$\beta_1 t_1 = \beta_1 t_2 + j\pi$，　对某 $j \in Z$。

若 j 是奇数，则式(6.6.13)、式(6.6.14)不成立，因此，j 是偶数

$(=2j_0)$。从而由式(6.6.13)、式(6.6.14)得

$$\frac{x_1|_{p_1}}{x_1|_{p_2}} = \exp\{2\alpha j_0\pi/\beta_1\}$$

这个关系与约束式(6.6.15)矛盾，除非 $j_0 = 0$。但是，若 $j_0 = 0$，则 $t_1 = t_2$，此时假设式(6.6.12)矛盾于 F^{γ_1} 是微分同胚的。因此，在任何情况下，假设式(6.6.12)不成立，这就证明了 P_0^1 是 1 对 1 的。

6.6.4 Poincaré 映照 P_0^1

令 Σ_0 的坐标为

$$(x_1^0; \{x_j^0, y_j^0\}, j = 2,3,\cdots,m; \quad z_k^0, k = 1,2,\cdots,m)$$

Σ_1 的坐标为

$$(\{x_j^1, y_j^1\}, j = 1,\cdots,m; \quad z_k^1, k = 2,3,\cdots,n)$$

在 Ω 上解算子 $F^t = L^t$ 具有表达式

$$\begin{cases} x_j(t) = e^{\varepsilon_j\alpha_j t}(x_j(0)\cos\beta_j t - y_j(0)\sin\beta_j t) \\ y_j(t) = e^{\varepsilon_j\alpha_j t}(x_j(0)\sin\beta_j t + y_j(0)\cos\beta_j t) \\ z_k(t) = e^{\delta_k\gamma_k t}z_k(0) \\ \quad j = 1,2,\cdots,m; \quad k = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

设 t_* 为从 Σ_0 上一点出发到达 Σ_1 的一条轨线的起飞时间，则

$$t_* = \frac{1}{\gamma_1}\ln\eta/z_1^0 \tag{6.6.16}$$

利用解算子的表达式和“起飞时间”，P_0^1 能表示为

$$\begin{cases} x_1^1 = e^{-\alpha_1 t_*}\cdot x_1^0\cos\beta_1 t_* \\ y_1^1 = e^{-\alpha_1 t_*}\cdot x_1^0\sin\beta_1 t_* \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_j^1 = e^{-\alpha_j t_*}\cdot(x_j^0\cos\beta_j t_* - y_j^0\sin\beta_j t_*), \\ y_j^1 = e^{-\alpha_j t_*}\cdot(x_j^0\sin\beta_j t_* + y_j^0\cos\beta_j t_*), \end{cases} \quad 2 \leqslant j \leqslant m_1$$

$$z_k^1 = e^{-\gamma_k t_*} \cdot z_k^0, \quad n_1 < k \leqslant n \tag{6.6.17}$$

$$\begin{cases} x_j^1 = e^{\alpha_j t_*} \cdot (x_j^0 \cos\beta_j t_* - y_j^0 \sin\beta_j t_*), \\ y_j^1 = e^{\alpha_j t_*} \cdot (x_j^0 \sin\beta_j t_* + y_j^0 \cos\beta_j t_*), \end{cases} \quad m_1 < j \leqslant m$$

$$z_k^1 = e^{\gamma_k t_*} \cdot z_k^0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_1 \tag{6.6.18}$$

6.6.5 Poincaré 映照 P_1^0

设 $\hat{\Sigma}_0$ 为 Σ_0 依条件 $-\eta < z_1 < \eta$ 的扩展。Poincaré 映照 P_1^0 自然扩展为 $\hat{P}_1^0$,它可表示为

$$\hat{P}_1^0 : \hat{U}_1 \subset \Sigma_1 \longrightarrow \hat{\Sigma}_0$$

从式(6.6.9)有

$$\hat{P}_1^0(q^-) = q^+$$

以 $T(q)$表示 Σ_1 上点 q 开始的轨线到达$\hat{\Sigma}_0$的飞行时间,则

$$F^{T(q^-)}(q^-) = q^+$$

因 F^t 对 t 属于 C^1,对固定的 t 为 C^2 微分同胚,由隐函数定理推得:

存在 Σ_1 中 q^- 的一个小邻域 U_1^-,使得 $T(q)$为 q 的 C^1 函数。限制在 U_1^- 上,$\hat{P}_1^0$ 具有表达式

$$\hat{P}_1^0(q^- + \triangle q) = q^+ + \langle \mathrm{grad}\hat{P}_1^0(q^-), \triangle q \rangle + N(q^-, \triangle q) \tag{6.6.19}$$

这里

$$\| N(q^-, \triangle q) \| \approx O(\| \triangle q \|), \quad 当 \| \triangle q \| \to 0 时;$$

$$\mathrm{grad}\hat{P}_1^0(q^-) = \frac{\partial}{\partial t} F^{T(q^-)}(q^-) \cdot \frac{\partial}{\partial q} T(q^-) + \frac{\partial}{\partial q} F^{T(q^-)}(q^-)$$

接下来,我们分别引进以 q^+ 和 q^- 为原点在 Σ_0 与 Σ_1 上的新坐标。

在 Σ_0 上,

$$x_1^0 = x_1^+ + \tilde{x}_1^0$$

$$\begin{cases} x_j^0 = x_j^+ + \tilde{x}_j^0, \\ y_j^0 = y_j^+ + \tilde{y}_j^0, \end{cases} \quad 2 \leqslant j \leqslant m_1$$

$$z_k^0 = z_k^+ + \tilde{z}_k^0, \quad n_1 < k \leqslant n$$

$$\begin{cases} x_j^0 = \tilde{x}_j^0, \\ y_j^0 = \tilde{y}_j^0, \end{cases} \quad m_1 < j \leqslant m$$

$$z_k^0 = \tilde{z}_k^0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_1$$

在 Σ_1 上,

$$z_k^1 = z_k^- + \tilde{z}_k^1, \quad 2 \leqslant k \leqslant n_1$$

$$\begin{cases} x_j^1 = x_j^- + \tilde{x}_j^1, \\ y_j^1 = y_j^- + \tilde{y}_j^1, \end{cases} \quad m_1 < j \leqslant m$$

$$z_k^1 = \tilde{z}_k^1, \quad n_1 < k \leqslant n$$

$$\begin{cases} x_j^1 = \tilde{x}_j^1, \\ y_j^1 = \tilde{y}_j^1, \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant m_1$$

作为新的坐标,方程(6.6.19)可写成

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{y}^0 \\ \tilde{z}^0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{y}^1 \\ \tilde{z}^1 \end{bmatrix} + B \tag{6.6.20}$$

其中

$$\tilde{x}^0 \equiv (\tilde{x}_1^0, \cdots, \tilde{x}_m^0)^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{y}^0 \equiv (\tilde{y}_2^0, \cdots, \tilde{y}_m^0)^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{z}^0 \equiv (\tilde{z}_1^0, \cdots, \tilde{z}_n^0)^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{x}^1 \equiv (\tilde{x}_1^1, \cdots, \tilde{x}_m^0)^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{y}^1 \equiv (\tilde{y}_1^1, \cdots, \tilde{y}_m^1)^T$$

$$\tilde{z}^1 \equiv (\tilde{z}_2^1, \cdots, \tilde{z}_n^1)^T$$

A 为$(2m+n-1)\times(2m+n-1)$常数矩阵,B 为q^{-1}和$\triangle q$ 的$(2m+n-1)$列向量函数。

$$\|B\| \approx O(\|\triangle q\|), \quad 当 \|\triangle q\| \to 0 时$$

$$\triangle q = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{y}^1 \\ \tilde{z}^1 \end{pmatrix}$$

A 为如下矩阵块形式

$$\begin{bmatrix} A_{jk}^{(x,x)} & A_{jk}^{(x,y)} & A_{jk}^{(x,z)} \\ A_{jk}^{(y,x)} & A_{jk}^{(y,y)} & A_{jk}^{(y,z)} \\ A_{jk}^{(z,x)} & A_{jk}^{(z,y)} & A_{jk}^{(z,z)} \end{bmatrix} \tag{6.6.21}$$

其中,在块中的指标 j 随第一个上标的维数变动,指标 k 随第二个上标的维数变动。类似地,对于 B 有块:$B_j^{(x)}, B_k^{(x)}$ 等。

6.6.6 Poincaré 映照 $P \equiv P_1^0 \circ P_0^1$ 的不动点

Poincaré 映照 P 定义为

$$P: U \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_0, \quad P = P_1^0 \circ P_0^1 \tag{6.6.22}$$

P 的不动点对应于式(6.6.4)的周期轨道。设 $q \in U \subset \Sigma_0$ 为 P 的不动点,具有坐标

$$(\tilde{x}_1^0; \{\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0\}, j = 2,3,\cdots,m; \tilde{z}_k^0, k = 1,\cdots,n) \tag{6.6.23}$$

则

$$P(q) = q \tag{6.6.24}$$

给出了有$(2m+n-1)$个变元式(6.6.23)的$(2m+n-1)$个方程.我们的任务是寻找式(6.6.24)的解。无论如何,对于求解式(6.6.24),变元式(6.6.23)不是最佳的。下面,我们将给出新的变元,以便更好地求解式(6.6.24)。

6.6.6.1 Silnikov 变元

考虑在 S 上的一组变元,它由 Σ_0 和 Σ_1 上的变元构成

$$(\tilde{x}_1^0; \{\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0\}, 2 \leqslant j \leqslant m_1; \{\tilde{x}_j^1, \tilde{y}_j^1\}, m_1 < j \leqslant m; t_*; \tilde{z}_k^1, 2 \leqslant k \leqslant n_1; \tilde{z}_k^0, n_1 < k \leqslant n),$$

由变换所定义

$$\begin{aligned}
& T: S \to \Sigma_0, \\
& \tilde{x}_1^0 \to \tilde{x}_1^0, \\
& \{\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0\} \to \{\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0\}, \quad 2 \leqslant j \leqslant m_1 \\
& \tilde{z}_k^0 \to \tilde{z}_k^0, n_1 < k \leqslant n \\
& \tilde{x}_j^1 \to \tilde{x}_j^0 = e^{-\alpha_j t_*}\cdot[(x_j^- + \tilde{x}_j^1)\cos\beta_j t_* + \\
& \qquad (y_j^- + \tilde{y}_j^1)\sin\beta_j t_*], \quad m_1 < j \leqslant m \\
& \tilde{y}_j^1 \to \tilde{y}_j^0 = e^{-\alpha_j t_*}\cdot[-(x_j^- + \tilde{x}_j^1)\sin\beta_j t_* + \\
& \qquad (y_j^- + \tilde{y}_j^1)\cos\beta_j t_*], \quad m_1 < j \leqslant m \\
& \tilde{z}_k^1 \to \tilde{z}_k^0 = e^{-\gamma_k t_*}\cdot(z_k^- + \tilde{z}_k^1), \quad 2 \leqslant k \leqslant n_1 \\
& t_* \to \tilde{z}_1^0 = e^{-\gamma_k t_*}\eta \\
& T^{-1}: \Sigma_0 \to S \\
& \tilde{x}_1^0 \to \tilde{x}_1^0 \\
& \{\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0\} \to \{\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0\}, \quad 2 \leqslant j \leqslant m_1 \\
& \tilde{z}_k^0 \to \tilde{z}_k^0, \quad n_1 < k \leqslant n \\
& \tilde{x}_j^0 \to \tilde{x}_j^1 = -x_j^- + e^{\alpha_j t_*}[\tilde{x}_j^0\cos\beta_j t_* - \tilde{y}_j^0\sin\beta_j t_*], \\
& \qquad m_1 < j \leqslant m
\end{aligned} \tag{6.6.25}$$

$$\tilde{y}_j^0 \to \tilde{y}_j^1 = -y_j^- + e^{\alpha_j t_*}\cdot[\tilde{x}_j^0\sin\beta_j t_* + \tilde{y}_j^0\cos\beta_j t_*],$$

$$m_1 < j \leqslant m$$

$$\tilde{z}_k^0 \to \tilde{z}_k^1 = -z_k^- + e^{\gamma_k t_*}\cdot\tilde{z}_k^0, \quad 2 \leqslant k \leqslant n_1$$

$$\tilde{z}_1^0 \to t_* = \frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{\eta}{\tilde{z}_1^0} \tag{6.6.26}$$

这些变元称之为 Silnikov 变元，它对于寻找 Poincaré 映照的不动点特别有用。具体地，我们用它来计算 $P_1^0 \circ P_0^1$ 和 T 的共轭，即

$$T^{-1} \circ P_1^0 \circ P_0^1 \circ T \tag{6.6.27}$$

并寻找这个映照的不动点。显然，这些不动点对应于在映照 T 之下 $P_1^0 \circ P_0^1$ 的不动点。我们利用式(6.6.17)、式(6.6.20)、式(6.6.25)和式(6.6.26)来计算共轭映照的分量。

乘每个方程以 $e^{\alpha_1 t_*}$，并利用式(6.6.1)中特征值的次序，可得如下方程：

$$e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{\sigma}_k^0 = (x_1^+ + \tilde{x}_1^0)(A_{k1}^{(\sigma,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(\sigma,y)}\sin\beta_1 t_*) +$$
$$\sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(\sigma,x)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{x}_j^1 + A_{kj}^{(\sigma,y)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{y}_j^1) +$$
$$\sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(\sigma,z)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{z}_j^1 + C_k^{(\sigma)} \tag{6.6.28}$$
$$\begin{cases}\sigma = x, & 1 < k \leqslant m_1\\ \sigma = y, & 2 < k \leqslant m_1\\ \sigma = z, & n_1 < k \leqslant n\end{cases}$$

$$0 = (x_1^+ + \tilde{x}_1^0)(A_{k1}^{(z,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(z,y)}\sin\beta_1 t_*) +$$
$$\sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(z,x)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{z}_j^1 + A_{kj}^{(z,y)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{y}_j^1) +$$
$$\sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(z,z)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{z}_j^1 + C_k^{(x)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_1 \tag{6.6.29}$$

$$0 = (x_1^+ + \tilde{x}_1^0)\{(A_{k1}^{(x,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(x,y)}\sin\beta_1 t_*)\cos\beta_k t_* -$$
$$(A_{k1}^{(y,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(y,y)}\sin\beta_1 t_*)\sin\beta_k t_*\} +$$
$$\{\sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(x,x)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{x}_j^1 + A_{kj}^{(x,y)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{y}_j^1) +$$
$$\sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(x,y)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{z}_j^1\}\cos\beta_k t_* -$$
$$\{\sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(y,x)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{x}_j^1 + A_{kj}^{(y,y)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{y}_j^1) +$$
$$\sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(y,z)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{z}_j^1\}\sin\beta_k t_* +$$
$$C_k^{(z)}, \quad m_1 < k \leqslant m \tag{6.6.30}$$

$$0 = (x_1^+ + \tilde{x}_1^0)\{(A_{k1}^{(x,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(x,y)}\sin\beta_1 t_*)\sin\beta_k t_* +$$
$$(A_{k1}^{(y,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(y,y)}\sin\beta_1 t_*)\cos\beta_k t_*\} +$$
$$\{\sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(x,x)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{x}_j^1 + A_{kj}^{(x,y)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{y}_j^1) +$$
$$\sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(x,x)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{z}_j^1\}\sin\beta_k t_* +$$
$$\{\sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(y,x)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{x}_j^1 + A_{kj}^{(y,y)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{y}_j^1) +$$
$$\sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(y,z)}e^{\alpha_1 t_*}\cdot\tilde{z}_j^1\}\cos\beta_k t_* +$$
$$C_k^{(y)}, \quad m_1 < k \leqslant m \tag{6.6.31}$$

这里 $C_k^{(\sigma)}\to 0(t_*\to\infty)$。考虑引入尺度坐标的方程

$$t_*;\hat{z}_k^1 \equiv e^{\alpha_1 t}\cdot\tilde{z}_k^1,\quad 2\leqslant k\leqslant n_1; \tag{6.6.32}$$

$$(\hat{x}_j^1 \equiv e^{\alpha_1 t}\cdot\tilde{x}_j^1,\hat{y}_j^1 \equiv e^{\alpha_1 t}\cdot\tilde{y}_j^1),\quad m_1<j\leqslant m;$$

$$\hat{x}_1^0 \equiv e^{\alpha_1 t};\hat{z}_k^0 \equiv e^{\alpha_1 t}\cdot\tilde{z}_k^0,\quad n_1<k\leqslant n;$$

$$(\hat{x}_j^0 \equiv e^{\alpha_1 t}\cdot\tilde{x}_j^0,\hat{y}_j^0 \equiv e^{\alpha_1 t}\cdot\tilde{y}_j^0),\quad 2\leqslant j\leqslant m_1 \tag{6.6.33}$$

注意到在式(6.6.30)中乘以 $\sin\beta_k t_*$ 的系数和式(6.6.31)中乘以 $\cos\beta_k t_*$ 后的系数是一样的,类似地,在式(6.6.30)中系数乘以 $\cos\beta_k t_*$ 和式(6.6.31)中系数乘以 $\sin\beta_k t_*$ 后是一样的。因此,不动点的等价方程满足:

$$0 = x_1^+(A_{k1}^{(\sigma,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(\sigma,y)}\sin\beta_1 t_*) +$$

$$\sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(\sigma,x)}\hat{x}_j^1 + A_{kj}^{(\sigma,y)}\hat{y}_j^1) +$$

$$\sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(\sigma,z)}\hat{z}_j^1 + C_k^{(\sigma)} \tag{6.6.34}$$

$$\begin{cases}\sigma = x,y, & m_1<k\leqslant m\\ \sigma = z, & 1\leqslant k\leqslant n_1\end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_k^0 = x_1^+(A_{k1}^{(\sigma,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(\sigma,y)}\sin\beta_1 t_*) +$$

$$\sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(\sigma,x)}\hat{x}_j^1 + A_{kj}^{(\sigma,y)}\hat{y}_j^1) +$$

$$\sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(\sigma,z)}\hat{z}_j^1 + C_k^{(\sigma)} \tag{6.6.35}$$

$$\begin{cases}\sigma = x, & 1\leqslant k\leqslant m_1\\ \sigma = y, & 2\leqslant k\leqslant m_1\\ \sigma = z, & n_1<k\leqslant n\end{cases}$$

6.6.6.2　$C_k^{(\sigma)}=0$ 的解

置 $C_k^{(\sigma)}=0$ 于方程组式(6.6.34)、式(6.6.35),解这个方程组,特别,求解式(6.6.34)对于

$$t_*;\hat{z}_k^1,\quad 2\leqslant k\leqslant n_1$$

$$(\hat{x}_j^1,\hat{y}_j^1),\quad m_1<j\leqslant m$$

再将这些值代入式(6.6.35)得

$$\hat{x}_j^0,\quad 1\leqslant j\leqslant m_1$$

$$\hat{y}_j^0,\quad 2\leqslant j\leqslant m_1$$

$$\hat{z}_k^0,\quad n_1<k\leqslant n$$

在解式(6.6.34)之前,先证如下事实

引理 6.6.7　设 A_1 为$[2(m-m_1)+n_1]\times[2(m-m_1)+n_1-1]$矩阵

$$\mathrm{row}(A_1) = (A_{k(m_1+1)}^{(\sigma,x)}\cdots A_{km}^{(\sigma,x)}A_{k(m_1+1)}^{(\sigma,y)}\cdots A_{km}^{(\sigma,y)}A_{k2}^{(\sigma,z)}\cdots A_{kn_1}^{(\sigma,z)})$$

$$\sigma = x,y,\quad m_1<k\leqslant m$$

$$\sigma = z,\quad 1\leqslant k\leqslant n_1$$

如果一般性条件

(G3)　$\dim\{T_{q^+}W^s\cap T_{q^+}W^u\} = 1$

满足,则

$$\mathrm{rank}(A_1) = 2(m-m_1)+n_1-1$$

证明:设 A_0 为$[2m+n-1]\times[2(m-m_1)+n_1-1]$矩阵

$$\mathrm{row}(A_0) = (A_{k(m_1+1)}^{(\sigma,x)}\cdots A_{km}^{(\sigma,x)}A_{k(m_1+1)}^{(\sigma,y)}\cdots A_{km}^{(\sigma,y)}A_{k2}^{(\sigma,z)}\cdots A_{kn_1}^{(\sigma,z)})$$

$$\begin{cases}\sigma = x, & 1\leqslant k\leqslant m\\ \sigma = y, & 2\leqslant k\leqslant m\\ \sigma = z, & 1\leqslant k\leqslant n\end{cases}$$

注意到

$$(\hat{x}_j^1, \hat{y}_j^1), \qquad m_1 < j \leqslant m$$

$$\hat{z}_k^1, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n_1$$

为 $\Sigma_1 \cap W_{\mathrm{loc}}^u$ 的坐标化。$W_{\mathrm{loc}}^u \cap \Sigma_1$ 的维数为$[2(m-m_1)+n_1-1]$，因 P_1^0 是微分同胚的，当限制在 Σ_1 中点 q^- 的小邻域 U_1^- 内，$P_1^0(W_{\mathrm{loc}}^u \cap U_1^-)$也是$[2(m-m_1)+n_1-1]$维的。进一步，$T_q - P_1^0(W_{\mathrm{loc}}^u \cap U_1^-)$可表示为

$$A_0 \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{y}^1 \\ \hat{z}^1 \end{pmatrix} \tag{6.6.36}$$

其中

$$\hat{x}^1 = (\hat{x}_{m_1+1}^1, \cdots, \hat{x}_m^1)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{y}^1 = (\hat{y}_{m_1+1}^1, \cdots, \hat{y}_m^1)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{z}^1 = (\hat{z}_2^1, \cdots, \hat{x}_{n_1}^1)^{\mathrm{T}}$$

因此

$$\mathrm{rank}(A_0) = 2(m-m_1)+n_1-1 \tag{6.6.37}$$

假设

$$\mathrm{rank}(A_1) < 2(m-m_1)+n_1-1$$

则 A_1 的列是线性无关的。故存在非零 $2(m-m_1)+n_1-1$ 列向量 a，使得

$$A_1 a = 0 \tag{6.6.38}$$

由式(6.6.37)有

$$A_0 a \neq 0 \tag{6.6.39}$$

由式(6.6.38)有

$$A_0 a \subset W_{\mathrm{loc}}^s \cap \Sigma_0 = T_q + (W_{\mathrm{loc}}^s \cap \Sigma_0)$$

由式(6.6.36)

$$A_0 a \subset T_q + P_1^0(W_{\mathrm{loc}}^u \cap U_1^-)$$

注意到

$$P_1^0(W_{\mathrm{loc}}^u \cap U_1^-) \subset W^u$$

则

$$A_0 a \subset T_q + W^s \cap T_q + W^u$$

我们知道

$$T_q + h \subset T_q + W^s \cap T_q + W^u$$

因此，T_q+h 和 Σ_0 横截。而 $A_0 a \subset \Sigma_0$，由式(6.6.39)，T_q+h 和 $A_0 a$ 是线性无关的，则

$$\dim\{T_q + W^s \cap T_q + W^u\} = 2$$

这与引理的假设矛盾，引理获证。

利用引理 6.6.7，不失一般性，可设$[2(m-m_1)+n_1-1] \times [2(m-m_1)+n_1-1]$矩阵 A_2

$$\mathrm{row}(A_2) = (A_{k(m_1+1)}^{(\sigma,x)} \cdots A_{km}^{(\sigma,x)} A_{k(m_1+1)}^{(\sigma,y)} \cdots A_{km}^{(\sigma,y)} A_{k2}^{(\sigma,z)} \cdots A_{kn_1}^{(\sigma,z)})$$

$$\sigma = x, y, \qquad m_1 < k \leqslant m$$

$$\sigma = z, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n_1$$

是非奇异的，这能提供变元 t_* 的方程，我们容易求解它。

$$\begin{bmatrix} A_{1j}^{(z,x)} & A_{1j}^{(z,y)} & A_{1j}^{(z,z)} \\ A_{kj}^{(x,x)} & A_{kj}^{(x,y)} & A_{kj}^{(x,z)} \\ A_{kj}^{(y,x)} & A_{kj}^{(y,y)} & A_{kj}^{(y,z)} \\ A_{kj}^{(z,x)} & A_{kj}^{(z,y)} & A_{kj}^{(z,z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = -x_1^+ \begin{bmatrix} A_{11}^{(z,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{11}^{(z,y)}\sin\beta_1 t_* \\ A_{k1}^{(x,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(x,y)}\sin\beta_1 t_* \\ A_{k1}^{(y,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(y,y)}\sin\beta_1 t_* \\ A_{k1}^{(z,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{k1}^{(z,y)}\sin\beta_1 t_* \end{bmatrix} \tag{6.6.40}$$

这里，表达式左边的矩阵为 A_1，它的子矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{kj}^{(x,x)} & A_{kj}^{(x,y)} & A_{kj}^{(x,z)} \\ A_{kj}^{(y,x)} & A_{kj}^{(y,y)} & A_{kj}^{(y,z)} \\ A_{kj}^{(z,x)} & A_{kj}^{(z,y)} & A_{kj}^{(z,z)} \end{bmatrix} \tag{6.6.41}$$

为 A_2。再由 A_2 的非奇性，存在惟一的$[2(m-m_1)+n_1-1]$行向量 b 满足如下方程

$$\mathrm{row}(A_1)_{\sigma=z,k=1} = bA_2 \tag{6.6.42}$$

然而，从式(6.6.40)有

$$\mathrm{row}(A_1)_{\sigma=z,k=1} = A_{11}^{(z,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{11}^{(z,y)}\sin\beta_1 t_* \tag{6.6.43}$$

利用式(6.6.41)计算式(6.6.42)右端，并与式(6.6.43)的右端相等可得

$$A_{11}^{(z,x)}\cos\beta_1 t_* + A_{11}^{(z,y)}\sin\beta_1 t_* =$$

$$\Big[\sum_{\substack{\sigma=x,y\\ m_1<k\le m}} b_k^\sigma A_{k1}^{(\sigma,x)} + \sum_{\substack{\sigma=z\\ 2\le k\le n_1}} b_k^\sigma A_{k1}^{(\sigma,x)}\Big]\cos\beta_1 t_* +$$

$$\Big[\sum_{\substack{\sigma=x,y\\ m_1<k\le m}} b_k^\sigma A_{k1}^{(\sigma,y)} + \sum_{\substack{\sigma=z\\ 2\le k\le n_1}} b_k^\sigma A_{k1}^{(\sigma,y)}\Big]\sin\beta_1 t_*$$

或者

$$\Delta_1\cos\beta_1 t_* + \Delta_2\sin\beta_1 t_* = 0 \tag{6.6.44}$$

其中

$$\Delta_1 = A_{11}^{(z,x)} - \sum_{\sigma=x,y;m_1<k\le m} b_k^\sigma A_{k1}^{(\sigma,x)} - \sum_{\sigma=z;2\le k\le n_1} b_k^\sigma A_{k1}^{(\sigma,x)}$$

$$\Delta_2 = A_{11}^{(z,y)} - \sum_{\sigma=x,y;m_1<k\le m} b_k^\sigma A_{k1}^{(\sigma,y)} - \sum_{\sigma=z;2\le k\le n_1} b_k^\sigma A_{k1}^{(\sigma,y)}$$

式(6.6.44)提供了求解 t_* 的方程。如果一般性条件

（**G4**） Δ_1,Δ_2 不同时为零

满足，则从式(6.6.44)可得无穷多解

$$t_*^l = \frac{1}{\beta_1}(l\pi-\varphi),\quad l\in Z \tag{6.6.45}$$

这里 $\varphi=\arctan\left\{\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}\right\}$。将 t_*^l 代入方程(6.6.34)并注意到

$$\begin{cases}\sigma=x,y, & m_1<k\le m\\ \sigma=z, & 2\le k\le n_1\end{cases}$$

可得方程组

$$A_2\begin{bmatrix}\hat{x}^1\\ \hat{y}^1\\ \hat{z}^1\end{bmatrix} = f^l \tag{6.6.46}$$

其中 $\hat{x}^1$、$\hat{y}^1$、$\hat{z}^1$ 为式(6.6.36)所定义，f^l 为$[2(m-m_1)+n_1-1]$列向量，表值 $\mathrm{entry}(f^l) = -x_1^+(A_{k1}^{(\sigma,x)}\cos\beta_1 t_*^l + A_{k1}^{(\sigma,x)}\cos\beta_1 t_*^l)$

$$\begin{cases}\sigma=x,y, & m_1<k\le m\\ \sigma=z, & 2\le k\le n_1\end{cases}$$

因 A_2 为非奇异的，式(6.6.46)具有惟一解

$$\begin{pmatrix}\hat{x}^l\\ \hat{y}^l\\ \hat{z}^l\end{pmatrix} = A_2^{-1}f^l \tag{6.6.47}$$

将式(6.6.45)、式(6.6.47)的每个解代入方程(6.6.35)可得解

$$\hat{\sigma}_k^l = x_1^+(A_{k1}^{(\sigma,x)}\cos\beta_1 t_*^l + A_{k1}^{(\sigma,y)}\sin\beta_1 t_*^l) + \sum_{j=m_1+1}^{m}(A_{kj}^{(\sigma,x)}\hat{x}_j^l + A_{kj}^{(\sigma,y)}\hat{y}_j^l) + \sum_{j=2}^{n_1}A_{kj}^{(\sigma,z)}\hat{z}_j^l \tag{6.6.48}$$

$$\begin{cases}\sigma=x, & 1\le k\le m_1\\ \sigma=y, & 2\le k\le m_1\\ \sigma=z, & n_1\le k\le n\end{cases}$$

6.6.6.3 不动点

从前面得到的解出发，我们要解方程组(6.6.34)、式(6.6.35)在当 $t_*\to+\infty$时。因 $C_k^{(\sigma)}\to 0, t_*\to\infty$，由隐函数定理，我们有如下定理：

定理 6.6.8 存在正整数 l_0，使得方程组(6.6.34)、式(6.6.35)有无穷多解以 $l(l \geqslant l_0)$ 为指标：

$$t_* = T_l, \hat{x}_1^0 = \hat{x}_1^{(0,l)}$$

$$(\hat{x}_j^0 = \hat{x}_j^{(0,l)}, \hat{y}_j^0 = \hat{y}_j^{(0,l)}), \qquad 2 \leqslant j \leqslant m_1$$

$$\hat{z}_k^0 = \hat{z}_k^{(0,l)}, \qquad n_1 < k \leqslant n$$

$$(\hat{x}_j^1 = \hat{x}_j^{(1,l)}, \hat{y}_j^1 = \hat{y}_j^{(1,l)}), \qquad m_1 \leqslant j \leqslant m$$

$$\hat{z}_k^1 = \hat{z}_k^{(1,l)}, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n_1$$

当 $l \to \infty$ 时

$$T_l = \frac{1}{\beta_1}(l\pi - \varphi) + O(1)$$

$$\hat{x}_1^{(0,l)} = \hat{x}_1^l + O(1)$$

$$\hat{x}_j^{(r,l)} = \hat{x}_j^l + O(1)$$

$$\hat{y}_j^{(r,l)} = \hat{y}_j^l + O(1)$$

$$\begin{cases} r = 0, & 2 \leqslant j \leqslant m_1 \\ r = 1, & m_1 < j \leqslant m \end{cases}$$

$$\hat{z}_k^{(r,l)} = \hat{z}_k^l + O(1)$$

$$\begin{cases} r = 0, & n_1 < k \leqslant n \\ r = 1, & 2 \leqslant k \leqslant n_1 \end{cases}$$

其中 $\hat{x}_j^l$、$\hat{y}_j^l$ 和 $\hat{z}_k^l$ 定义在式(6.6.47)、式(6.6.48)。

证明：提要式加以证明。令

$$t_* = \frac{1}{\beta_1}[2s\pi + \tau], \quad \tau \in [0,2\pi], s \in z^+$$

设 υ 表示式(6.6.34)、式(6.6.35)其余的变元，则方程(6.6.34)、式(6.6.35)的解写为

$$f(\tau,\upsilon) \equiv g(\tau,\upsilon) + c(s;\tau,\upsilon) = 0 \qquad (6.6.49)$$

其中当 $s \to +\infty$ 时，$c(s;\tau,\upsilon) \to 0$。由前面可知存在 $g(\tau,\upsilon)=0$ 的两个解，表以 (τ_1,υ_1) 和 (τ_2,υ_2)

且
$$\nabla g(\tau_i,\upsilon_i), \quad i = 1,2 \qquad (6.6.50)$$

是线性同胚的。对 $\tau \in [0,2\pi]$，υ 在某个有界区域 D_1；$D = [0,2\pi] \times D_1$

$$\sup_{(\tau,\upsilon)\in D} \| c(s;\tau,\upsilon) \| \to 0, \quad s \to \infty \qquad (6.6.51)$$

$$\sup_{(\tau,\upsilon)\in D} \| \nabla c(s;\tau,\upsilon) \| \to 0, \quad s \to \infty \qquad (6.6.52)$$

我们知道

$$f(\tau_i,\upsilon_i) = c(s;\tau_i,\upsilon_i)$$

我们要寻找 (τ'_i,υ'_i) 使得

$$f(\tau_i + \tau'_i, \upsilon_i + \upsilon'_i) - f(\tau_i,\upsilon_i) = -c(s;\tau_i,\upsilon_i) \qquad (6.6.53)$$

当 s 充分大时，式(6.6.53)等价于

$$(\tau'_i,\upsilon'_i) = -[\nabla f(\tau_i,\upsilon_i)]^{-1}[c(s;\tau_i,\upsilon_i) + R(s;\tau_i,\upsilon_i;\tau'_i,\upsilon'_i)] \qquad (6.6.54)$$

其中

$$R(s;\tau_i,\upsilon_i,\tau'_i,\upsilon'_i) = f(\tau_i + \tau'_i, \upsilon_i + \upsilon'_i) - f(\tau_i,\upsilon_i) - \nabla f(\tau_i,\upsilon_i) \circ (\tau'_i,\upsilon'_i) = O(\| (\tau'_i,\upsilon'_i) \|)$$

则由式(6.6.54)的不动点原理推出定理的结论。

6.6.7 Smale 马蹄

从定理 6.6.8 开始，我们构造 Smale 马蹄，利用 Conley-Moser 条件我们从几何上进行构造。

6.6.7.1 平板(Slabs)的定义

定义 6.6.9 定义在 Σ_0 上的平板(Slab $S_l(2l \geqslant l_0)$)如下

$$S_l \equiv \{q \in \Sigma_0 \mid \eta\exp\{-\gamma_1(T_{2(l+1)} - \pi/2)\} \leqslant$$

$$\tilde{z}_1^0(q) \leqslant \eta\exp\{-\gamma_1(T_{2l} - \pi/2)\}\}$$

$$|\tilde{x}_1^0(q)| \leqslant \eta\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\right\}, |\tilde{\sigma}_k^l(P_0^1(q))| \leqslant \eta\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\right\}$$

$$\sigma = x, y, m_1 < k \leqslant m; \quad \sigma = z, 0 \leqslant k \leqslant n_1$$

由定理6.6.8，S_l 含有 P 的两个不动点，表以这两个不动点为 p_l^+ 和 p_l^-，其中 p_l^+ 对应于 T_{2l}，p_l^- 对应于 T_{2l+1}(定理6.6.8)推之

$$\tilde{z}_1^0(p_l^+) \geqslant \tilde{z}_1^0(p_l^-)$$

如 l 充分大，$P_0^1(S_l)$被包含在 Σ_1 上，点 q^- 为中心的球内，具半径阶数为

$$O\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\right\}\right)$$

因此，有

$$P_0^1(S_l) \subset U_1^-$$

于是 $S_l \subset U$。这里 U 是 P 的定义域，因 p_l^+ 和 p_l^- 为不动点，则分别存在 p_l^+ 和 p_l^- 的两个邻域 V_l^+ 和 V_l^- 被包含在交集：

$$P(S_l) \cap S_l$$

中。

6.6.7.2 S_l 和 $P_0^1(S_l)$

这一节我们将描述在 P_0^1 下 S_l 的象的几何意义，在 Σ_0 和 Σ_1 上的坐标分别为

$$(\tilde{x}_1^0, \tilde{y}_1^0, \xi_s^0, \xi_u^0)$$

$$(\tilde{x}_1^1, \tilde{y}_1^1, \xi_s^1, \xi_u^1)$$

其中 $\xi_s^\tau(\tau = 0,1)$为$[2(m_1 - 1) + (n - n_1)]$向量

$$\text{entry}(\xi_s^\tau) = \tilde{\sigma}_k^\tau$$

$$\begin{cases} \sigma = x, y, & 2 \leqslant k \leqslant m_1 \\ \sigma = z, & n_1 < k \leqslant n \end{cases}$$

$\xi_u^\tau(\tau = 0,1)$为$[2(m - m_1) + n_1 - 1]$向量

$$\text{entry}(\xi_u^\tau) = \tilde{\sigma}_k^\tau$$

$$\begin{cases} \sigma = x, y, & m_1 < k \leqslant m \\ \sigma = z, & 2 \leqslant k \leqslant n_1 \end{cases}$$

定义 6.6.10 定义沿着 ξ_u^0 方向 S_l 的直径为

$$d_1^u(S_l) \equiv \sup_C\{\| \xi_u^0(q_1) - \xi_u^0(q_2) \|\}$$

其中 C 为

$$C \equiv \{q_1, q_2 \in S_l : \tilde{x}_1^0(q_1) = \tilde{x}_1^0(q_2), \tilde{z}_1^0(q_1) = \tilde{z}_1^0(q_2), \xi_s^0(q_1) = \xi_s^0(q_2)\}$$

定义 $P_0^1(S_l)$沿 ξ_s^1 方向的直径为

$$d_1^s(p_0^1(S_l)) \equiv \sup_C\{\| \xi_s^1(q_1) - \xi_s^1(q_2) \|\}$$

$$C \equiv \{q_1, q_2 \in P_0^1(S_l) : \tilde{x}_1^1(q_1) = \tilde{x}_1^1(q_2), \tilde{y}_1^1(q_1) = \tilde{y}_1^1(q_2), \xi_u^1(q_1) = \xi_u^1(q_2)\}$$

由 S_l 的定义和P_0^1 的表示式(6.6.17)有

$$d_1^u(S_l) \approx O(\exp\{-(\gamma_1 + \alpha_1/2) T_{2l}\}), \quad l \to +\infty \tag{6.6.55}$$

$$d_1^s(P_0^1(S_l)) \approx O(\exp\{-\alpha_1 T_{2l}\}), \quad l \to +\infty \tag{6.6.56}$$

S_l 和 $P_0^1(S_l)$具有乘积表示，如图6.6.1所示。

S_l 和平面$(\tilde{x}_1^0, \tilde{z}_1^0)$沿 $\tilde{x}_1^0$ 方向相交的宽度为

$$2\eta\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\right\} \tag{6.6.57}$$

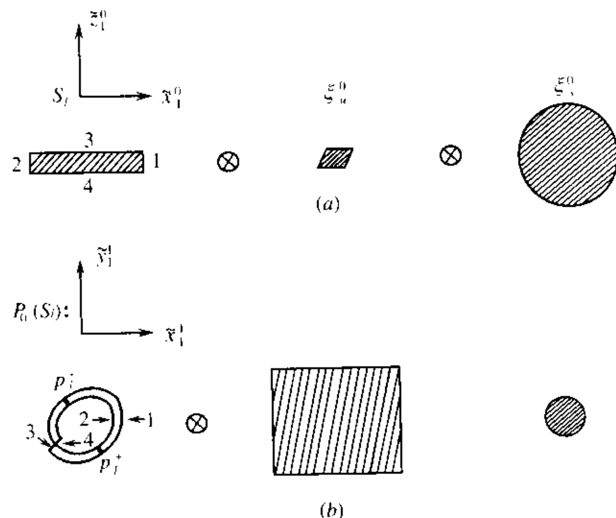


图 6.6.1　平板(Slabs)的几何图形(a)；在映射 p_0^1 下一个平板的象(b)

沿 $\tilde{z}_1^0$ 方向，它的阶数为

$$O(\exp\{-\gamma_1 T_{2l}\}),\quad l\to+\infty \tag{6.6.58}$$

如图 6.6.1 所示，$P_0^1(S_l)$和$(\tilde{x}_1^1,\tilde{y}_1^1)$平面相交成环状，宽度具有的阶为

$$O\left(\exp\left\{-\frac{3}{2}\alpha_1 T_{2l}\right\}\right),\quad l\to+\infty \tag{6.6.59}$$

其中半径的阶数为

$$O(\exp\{-\alpha_1 T_{2l}\}),\quad l\to+\infty \tag{6.6.60}$$

在环上，我们标记 $P_0^1(p_l^+)$和 $P_0^1(p_l^-)$的坐标位置。

定义 6.6.11　设 $\bar{S}_l$ 为 S_l 在$\bar{\Sigma}_0$ 中闭包，S_l 的稳定边界定义为

$$\partial_s^+ S_l \equiv\left\{q\in\tilde{S}_l \mid \tilde{x}_1^0(q)=+\eta\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\right]\right\}$$

$$\partial_s^- S_l \equiv\left\{q\in\tilde{S}_l \mid \tilde{x}_1^0(q)=-\eta\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\right]\right\}$$

$$\partial_s^\sigma S_l \equiv\{q\in\tilde{S}_l\sigma(q)=\eta,\sigma=\sqrt{(x_j^0)^2+(y_j^0)^2},$$

$$(2\leqslant j\leqslant m_1)\text{ 或 }\sigma=z_k^0(n_1<k\leqslant n)\}$$

取有 S_l 稳定边界分量的并集称之为 S_l 的稳定边界，标以$\partial_s S_l$。类似地，S_l 不稳定边界分量定义为

$$\partial_u^+ S_l \equiv\left\{q\in\tilde{S}_l \mid \tilde{z}_1^0(q)=\eta\exp\left[-\gamma_1\left(T_{2l}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$\partial_u^- S_l \equiv\left\{q\in\tilde{S}_l \mid \tilde{z}_1^0(q)=\eta\exp\left[-\gamma_1\left(T_{2(l+1)}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$\partial_u^\sigma S_l =\left\{q\in\tilde{S}_l \mid |\sigma(p_0^1(q))|=\eta\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\right],\right.$$

$$\text{对某 }\sigma=\sqrt{(x_j^0)^2+(y_j^0)^2}\quad(m_1<j\leqslant m)$$

$$\left.\text{或 }\sigma=z_k^0\quad(1\leqslant k<n_1)\right\}$$

S_l不稳定边界分量的所有并集称为 S_l 的不稳定边界，记$\partial_u S_l$。$P_0^1(S_l)$和 $P(S_l)$的稳定不稳定边界分别记为

$$\partial_\tau P_0^1(S_l)\equiv P_0^1(\partial_\tau S_l)\quad,\quad\tau=s,u$$

$$\partial_\tau P(S_l)\equiv P(\partial_\tau S_l)\quad,\quad\tau=s,u$$

6.6.7.3　$P(S_l)$

P_1^0 的 Poincaré 映照 P_1^0 具有表示式(6.6.20)，在 P_1^0 的线性近似下，在 Σ_1 上的标架

$$(\tilde{x}_1^1,\tilde{y}_1^1,\xi_s^1,\xi_u^1)$$

映照为在 Σ_0 上，以 q^+ 为原点的仿射标架

$$(\bar{x}_1^1,\bar{y}_1^1,\bar{\xi}_s^1,\bar{\xi}_u^1) \tag{6.6.61}$$

其中 $\bar{x}_1^1-\bar{y}_1^1$ 平面是平面 $\tilde{x}_1^1-\tilde{y}_1^1$ 在 P_1^0 的线性近似下的像。注意到 Σ_0 在笛氏坐标架下为

$$(\tilde{x}_1^0, \tilde{z}_1^0, \xi_s^0, \xi_u^0) \tag{6.6.62}$$

也具有原点 q^+。因 P_1^0 为微分同胚，P_1^0 的式(6.6.20)表示可写为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{y}^0 \\ \tilde{z}^0 \end{bmatrix} = (A + \Gamma_1)\begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{y}^1 \\ \tilde{z}^1 \end{bmatrix} \tag{6.6.63}$$

$$\begin{bmatrix} \delta\tilde{x}^0 \\ \delta\tilde{y}^0 \\ \delta\tilde{z}^0 \end{bmatrix} = (A + \Gamma_2)\begin{bmatrix} \delta\tilde{x}^1 \\ \delta\tilde{y}^1 \\ \delta\tilde{z}^1 \end{bmatrix} \tag{6.6.64}$$

其中

$$\Gamma_1\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{y}^1 \\ \tilde{z}^1 \end{pmatrix} = B$$

因此当 $\tilde{x}^1 \to 0, \tilde{y}^1 \to 0, \tilde{z}^1 \to 0$ 时，$\Gamma_1 \to 0$。基于式(6.6.63)、式(6.6.64)，能近似 $P(S_l)$ 为 $A(P_0^1(S_l))$。$P(S_l)$ 具有乘积表示，如图 6.6.2 所示。

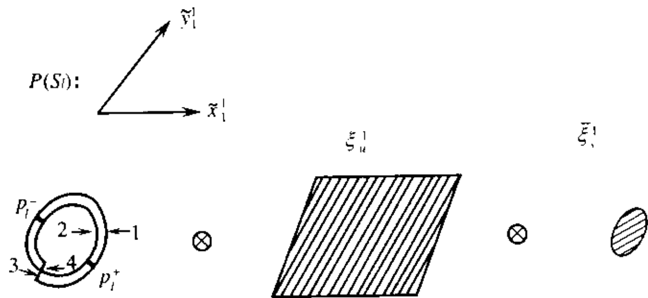


图 6.6.2　在映射 P 之下一个平板(slab)的像

$d_1^s(P(S_l))$ 类似于 $d_1^s(P_0^1(S_l))$ 的定义

$$d_1^s(P(S_l)) \approx O(\exp\{-\alpha_1 T_{2l}\}), \quad l \to +\infty \tag{6.6.65}$$

因用线性近似逼近 P_1^0，平面 $\tilde{x}_1^1 - \tilde{y}_1^1$ 为这个线性变换下的平面 $\tilde{x}_1^1 - \tilde{y}_1^1$ 的象，由 $\tilde{x}_1^1 - \tilde{y}_1^1$ 平面和 $p_1^1(S_l)$ 相交的环映照于 $\tilde{x}_1^1 - \tilde{y}_1^1$ 平面上的环。这个环具有宽度，其阶数为

$$O\left(\exp\left\{-\frac{3}{2}\alpha_1 T_{2l}\right\}\right), \quad l \to +\infty \tag{6.6.66}$$

其半径的阶数为

$$O(\exp\{-\alpha_1 T_{2l}\}), \quad l \to +\infty \tag{6.6.67}$$

6.6.7.4　切片(Slices)的定义

我们定义 Slabs 的 Slices。

定义 6.6.12　在 S_l 中的一个稳定切片(Slice) V 为 S_l 的一个子集，是通过 $\partial_s S_l$ 的同胚运动和变形得到的，其中 $\partial_s S_l$ 的部分 $\partial_s S_l \cap \partial_u S_l$ 仅在 $\partial_u S_l$ 中变形和运动，通过这种 $\partial_s S_l$ 的变形和运动得到的边界称为 V 的稳定边界，它表以 $\partial_s V$。V 的其他边界称为不稳定边界，表以 $\partial_u V$，S_l 的不稳定 Slices 标以 H 可类似定义。由定义，

$$\partial_u V \subset \partial_u S_l$$
$$\partial_s H \subset \partial_s S_l$$

在 Σ_0 上的坐标

$$(\tilde{x}_1^0, \tilde{z}_1^0, \xi_s^0, \xi_u^0)$$

中，令 G 表示 S_l 中的 $(2m_1 - 1 + n - n_1)$ 维超平面，满足条件

$$\{\tilde{z}_1^0 = \text{const}, \xi_u^0 = \text{const}\}$$

一般地，$G \cap V$ 由几个单连通区域所组成

$$G \cap V = \bigcup_{k=1}^{K} G_k$$

如图 6.6.3 所示。$G \cap V$ 在 S_l 中的组成为 $(2m_1 - 1 + n - n_1)$ 维超平面和稳定 Slice 的交面。

定义 6.6.13　稳定 Slice V 的直径定义为

$$d(V) \equiv \sup_G\{\sup_k\{\sup_{q_1, q_2 \in G_k}\{|\tilde{x}_1^0(q_1) - \tilde{x}_1^0(q_2)| + \|\xi_s^0(q_1) - \xi_s^0(q_2)\|\}\}\}$$

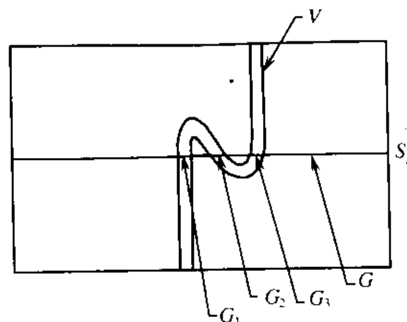


图 6.6.3 $G\cap V$ 的分图，S_l 里一个$(2m_1-1+n-n_1)$维超平面和一个稳定切片相交

不稳定 Slice H 的直径也可类似定义。

6.6.7.5 Generic 相交和马蹄

在平面$(\tilde{x}_1^1,\tilde{y}_1^1)$上引入极坐标$(\tilde{r}_1^1,\tilde{\theta}_1^1)$，$P_0^1$ 限制在此平面上有如下表示

$$\tilde{r}_1^1 = e^{-\alpha_1 t_*}(x_1^+ + \tilde{x}_1^0)$$

$$\tilde{\theta}_1^1 = \beta_1 t_*$$

由定理 6.6.8，不动点从 Σ_0 到 Σ_1 的飞行时间为

$$T_l = \frac{1}{\beta_1}(l\pi - \varphi) + O(1), \qquad l\to+\infty$$

推出，对于任意小的正数 θ_0，存在 l_1，使得对任何 $l\geqslant l_1$ 有

$$\tilde{\theta}_1^1(P_0^1(p_{l_1}^+)) - \theta_0 \leqslant \tilde{\theta}_1^1(P_0^1(p_{l_1}^+)) \leqslant$$

$$\tilde{\theta}_1^1(p_0^1(p_{l_1}^+)) + \theta_0(S_+) \tag{6.6.68}$$

$$\tilde{\theta}_1^1(P_0^1(p_{l_1}^-)) - \theta_0 \leqslant \tilde{\theta}_1^1(P_0^1(p_l^-)) \leqslant$$

$$\tilde{\theta}_1^1(P_0^1(p_{l_1}^-)) + \theta_0(S_-) \tag{6.6.69}$$

即$(\tilde{x}_1^1,\tilde{y}_1^1)$平面上 $P_0^1(p_l^+)$ 和 $P_0^1(p_l^-)$ 为$(\tilde{x}_1^1,\tilde{y}_1^1)$平面夹角为 $2\theta_0$ 的两个扇形 S_+ 和 S_-，如图 6.6.4 所示。

P_1^0 限制在$(\tilde{x}_1^1,\tilde{y}_1^1)$平面上，扇形 S_+ 和 S_- 映照为两个扇形

$$\bar{S}_+ = P_1^0(S_+) \tag{6.6.70}$$

$$\bar{S}_- = P_1^0(S_-) \tag{6.6.71}$$

在$(\bar{x}_1^1,y_1^1)$平面上，如图 6.6.5 所示。

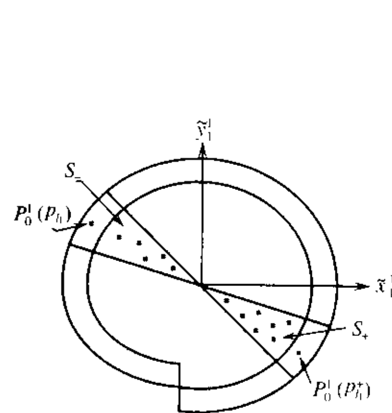


图 6.6.4 在$(\tilde{x}_1^1,\tilde{y}_1^1)$平面上，$P_0^1(p_l^+)$ 和 $P_0^1(p_l^-)$ 的组成在$(\tilde{x}_1^1,\tilde{y}_1^1)$上的两个扇形 S_+ 和 S_-，其夹角为 2θ

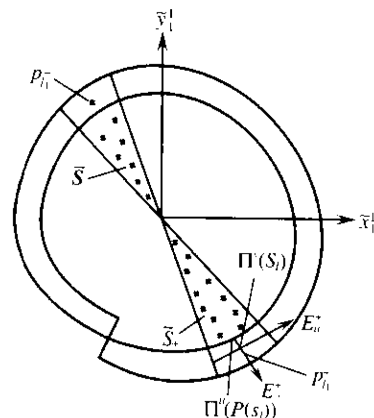


图 6.6.5 在$(\bar{x}_1^1,\bar{y}_1^1)$平面上，扇形 S_+ 和 S_- 在 Poincaré 映射下的像

图 6.6.5 为 Poincaré 映照限制于$(\bar{x}_1^1,\bar{y}_1^1)$平面上。扇形 S_+、S_-的像，如图 6.6.6 所示，边界(1,2)包含了 $\bar{S}_+$ 和 $\bar{S}_-$ 的边界。对任何 $l\geqslant l_1$，在平面$(\bar{x}_1^1,\bar{y}_1^1)$上引入曲线坐标$(\bar{e}_u,\bar{e}_s)$使得

$$\{\bar{e}_u = 0\}, \quad \{\bar{e}_u = b_u(\text{const})\}$$

$$\{\bar{e}_s = 0\}, \quad \{\bar{e}_s = b_s(\text{const})\}$$

分别对应于 $P(S_l)$限制在平面$(\bar{x}_1^1,\bar{y}_1^1)$上的边界 3,4,1,2。

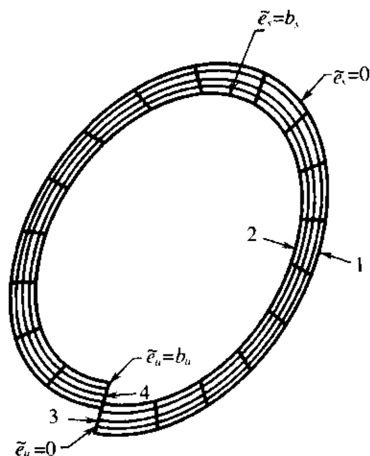


图 6.6.6 在$(\dot{x}_1^1,\dot{y}_1^1)$平面上的曲线坐标$(\tilde{e}_u,\tilde{e}_s)$

定义 6.6.14 定义 $P(S_l)$的两个子集如下：

$$\bar{S}_l^+ \equiv \{q \in P(S_l) \mid (\bar{e}_u,\bar{e}_s)(q) \in \bar{S}_+\}$$

$$\bar{S}_l^- \equiv \{q \in P(S_l) \mid (\bar{e}_u,\bar{e}_s)(q) \in \bar{S}_-\}$$

令(E_u^+,E_s^+)为切向量

$$E_u^+ \equiv T_{p_{l_1}} + e_u^-, \qquad E_s^+ \equiv T_{p_{l_1}} + e_s^-$$

作一般假设

$$(\boldsymbol{G5a}) \quad \mathrm{span}\{e_{\bar{x}_1^0},E_u^+,e_{\xi_s^0},e_{\xi_u^1}\} = \Sigma_0$$

$$(\boldsymbol{G5b}) \quad \mathrm{span}\{e_{\bar{x}_1^0},E_s^+,e_{\xi_s^0},e_{\xi_u^1}\} = \Sigma_0$$

其中 $l_{x_1^0},l_{\xi_u^1}$等表示相应于坐标方向的单位向量。这个假设说，例如 E_u^+ 不平行于由$\{l_{x_1^0},l_{\xi_s^0}\}$所张的余维$[2(m-m_1)+n_1-1]$的超平面，则

$$\{l_{x_1^0},E_u^+,l_{\xi_s^0}\}$$

张成余维$[2(m-m_1)+n_1-1]$的超平面。类似，$(G5b)$也可作类似的解释。

现讨论在 p_l^+ 上，在坐标$\{\bar{x}_1^0,\bar{e}_u,\xi_s^0,\bar{\xi}_u^1\}$中的交$P(S_l)\cap S_l$。

定义 6.6.15 在$\bar{S}_l^+$和$\bar{S}_l^-$上定义S_l和$P(S_l)$的直径如下：

$$d^u(S_l) \equiv \sup_C\{|\bar{l}_u(q_1)-\bar{l}_u(q_2)|+\|\bar{\xi}_u^1(q_1)-\bar{\xi}_u^1(q_2)\|\}$$

其中

$$C \equiv \{q_1,q_2 \in S_l:\bar{x}_1^0(q_1)=\bar{x}_1^0(q_2),\xi_s^0(q_1)=\xi_s^0(q_2)\}$$

$$d^s(P(S_l)) \equiv \sup_C\{|\bar{x}_1^0(q_1)-\bar{x}_1^0(q_2)|+\|\xi_s^0(q_1)-\xi_s^0(q_2)\|\}$$

这里

$$C \equiv \{q_1,q_2 \in \bar{S}_l^+ \subset P(S_l);\bar{l}_u(q_1)=\bar{l}_u(q_2),\ \bar{\xi}_u^1(q_1)=\bar{\xi}_u^1(q_2)\}$$

由假设$(G5a)$和方程(6.6.55)、式(6.6.58)得

$$d^u(S_l) \approx O(\exp\{-\gamma_1 T_{2l}\}), \quad l\to+\infty \tag{6.6.72}$$

由假设$(G5a)$和方程(6.6.65)得

$$d^s(P(S_l)) \equiv \{q \in S_l \mid \bar{l}_u(q)=\bar{l}_u(p_l^+),\bar{\xi}_u^1(q)=\bar{\xi}_u(p_l^+)\} \tag{6.6.73}$$

$$\Pi^u(P(S_l)) \equiv \{q \in S_l^+ \subset P(S_l) \mid \bar{x}_1^0(q)=\bar{x}_1^0(p_l^+),\xi_s^0(q)=\xi_s^0(p_l^+)\}$$

在 $\Pi^s(S_l)$中 p_l^+ 的邻域内，存在阶

$$O\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\right\}\right), \quad l\to+\infty \tag{6.6.74}$$

在 $\Pi^u(P(S_l))$中 p_l^+ 的邻域内，存在阶

$$O(\exp\{-\alpha_1 T_{2l}\}), \quad l\to+\infty \tag{6.6.75}$$

从式(6.6.1)有

$$\alpha_1 < \gamma_1 \tag{6.6.76}$$

我们可证明如下命题：

命题 6.6.16 在假设($G5a$)下，存在充分大的 l_0，使得对一切 $l \geqslant l_0$，$P(S_l)$和 S_l 相交于二个不相连的部分 V_l^+ 和 V_l^-，V_l^+ 和 V_l^- 都和$\partial_u^+ S_l$ 和$\partial_u^- S_l$ 相交，但和$\partial_s S_l$ 不相交。更进一步，V_l^+ 和 V_l^- 为 S_l 中的稳定 Slices，具有

$$\partial_s V_l^+ \subset \partial_s P(S_l) \tag{6.6.77}$$

$$\partial_s V_l^- \subset \partial_s P(S_l) \tag{6.6.78}$$

见图 6.6.7。

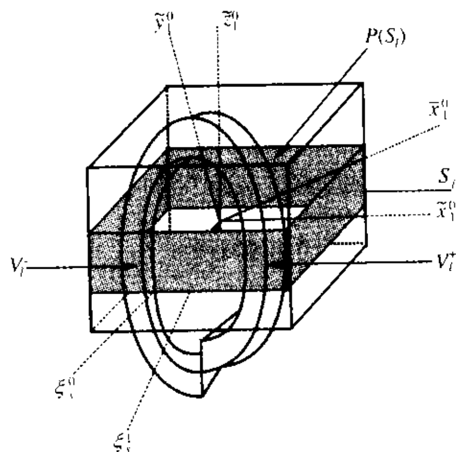


图 6.6.7 $P(S_1)$和 S_1 相交

证明：先证 V_l^+ 和 V_l^- 不相连。反证法：设它们相连，则存在一条曲线 g 连接 p_l^+ 和 p_l^-，使得

$$g \subset S_l \tag{6.6.79}$$

$$g \subset P(S_l) \tag{6.6.80}$$

在相同坐标$\{\bar{x}_1^0, \bar{e}_u, \xi_s^0, \bar{\xi}_u^1\}$下，定义

$$w(g) \equiv \sup_{q_1, q_2 \in g} \{|\bar{e}_u(q_1) - \bar{e}_u(q_2)|\}$$

和式(6.6.79)，可知存在常数 D_1，使得

$$w(g) < D_1 \exp\{-\gamma_1 T_{2l}\}$$

由式(6.6.80)和 p_l^+, p_l^- 的定义，可知存在常数 D_2，使得

$$W(g) > D_2 \exp\{-\alpha_1 T_{2l}\}$$

由式(6.6.76)，对 l 充分大，这是矛盾的，因此 V_l^+ 和 V_l^- 是不相连的。

当 l 充分大，从式(6.6.73)和 S_l 的定义推得 V_l^+ 和 V_l^- 不和 $\partial_s S_l$ 相交。类似地，当 l 充分大，从式(6.6.72)、式(6.6.74)～式(6.6.76)和 S_l 的定义可知 V_l^+ 和 V_l^- 和$\partial_u^+ S_l, \partial_u^- S_l$ 相交。从定义 6.6.11 和 V_l^+, V_l^- 与$\partial_u^+ S_l, \partial_u^- S_l$ 相交的事实，可得式(6.6.77)、式(6.6.78)。

现令

$$H_l^+ = P^{-1}(V_l^+)$$

$$H_l^- = P^{-1}(V_l^-)$$

从式(6.6.77)和式(6.6.78)及定义式(6.6.12)可知 H_l^+, H_l^- 为不稳定 Slices，H_l^+ 和 H_l^- 的不稳定边界为

$$\partial_u H_l^+ = P^{-1}(\partial_u V_l^+) \tag{6.6.81}$$

$$\partial_u H_l^- = P^{-1}(\partial_u V_l^-) \tag{6.6.82}$$

总之对 l 充分大，在每个 S_l 上，我们有两个不稳定 Slices：H_l^+ 和 H_l^-

和两个稳定 Slices：V_l^+ 和 V_l^- 使得

$$\begin{cases} V_l^\sigma = P(H_l^\sigma) \\ \partial_s V_l^\sigma = P(\partial_s H_l^\sigma) \\ \partial_u V_l^\sigma = P(\partial_u H_l^\sigma), \quad \sigma = +, - \end{cases} \tag{6.6.83}$$

6.6.8 符号动力系统

这一节我们在 S_l 上构造 Cantor 集 Λ，且证明 Poincaré 映照 P

限制在 Λ 上拓扑共轭于两个符号 0 和 1 的位移自同构。

6.6.8.1　位移自同构

设 Ξ 为由两个元素组成的无穷序列的集合

$$a = (\cdots a_{-2}a_{-1}a_0, a_1a_2\cdots)$$

其中 $a_k = 0$ 或 $1, k\in Z$，在 Ξ 上引入一个拓扑，取

$$a^* = (\cdots a_{-2}^*a_{-1}^*a_0^*, a_1^*a_2^*\cdots)$$

的邻域基，集合

$$N_j = \{a\in \Xi \mid a_k = a_k^*, (\mid k\mid < j)\},\quad j = 1,2,\cdots$$

使 Ξ 成为一个拓扑空间，位移自同构 χ 在 Ξ 上定义为

$$b \equiv \chi(a),\qquad b_k = a_{k+1}$$

显然，位移自同构具有可数的无穷多的周期轨道，不可数无穷多的非周期轨道，和一个稠的轨域，也显示出对初始的敏感依赖性等混沌的特征。

6.6.8.2　Conley-Moser 条件

令

$$H_l^+, H_l^-, V_l^+, V_l^-$$

分别用

$$H_0, H_1, V_0, V_1$$

表示。则有 Conley-Moser 条件（Ⅰ）：

$$\begin{cases} V_j = P(H_j), \\ \partial_s V_j = P(\partial_s H_j), & j = 0,1 \\ \partial_u V_j = P(\partial_u H_j), \end{cases}$$

Conley-Moser 条件（Ⅱ）：存在常数 $0<\nu<1$，使得对任何稳定切片 $V\subset V_j,(j=0,1)$

$$d(\tilde{V}) \leqslant \nu d(V)$$

其中

$$\tilde{V} = P(V\cap H_k),\ k = 0,1$$

对任何不稳定切片 $H\subset H_j(j=0,1)$，有

$$d(\tilde{H}) \leqslant \nu d(H)$$

其中

$$\tilde{H} = P^{-1}(H\cap V_k),\ k = 0,1$$

附注：在 Conley-Moser 条件（Ⅰ）中，我们省去 Slice 边界的 Lip 条件，对我们的情况，稳定 Slice

$$V\subset V_j,\ j = 0,1$$

和不稳定 Slice

$$H\subset H_k,\ k = 0,1$$

可能相交多于一个点，此时我们仅需选取其中之一即可。

上述 Conley-Moser 条件（Ⅰ）将在后面加以验证。现讨论 Conley-Moser 条件（Ⅱ），由 P_0^1 的表达式（6.6.17）和 P_0^1 的表示式（6.6.63）、式（6.6.64），我们有

$$d(\tilde{V}) \leqslant \nu_1 d(V)$$

其中

$$\nu_1 \approx O(\exp\{-\alpha_1 T_{2l}\}),\quad l\to+\infty \text{ 时}$$

$$d(\tilde{H}) \leqslant \nu_2 d(H)$$

其中

$$\nu_2 \approx O(\exp\{-r_1 T_{2l}\}),\quad l\to+\infty \text{ 时}$$

引理 6.6.17　如

$$\cdots\subset H^{(k)}\subset\cdots\subset H^{(2)}\subset H^{(1)}$$

为不稳定 Slices 的无穷序列，且

$$d(H^k)\to 0,\quad k\to+\infty \text{ 时}$$

则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} H^{(k)} \equiv H^{(\infty)}$$

为$(2m_1-1+n-n_1)$维连通的曲面，且

$$\partial H^{\infty} \subset \partial_s H^{(1)}$$

对于稳定 Slices 有类似结论。

证明：由定义，$\partial_s H^{(k)} \subset \partial_s H^{(1)}$，$\forall k$，因此$\partial H^{(\infty)} \subset \partial_s H^{(1)}$。$H^{(\infty)}$的维数来自这样的事实，当 $k \to \infty$ 时，推出 $2(m-m_1)+n$ 不稳定维数缩小为零。

6.6.8.3 拓扑共轭

令

$$a = (\cdots a_{-2} a_{-1} a_0, a_1 a_2 \cdots)$$

为 Ξ 中的任何元素，归纳地定义($k \geqslant 2$)稳定 Slices

$$V_{a_0 a_{-1}} = P(H_{a_{-1}}) \cap H_{a_0}$$

$$V_{a_0 a_{-1} \cdots a_{-k}} = P(V_{a_{-1} \cdots a_{-k}}) \cap H_{a_0}$$

由 Conley-Moser 条件(Ⅱ)，

$$d(V_{a_0 a_{-1} \cdots a_{-k}}) \leqslant \nu d(V_{a_0 a_{-1} \cdots a_{-k}}) \leqslant \cdots \leqslant \nu_1^{k-1} d(V_{a_0 a_{-1}})$$

由引理 6.6.17，

$$V(a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{a_0 a_{-1} \cdots a_{-k}}$$

定义一个余维$(2m_1-1+n-n_1)$的连通曲面，且

$$\partial V(a) \subset \partial_u S_l \tag{6.6.84}$$

类似地，归纳定义($k \geqslant 1$)不稳定 Slices，

$$H_{a_0 a_1} = P^{-1}(H_{a_1} \cap V_{a_0})$$

$$H_{a_0 a_1} \cdots a_k = P^{-1}(H_{a_1 \cdots a_k} \cap V_{a_0})$$

由 Conley-Moser 条件(Ⅱ)

$$d(H_{a_0 a_1 \cdots a_k}) \leqslant \nu_2 d(H_{a_0 a_1} \cdots a_{k-1}) \leqslant \cdots \leqslant \nu_2^k d(H_{a_0})$$

由引理 6.6.17

$$H(a) = \bigcap_{k=0}^{\infty} H_{a_0 a_1 \cdots a_k}$$

定义一个$(2m_1-1+n-n_1)$维连通曲面，且

$$\partial H(a) \subset \partial_s S_l \tag{6.6.85}$$

由式(6.6.84)和式(6.6.85)知，$H(a)$与 $V(a)$的维数由

$$V(a) \cap H(a) \neq \phi$$

的点组成。令

$$p \in V(a) \cap H(a)$$

为交集的任意点，现定义映照

$$\phi : \Xi \longrightarrow S_l$$

$$\phi(a) = p$$

由上面的构造

$$P(p) = \phi(\chi(a))$$

即

$$P \circ \phi = \phi \circ \chi$$

令

$$\Lambda \equiv \phi(\Xi)$$

则 Λ 为在 P 下 S_l 的紧不变 Cantor 子集。更进一步，ϕ 为Ξ 到Λ 的微分同胚，因此有定理：

定理 6.6.18 存在 S_l 的一个紧不变 Cantor 子集，使得 P 限制在 Λ 上为拓扑共轭于具有两个符号 0 和 1 的位移自同构 χ，即存在一个微分同胚

$$\phi : \Xi \longrightarrow \Lambda$$

使得如下图形可交换

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \xrightarrow{\phi} & \Lambda \\ \chi & & P \\ \Xi & \xrightarrow[\phi]{} & \Lambda \end{array} \tag{6.6.86}$$

6.7 应用于离散非线性 Schrödinger 方程系统

这一节我们将 6.6 节中的理论应用到离散非线性 Schrödinger 方程系统。

6.7.1 变换式(6.1.3)到式(6.6.1)形式

离散 NLS 系统式(6.1.3)的相空间能定义如下：

$$S \equiv \left\{ \boldsymbol{q} \equiv \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} \middle| r = -\bar{q}, q = (q_0, q_1, \cdots, q_{N-1})^{\mathrm{T}}, q_{n+N} = q_n, q_{N-n} = q_n \right\}$$

容易验证式(6.1.3)具有鞍点型的平衡点。关于 q_ε 线性化式(6.1.3)的特征值为

$$\Omega_0^{\pm} = \pm 4\varepsilon^{1/2} c^{1/2} \omega^{3/2} + o(\varepsilon) \tag{6.7.1}$$

$$\Omega_1^{\pm} = \pm \alpha \sqrt{(1-\cos^2 k_1)(1/\mu^2 + \omega^2)(\omega^2 - N^2 \tan^2(\pi/N))} + O(\varepsilon) \tag{6.7.2}$$

$$\Omega_j^{\pm} = -\varepsilon[\alpha + 2\beta h^{-2}(1-\cos k_j)] \pm 2i\left|\sqrt{|E_j F_j|}\right|, \quad j = 2, \cdots, M \tag{6.7.3}$$

其中 $k_j = 2j\pi/N, c, E_j, F_j$ 为常数。从这些公式，当 ε 充分小时有

$$0 < \Omega_0^- < \Omega_1^+$$

$$0 < -\mathrm{Re}\{\Omega_2^+\} = -\mathrm{Re}\{\Omega_2^-\} < \cdots < -\mathrm{Re}\{\Omega_m^+\} = -\mathrm{Re}\{\Omega_m^-\} < -\Omega_0^- < -\Omega_1^-$$

因此，Ω_0^+ 为最弱的增长率，$-\mathrm{Re}\{\Omega_2^+\}$ 为最弱的衰减率，也有

$$-\mathrm{Re}\{\Omega_2^+\} < \Omega_0^+ \tag{6.7.4}$$

因此线性化方程组能变为实的 Jordan 典型形式，我们能变换在式(6.1.3)中的 q_ε 为原点，表示式(6.1.3)的坐标使它的线性部分为实的 Jordan 典型形式，此时式(6.1.3)能归结为方程组(6.6.1)的形式。

$$\begin{cases} \dot{x}_j = -\alpha_j x_j - \beta_j y_j + x_j(x, y, z), \\ \dot{y}_j = \beta_j x_j - \alpha_j y_j + y_j(x, y, z), \quad j = 1, \cdots, M-1; k = 1, \cdots, 4 \\ \dot{z}_k = \delta_k \gamma_k z_k + z_k(x, y, z), \end{cases} \tag{6.7.5}$$

其中

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 1,2 \\ -1, & k = 3,4 \end{cases}$$

$$x \equiv (x_1, \cdots, x_{M-1})^{\mathrm{T}}$$

$$y \equiv (y_1, \cdots, y_{M-1})^{\mathrm{T}}$$

$$z \equiv (z_1, \cdots, z_4)^{\mathrm{T}}$$

$$x_j(0,0,0) = y_j(0,0,0) = 0$$

$$\mathrm{grad}\, x_j(0,0,0) = \mathrm{grad}(y_j(0,0,0) = 0, \quad j = 1, \cdots, M-1$$

$$z_k(0,0,0) = \mathrm{grad} z_k(0,0,0) = 0, \quad k = 1, \cdots, 4$$

$$\alpha_j = [\alpha + 2\beta h^{-2}(1 - \cos k_{j+1})]$$

$$\beta = 2\left|\sqrt{|E_{j+1} F_{j+1}|}\right|, \quad j = 1, \cdots, M-1$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = 4\varepsilon^{1/2} c^{1/2} \omega^{3/2} + O(\varepsilon)$$

$$\gamma_2 = \gamma_4 = 2[(1-\cos^2 k_1)(1/\mu^2 + \omega^2) \cdot (\omega^2 - N^2 \tan^2(\pi/N))]^{1/2} + O(\varepsilon)$$

对于式(6.1.3)构造 Smale 马蹄的问题已化为方程组(6.7.5)的问题，有以下两个事实：

(1) 方程组(6.7.5)具有一同宿轨道 h，渐近于

$$(x,y,z)=(0,0,0)$$

(2) 最小排斥率 γ_1 大于最小吸引率 α_1 问题为(6.6.11)的特殊情况

$$m=m_1=M-1,\quad n_1=2,\quad n=4$$

因此在一般假设($G1$)~($G5$)下,同宿轨道 h 给出 Smale 马蹄,我们必须讨论一般假设。

6.7.2 Generic 假设

"generic"假设($G2$)、($G4$)和($G5$)仍是假设,我们不知道解析上如何验证它们,对于我们的系统,数值上的检验是可能的。

从 6.1 节~6.6 节,我们可得如下定理。

定理 6.7.1 对任何 $N(7\leqslant N<\infty)$,存在正数 ε_0 使得对任何 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$存在 Σ_N 中余维 1 的子流形 E_ε,这个子流形 E_ε 是在超平面$\beta=\kappa\alpha$ 的 $O(\varepsilon^{\upsilon})$邻域,其中 $\kappa=\kappa(\omega,N)$,$\upsilon=\dfrac{1}{2}-\delta_0$,$0<\delta_0\ll\dfrac{1}{2}$。对于参数($\omega,\alpha,\beta,T$)在 Σ_ε 上,存在式(6.1.3)的同宿轨道,它渐近于不动点 q_ε。这里

$$\Sigma_N(N\geqslant 7)=\left\{(\omega,\alpha,\beta,T)\mid\omega\in\left(N\tan\frac{\pi}{N},N\tan\frac{2\pi}{N}\right),\right.$$
$$T\in(0,1),\alpha\in(0,\alpha_0),\beta\in(0,\beta_0),$$
$$\left.\alpha_0,\beta_0\text{ 为任何正数 }<\infty\right\}$$

附注:当 $3\leqslant N\leqslant 6$,κ 为负的,α、β 由于耗散性是正的,关系$\beta=\kappa\alpha$破坏了同宿轨道的存在性。而当 $N\geqslant 7$ 时,存在一对同宿轨道,它渐近趋于不动点 q_ε。

($G1$)实际上是在参数($\varepsilon,\omega,\alpha,\beta,\Gamma$)$\in E_\varepsilon$ 中选取适当的值的问题,非共振条件不是一个严格的限制,从定理 6.7.1 知,存在同宿轨道在参数空间余维 1 的曲面上,每个非共振条件在参数空间中定义余维 1 的曲面,存在全测度的集合非共振条件是成立的,用Conley-Moser 逼近方法构造的 Smale 马蹄是结构稳定的,它对于非共振条件破裂的零测度集合保持不变,而非线性共振条件成立的全测度的集合是稠密的。

($G3$)是对的,由 Melnikov 原理,对任何适当固定的($\varepsilon,\omega,\alpha,\beta,\Gamma$),在同宿截面 Σ 上的距离

$$d\equiv\mathrm{Dist}\{W^u(q_\varepsilon),W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)\}\big|_\Sigma=d(\gamma)$$

其中(γ,t)为 $W^u(q_\varepsilon)$的参数化,存在 γ_0 使得

$$d(\gamma_0)=0,\quad d'(\gamma_0)\neq 0$$

对

$$(\varepsilon,\omega,\alpha,\beta,\Gamma)\text{ 在 }E_\varepsilon\text{ 上}$$

对任何 $q\in h$

$$\dim\{T_qW^u(q_\varepsilon)\cap T_qW^s(\mathscr{M}_q)\}=1$$

但

$$W^s(q_\varepsilon)\subset W^s(\mathscr{M}_\varepsilon)$$

因此($G3$)成立。

6.7.3 由离散非线性 Schrödinger 方程系统一对同宿轨道产生的 Smale 马蹄和混沌

现在我们来说明马蹄如何能从靠近一对对称同宿轨道进行构造,对于离散 NLS 方程(6.1.3),常数 N 为偶的,且 $N>7$,则存在一对对称同宿轨道渐近于不动点 q_ε,可以从这个事实看出,如$q_n=f(n,t)$为式(6.1.3)的解,则 $q_n=f(n+N/2,t)$也是式(6.1.3)的解,方程组(6.1.3)关于对称群

$$\hat{G}\equiv\{1,\sigma\}\tag{6.7.6}$$

是等价的,其中 $\sigma\circ f(n,t)=f(n+N/2,t)$,即 σ 为半周期交换,$\sigma^{-1}=\sigma$,令 I 表示恒等式。这种坐标用于式(6.7.5)有

$$\begin{cases}\sigma\circ\{x_j,y_j\}=\{(-I)^{j+1}x_j,(-1)^{j+1}y_j\},\\ \qquad j=1,2,\cdots,M-1\\ \sigma\circ z_k=(-I)^{k+1}z_k,\quad k=1,\cdots,4\end{cases}\tag{6.7.7}$$

方程组(6.7.5)和方程组(6.1.3)是等价的。方程组(6.7.5)关于对称群也是等价的。令 $\hat{h}_1$ 为同宿轨道(渐近于 q_ε),则 $\hat{h}_2=\sigma\circ\hat{h}_1$ 为另一条同宿轨道也是渐近趋于 q_ε,因此($\hat{h}_1,\hat{h}_2$)构成一对对称同宿轨道。

6.7.3.1 光滑规范变换归结的等价性

在6.6节中我们曾用一个光滑规范变换在原点附近归结为线性方程组,但对此线性方程组是否对于对称阵 $\hat{G}$ 是等价的是不知道的,这里我们将加以说明。

首先,令

$$R:(x,y,z)\longrightarrow(x',y',z')$$

为 C^2 微分同胚。将方程组(6.7.5)在(0,0,0)的邻域变成线性典范形式,R 在(0,0,0)外为恒等变换,且

$$R(0,0,0)=(0,0,0)$$

$$\text{grad } R(0,0,0)=\text{恒等映照}$$

更重要的是,在$(x',y',z')=(0,0,0)$的小邻域内,方程组(6.7.5)能归结为线性方程组

$$\begin{cases}\dot{x}'_j=-\alpha_j x'_j-\beta_j y'_j,\\ \dot{y}'_j=\beta_j x'_j-\alpha_j y'_j,\quad j=1,\cdots,M-1;k=1,\cdots,4\\ \dot{z}'_k=\delta_k\cdot\gamma_k\cdot z'_j,\end{cases}\tag{6.7.8}$$

其中

$$\delta_k=\begin{cases}1, & k=1,2\\ -1, & k=3,4\end{cases}$$

在整个相空间 S 中,方程组(6.7.5)变换为

$$\begin{cases}\dot{x}'_j=-\alpha_j x'_j-\beta_j y'_j+X'_j(x',y',z'),\\ \dot{y}'_j=\beta_j x'_j-\alpha_j y'_j+Y'_j(x',y',z'),\quad j=1,\cdots,M-1;k=1,\cdots,4\\ \dot{z}'_k=\delta_k\gamma_k z'_k+Z'_k(x',y',z')\end{cases}\tag{6.7.9}$$

其中

$$\delta_k=\begin{cases}1, & k=1,2\\ -1, & k=3,4\end{cases}$$

$$x'\equiv(x'_1,\cdots,x'_{M-1})^{\mathrm{T}}$$

$$y'\equiv(y'_1,\cdots,y'_{M-1})^{\mathrm{T}}$$

$$z'\equiv(z'_1,\cdots,z'_4)^{\mathrm{T}}$$

且 X'_j,Y'_j,Z'_k 在 Ω 内恒为0。

我们不知道方程组(6.7.9)对于对称群 $\hat{G}$ 式(6.7.6)是否等价,令 R_σ 表示 R 在群 $\hat{G}$ 上的平均:

$$\begin{aligned}&R_\sigma=\frac{1}{2}(R+\sigma^{-1}R\sigma)\\ &R_\sigma:(x,y,z)\to(x'',y'',z'')\end{aligned}\tag{6.7.10}$$

R_σ 也是 C^2 微分同胚,它在(0,0,0)邻域外为恒等映照,且

$$R_\sigma(0,0,0)=(0,0,0)$$

$$\text{grad } R_\sigma(0,0,0)=\text{恒等映照}$$

容易验证在$(x'',y'',z'')=(0,0,0)$邻域内,方程组(6.7.5)在 R_σ 变换下也归结为线性方程组:

$$\begin{cases}\dot{x}''_j=-\alpha_j x''_j-\beta_j y''_j,\\ \dot{y}''_j=\beta_j x''_j-\alpha_j y''_j,\quad j=1,\cdots,M-1;k=1,\cdots,4\\ \dot{z}''_k=\delta_k\gamma_k z''_k,\end{cases}\tag{6.7.11}$$

其中

$$\delta_k=\begin{cases}1, & k=1,2\\ -1, & k=3,4\end{cases}$$

在整个相空间 S 中,方程组(6.7.5)变换为

$$\begin{cases}\dot{x}''_j = -\alpha_j x''_j - \beta_j y''_j + X''_j(x'',y'',z''), & j = 1,\cdots,M-1 \\ \dot{y}''_j = \beta_j x''_j - \alpha_j y''_j + Y''_j(x'',y'',z''), & k = 1,\cdots,4 \\ \dot{z}''_k = \delta_k \gamma_k z''_k + Z''_k(x'',y'',z''), & \end{cases} \tag{6.7.12}$$

其中

$$\delta_k = \begin{cases}1, & k = 1,2 \\ -1, & k = 3,4\end{cases}$$

$$x'' \equiv (x''_1,\cdots,x''_{M-1})^{\mathrm{T}}$$

$$y'' \equiv (y''_1,\cdots,y''_{M-1})^{\mathrm{T}}$$

$$z'' \equiv (z''_1,\cdots,z''_4)^{\mathrm{T}}$$

且 X''_j, Y''_j, Z''_k 在 Ω 内消失。更重要的是,方程组(6.7.12)关于对称群 $\hat{G}$ 式(6.7.6)是等价的,即如果$(x(t),y(t),z(t))$为式(6.7.5)的解,则 $\sigma\circ(x(t),y(t),z(t))$也是式(6.7.5)的解,因此

$$(x''(t),y''(t),z''(t)) = R_\sigma\circ(x(t),y(t),z(t))$$

$$R_\sigma\circ[\sigma\circ(x(t),y(t),z(t))] \equiv \sigma\circ(x''(t),y''(t),z''(t))$$

也是式(6.7.12)的解。如置

$$h_1 = R_\sigma\circ\hat{h}_1,\quad h_2 \equiv R_\sigma\circ\hat{h}_2$$

则

$$h_2 = \sigma\circ h_1 \tag{6.7.13}$$

因此构造方程(6.7.5)的 Smale 马蹄变换为构造方程组(6.7.12)的 Smale 马蹄,且有两个已知的事实:

(1) 方程组(6.7.12)具有对称同宿轨道 h_1 和 $h_2(h_2=\sigma\circ h_1)$ 渐近于(0,0,0)。

(2) 最弱排斥率 $\gamma_1>$最弱吸引率 α_1。

6.7.3.2 由对称同宿轨道产生的混沌

令 $h_i^{\pm}(i=1,2)$表示一对同宿轨道 $h_i(i=1,2)$向前和向后时间线段,$h_2^{\pm}=\sigma\circ h_1^{\pm}$,Poincaré 截面 Σ_0,Σ_1,Poincaré 映照 P_0^1, P_1^0,

$P=P_1^0\circ P_0^1$,如同前面定义。令 $\eta_i^+(i=1,2)$表示 $h_i^+(i=1,2)$和 Σ_0 的边界 $z_1=0$ 的交点

$$q_i^+ \equiv h_i^+ \cap \partial\Sigma_0$$

其中 q_i^+ 具有坐标

$$\begin{cases}x_1 = x_1^{(+,i)}, & y_1 = 0, \\ x_j = x_j^{(+,i)}, & y_j = y_j^{(+,j)}, \quad 2\leqslant j\leqslant M-1 \\ z_1 = z_2 = 0, & z_3 = z_3^{(+,i)}, \quad z_4 = y_4^{(+,i)} \\ q_2^+ = \sigma q_1^+ & \end{cases} \tag{6.7.14}$$

即

$$x_1^{(+,2)} = x_1^{(+,1)},\quad z_3^{(+,2)} = z_3^{(+,1)},\quad z_4^{(+,2)} = -z_4^{(+,1)}$$

$$\{x_j^{(+,2)},y_j^{(+,2)}\} = \{(-1)^{j+1}x_j^{(+,1)},(-1)^{j+1}y_j^{(+,1)}\},$$

$$2\leqslant j\leqslant M-1$$

类似地令 $q_i^-(i=1,2)$表示 $h_i^-(i=1,2)$和 Σ_1 的交点。

$$q_i^- \equiv h_i^- \cap \Sigma_1$$

其中 q_i^- 具有坐标

$$\begin{cases}z_1 = \eta, & z_2 = z_2^{(-,i)}, \quad z_3 = z_4 = 0 \\ x_j = 0, & y_i = 0, \quad 1\leqslant j\leqslant M-1\end{cases}$$

且

$$q_2^- = \sigma q_1^- \tag{6.7.15}$$

即

$$z_2^{(-,2)} = -z_2^{(-,1)}$$

最后我们有

$$P_1^0(q_i^-) = q_i^+,\quad i = 1,2$$

如同一般理论,在 Σ_0 上的坐标为

$$(x_1^0;\{x_j^0,y_j^0\},2\leqslant j\leqslant M-1;z_k^0,1\leqslant k\leqslant 4)$$

Σ_1 的坐标为

$$(\{x_j^1, y_j^1\}, 1 \leqslant j \leqslant M-1; z_k^1, 2 \leqslant k \leqslant 4)$$

分别应用不动点定理 6.6.8 于 q_1^+ 和 q_2^+ 的邻域,我们有两个不动点序列

$$\{q_l^{(i)}, l = l_0, \cdots, \infty\}, \quad i = 1,2$$

二者挑一,我们应用不动点定理 6.6.8 于 q_1^+ 的邻域得到一个不动点序列,再应用群元素 σ 作用于这个不动点序列得到在 q_2^+ 邻域的不同不动点序列,则

$$q_l^{(2)} = \sigma q_l^{(1)}, \quad l = l_0, \cdots, \infty \tag{6.7.16}$$

我们有如下结果:

推论 6.7.2 在 $q_i^+(i=1,2)$的每个邻域,存在不动点序列

$$\{q_l^{(i)}, \quad l = l_0, \cdots, \infty\}, \quad i = 1,2$$

且有

$$q_l^{(2)} = \sigma q_l^{(1)}, \quad l = l_0, \cdots, \infty$$

这些不动点序列$\{q_l^{(i)}\}$具有定理 6.6.8 所描述的渐近性质。由式(6.7.16)

$$z_1^0(q_l^{(2)}) = z_1^0(q_l^{(1)})$$

则 $q_l^{(2)}$ 和 $q_l^{(1)}$ 对应于定理 6.6.8 中描述的相同的 T_l。为方便计,令

$$p_l^{(+,i)} = q_{2l}^{(i)}, p_l^{(-,i)} \equiv q_{2l+1}^{(i)}, \quad 2l \geqslant l_0$$

类似地,定义 $S_l^{(i)}(i=1,2)$

$$S_l^{(i)} \equiv \Big\{q \in \Sigma_0 \mid \eta\exp\Big[-\gamma_1\Big(T_{2(l+1)} - \frac{\pi}{2}\Big)\Big] \leqslant$$

$$z_1^0(q) \leqslant \eta\exp\Big[-\gamma_1\Big(T_{2l} - \frac{\pi}{2}\Big)\Big],$$

$$|x_1^0(q) - x_1^{(+,i)}| \leqslant \eta\exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\Big],$$

$$|z_2^1(P_0^1(q)) - z^{(-,i)}| \leqslant \eta\exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\Big]\Big\}$$

注意到

$$x_1^{(+,1)} = x_1^{(+,2)}, \quad z_2^{(-,1)} = -z_2^{(-,2)}$$

定义新的 Slab $\hat{S}$ 为

$$\hat{S}_l \equiv \Big\{q \in \Sigma_0 \mid \eta\exp\Big[-\gamma_1\Big(T_{2(l+1)} - \frac{\pi}{2}\Big)\Big] \leqslant$$

$$z_1^0(q) \leqslant \eta\exp\Big[-\gamma_1\Big(T_{2l} - \frac{\pi}{2}\Big)\Big],$$

$$|x_1^0(q) - x_1^{(+,1)}| \leqslant \eta\exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\Big],$$

$$|z_2^1(P_0^1(q))| \leqslant |x_2^{(-,1)}| + \eta\exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\Big]\Big\}$$

则

$$S_l^{(1)} \cup S_l^{(2)} \subset \hat{S}_l$$

由以上定义

$$p_l^{(\pm,i)} \subset P(S_l^{(i)}) \cap S_l^{(i)}, \quad i = 1,2 \tag{6.7.17}$$

$S_l^{(i)}(i=1,2)$的稳定、不稳定边界能被类似定义。

定义 6.7.3 令 $\bar{S}_l^{(i)}(i=1,2)$和$\bar{\hat{S}}_l$ 分别为$S_l^i(i=1,2)$和 $\hat{S}_l$ 在 Σ_0 中的闭包,$S_l^{(i)}(i=1,2)$和 $\hat{S}_l$ 的稳定边界分别为

$$\partial_s S_l^{+,(i)} \equiv \Big\{q \in \bar{S}_l^{(i)} \mid x_1^0(q) - x_1^{(+,i)} = \eta\exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\Big]\Big\}$$

$$\partial_s S_l^{-,(i)} \equiv \Big\{q \in \bar{S}_l^{(i)} \mid x_1^0(q) - x_1^{(+,i)} = -\eta\exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l}\Big]\Big\}$$

$$\partial_s S_l^{\sigma,(i)} \equiv \{q \in \bar{S}_l^{(i)} \mid |\sigma(q)| = \eta,$$

$$\text{对某 } \sigma = \sqrt{(x_j^0(q))^2 + (y_j^0(q))^2}$$

$$(2 \leqslant j \leqslant M-1)$$

或 $\sigma = |z_k^0| \ (k = 3,4)\}$

$$\partial_s \hat{S}_l^{+} \equiv \left\{ q \in \tilde{\bar{S}}_l \mid x_1^0(q) - x_1^{(+,i)} = \eta\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l} \right] \right\}$$

$$\partial_s S_l^{-} \equiv \left\{ q \in \tilde{\bar{S}}_l \mid x_1^0(q) - x_1^{(+,i)} = -\eta\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l} \right] \right\}$$

$$\partial_s \hat{S}_l^{\sigma} \equiv \{ q \in \tilde{\bar{S}}_l \mid |\sigma(q)| = \eta,$$

对某 $\sigma = \sqrt{(x_j^0(\sigma))^2 + (y_j^0(q))^2}$

$(2 \leqslant j \leqslant M - 1)$

或 $\sigma = |z_k^0| \ (k = 3,4)\}$

类似地，不稳定边界分别由$\partial_u S^{(i)}(i = 1,2)$和$\partial_u \hat{S}_l$ 组成，定义为

$$\partial_u S_l^{+,(i)} \equiv \left\{ q \in \bar{S}_l^{(i)} \mid z_l^0(q) = \eta\exp\left[-\gamma_1\left(T_{2l} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\partial_u S_l^{-,(i)} \equiv \left\{ q \in \bar{S}_l^{(i)} \mid z_l^0(q) = \eta\exp\left[-\gamma_1\left(T_{2l+1} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\partial_u S_l^{\sigma,(i)} \equiv \left\{ q \in S_l^{(i)} \mid \sigma(q) = \eta\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_1 T_{2l} \right], \right.$$

对 $\sigma = z_2^1(P_0^1(q)) - z_2^{(-,i)}\}$

$$\partial_u \hat{S}_l^{+} \equiv \left\{ q \in \tilde{\bar{S}}_l \mid z_l^0(q) = \eta\exp\left[-\gamma_1\left(T_{2l} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\partial_u \hat{S}_l^{-} \equiv \left\{ q \in \tilde{\bar{S}}_l \mid z_l^0(q) = \eta\exp\left[-\gamma_1\left(T_{2l+1} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\partial_u \hat{S}_l^{\sigma} \equiv \left\{ q \in \tilde{\bar{S}}_l \mid \sigma(q) = \eta\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_2 T_{2l} \right], \right.$$

$$\left. \sigma = z_2^1(P_0^1(q)) - z_2^{(-,i)} \right\}$$

$\hat{S}_l$ 的稳定和不稳定 Slice 也能类似定义。

推论 6.7.4 $S_l^{(i)}(i = 1,2)$为 $\hat{S}_l$ 的不稳定 Slice。

对于不同直径的估计有

$$d^u(\hat{S}_l) \approx O(\exp\{-\gamma_1 T_{2l}\}), \quad l \to +\infty$$

$$d^s(p(S_l^{(i)})) \approx O(\exp\{-\alpha_1 T_{2l}\}), \quad l \to +\infty$$

由式(6.7.17)，$P(S_l^{(i)})(i = 1,2)$相交于 $\hat{S}_l$ 于四个区域 $V_l^{(\pm,i)}(i = 1,2)$使得

$$p_l^{(\pm,i)} \in V_l^{(\pm,i)}, \quad i = 1,2$$

由此有：

命题 6.7.5 在一般假设下，存在充分大的 l_0，使得对一切 $l \geqslant l_0$，$P(S_l^{(i)})(i = 1,2)$相交于 $\hat{S}_l$ 为两个不相连的组成部分 $V_l^{(\pm,i)}(i = 1,2)$。

$V_l^{(\pm,i)}$ 和$\partial_u^+\hat{S}_l$，$\partial_u^-\hat{S}_l$ 相交，但和$\partial_s\hat{S}_l$ 不相交，且 $V_l^{(\pm,i)}$ 为 $\hat{S}_l$ 中的稳定切片，

$$\partial_s V_l^{(\pm,i)} \subset \partial_s P(\hat{S}_l) \tag{6.7.18}$$

如图 6.7.1 所示。

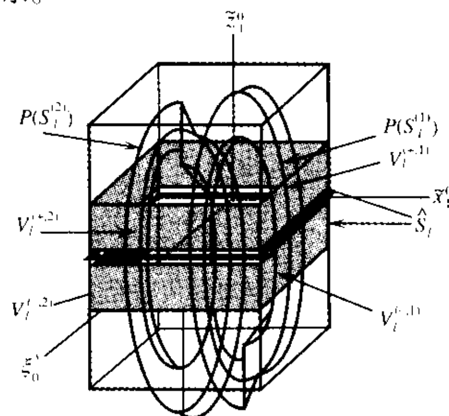


图 6.7.1 $P(S_l^{(1)})$ 和 $P(S_l^{(2)})$ 与 $\hat{S}_l$ 相交

定义

$$H_l^{(\pm,i)} \equiv P^{-1}(V_l^{(\pm,i)}), \quad i = 1,2$$

则 $H_l^{(\pm,i)}(i=1,2)$为不稳定 Slices。更重要的是

$$H_l^{(\pm,i)} \subset S_l^{(i)}, \quad i = 1,2$$

如分别表示

$$H_l^{(+,1)}, H_l^{(-,1)}; \quad H_l^{(+,2)}, H_l^{(-,2)}$$

为
$$H_1, H_2; \quad H_{-1}, H_{-2}$$

则有定理 6.7.6:

定理 6.7.6 存在紧的不变 Cantor 集 $\Lambda^{(1,2)} \subset (S_l^{(1)} \cup S_l^{(2)}) \subset \hat{S}_l$,使得 P 限制于$\Lambda^{(1,2)}$上是拓扑同构,于是四个符号 $-2,-1,1,2$ 的位移自同构 χ_4。即存在一个微分同胚,有

$$\phi_4 : \Sigma_4 \longrightarrow \Lambda^{(1,2)}$$

使得如下图形可交换:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_4 & \xrightarrow{\phi_4} & \Lambda^{(1,2)} \\ \chi_4 & & P \\ \Sigma_4 & \xrightarrow[\phi_4]{} & \Lambda^{(1,2)} \end{array}$$

第七章　扰动 Sine-Gordon 方程同宿轨道的不变性

这一章主要讨论两种类型 Sine-Gordon 方程在小耗散扰动下同宿轨道的不变性,以及一类 Klein-Gordon 方程(Hamilton 系统)在小扰动下同宿轨道的不变性。众所周知,Sine-Gordon 方程是完全可积系统,具有孤立子解,在孤立子理论中占有重要位置,它在激光束传播于非线性介质和非线性光学中都有实际的物理背景。

7.1　一类 Sine-Gordon 方程在耗散扰动下同宿轨道的不变性

考虑如下一类具有小扰动的 Sine-Gordon 方程:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \sin u = \varepsilon(-2u_t + g(t,u)) \qquad (7.1.1)$$

具有 Neumann 边界条件下同宿轨道的不变性。这里 u 为 2π 周期的,且关于 $x=0$ 是奇函数;ε 为耗散扰动小参数,$0 \leqslant \varepsilon \ll 1$;常速度 c 限制为$\frac{1}{4} < c^2 < 1$;扰动项 $g(t,u)$为非线性光滑函数,满足 $g(t,u) = O(u^3), u \to 0$($g(\cdot,u)$可能取为 $O(u^2)$)。以 H 表示通常的 Sobolev 空间 H^1,且其函数为 2π 周期的奇函数。能量方法易证式(7.1.1)的 Canchy 问题是适定的在空间 $C(R;H) \cap C^1(R, L_x^2)$中。

先考虑未扰动的同宿轨道,由孤立子理论可得到"呼吸子":

$$b(x,t) = 4\arctan \frac{\sigma \sin x}{c\cosh \sigma t} \qquad (7.1.2)$$

其中 $\sigma = \sqrt{1-c^2}$,注意到 $b(x,t)$为 Sine-Gordon 方程的解,它具有 2π 周期,且关于 x 是奇的,它以指数形式($t \to \pm\infty$)趋于 $u=0$。

$$b(x,t) = O[\exp(-\sigma|t|)], \quad t \to \pm\infty \tag{7.1.3}$$

我们寻求方程(7.1.1)具如下形式的解：

$$u(x,t) = b(x,t-\alpha) + r(x,t;\varepsilon) \tag{7.1.4}$$

则 r 满足方程：

$$r_{tt} - c^2 r_{xx} - r + 2\varepsilon r_t + m(x,t;\varepsilon,\alpha) r = \varepsilon F(x,t;\alpha) + G(x,t,r;\alpha,\varepsilon) \tag{7.1.5}$$

其中：

$$\begin{cases} m = 1 - \cos b - \varepsilon g'(t+\alpha,b) = O[\exp(-2\sigma|t|)] \\ F = -2b_t + g(t+\alpha,b) = O[\exp(-\sigma|t|)] \\ G = \varepsilon[g(t+\alpha,b+r) - g(t+\alpha,b) - g'(t+\alpha,b)r] \end{cases}$$

$$+ \sin b(\cos r - 1) + \cos b(\sin r - r) = O[\exp(-\sigma|t|)r^2] + O[r^3] \tag{7.1.6}$$

由此可以看到，如果我们能证明 $r(x,t;\varepsilon,\alpha)$ 的存在性，且当 $|t| \to \infty$ 时衰减于零，即证明了同宿轨道的不变性。

为此先研究线性化算子的性质。对于非线性边值问题式(7.1.5)，我们先研究线性方程：

$$\mathscr{L} r = r_{tt} - c^2 r_{xx} - r + 2\varepsilon r_t + mr = f(x,t) \tag{7.1.7}$$

其中 $f \in L_t^1(L_x^2)$。为了考虑算子 $\mathscr{L}$ 的迹，在给定的边界条件下，即 r 对 x 具有 2π 周期，为奇函数，且当 $t \to \pm\infty$ 时 $r \to 0$。我们必须区分双曲方向和椭圆方向，对 $\varepsilon = 0$，当 $t \to \pm\infty$ 时，方程(7.1.7)趋于：

$$r_{tt} - c^2 r_{xx} - r = 0 \tag{7.1.8}$$

其中 $c^2 \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$，具有一个双曲方向，且有指数增长率 $\sigma = \pm\sqrt{1-c^2}$，余维数为 1 的中心方向，具有频率 $\omega_k = \sqrt{c^2k^2 - 1}$ $(k = 2,3)$。因此为了求 $\mathscr{L}$ 的迹，我们引进投影：

$$Q_r = a = (r, \sin x)\sin x$$

$$P_r = v = (I - Q)r$$

考虑方程(7.1.7)为耦合方程组：

$$Lv + Ma = f_1 = Pf \tag{7.1.9a}$$

$$M^* v + Na = f_2 = Qf \tag{7.1.9b}$$

其中：
$$L = P\mathscr{L}P$$
$$M = P\mathscr{L}Q = PmQ$$
$$N = Q\mathscr{L}Q = D + QmQ$$

算子 $D = \partial_t^2 + 2\varepsilon\partial_t - \sigma^2$ 为强椭圆型算子 $D_\sigma = \partial_t^2 - \sigma^2$ 的扰动，算子 L 为波动算子 $L_0 = \partial_t^2 - c^2\partial_x^2 - 1$ 限制于 PH 上的扰动。为了定义算子 L 的迹，我们解 Cauchy 问题：

$$Lv = (\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 + 2\varepsilon\partial_t - 1 + PmP)v = g \tag{7.1.10}$$

在 $t = -\infty$ 处具有零初始条件。

命题 7.1.1 给定 $g \in L_t^1(PL_x^2)$，ε 充分小，方程(7.1.10)具有惟一的有限能量解 v 使得

$$|v(t)|_e < C\int_{-\infty}^{t} |g(s)|_{L_x^2} ds$$

这个解可表为

$$v(t) = L^{-1}g = \int_{-\infty}^{t} K(t,s)g(s)ds$$

其中 K 为如下 Cauchy 问题的解算子：

$$Lw = 0, \quad w(s,s) = 0, \quad \partial_t w(s,s) = w_1 \in PL_x^2$$

进一步，v 满足估计：

$$|v|_{L_t^3(\mathrm{PH})} \leqslant C\varepsilon^{1/3} |g|_{L_t^1(L_x^2)}$$

证明：对 ε 充分小，$|e^{\varepsilon t} m(x,t)| \leqslant Ce^{-\sigma t/2}$，用标准的能量估计对于齐次方程的解 $\tilde{v}$ 满足：

$$|\tilde{v}(t)| \leqslant Ce^{-\varepsilon(t-s)} |\tilde{v}(s)|_e \tag{7.1.11}$$

其中 C 不依赖于 ε，方程(7.1.10)的有限能量解可表为

$$v(t) = \tilde{v}(t,t_1) + \int_{t_1}^{t} K(t,s)g(s)\mathrm{d}s$$

由式(7.1.11)：

$$|\tilde{v}(t,t_1)|_e \leqslant Ce^{-\varepsilon(t-t_1)}|v(t_1)|_e$$

$$K(t,s):PL_x^2 \to PH, \quad \|K(t,s)\| \leqslant Ce^{-\varepsilon(t-s)}$$

对任何解 $v(t)$，当 $t\to-\infty$ 时，$v(t)\to 0$，令 $t_1\to-\infty$ 可得

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t,s)g(s)\mathrm{d}s \tag{7.1.12}$$

这就推出解的惟一性，当 $t\to-\infty$ 时它为零。对式(7.1.2)进行能量估计，可得

$$|v(t)|_H \leqslant C\int_{-\infty}^{t} e^{-\varepsilon(t-s)}|g(s)|_{L_x^2}\mathrm{d}s$$

由 Hausdorff-Young 不等式，可得

$$|v|_{L_t^3(H)} \leqslant C\varepsilon^{-1/3}|g|_{L_t^1(L_x^2)}$$

从这个命题易得如下推论。

推论 7.1.1 给定 $e^{a|t|}g\in L^1(L_x^2)$，$\forall a>0$，则 v 对 ε 是光滑的，且：

$$|\partial_\varepsilon v(t)|_e \leqslant Ce^{at/2}\int_{-\infty}^{t} e^{-a\tau}|g(\tau)|_{L_x^2}\mathrm{d}\tau$$

利用这个估计在 L^{-1} 上，由式(7.1.9a)可得

$$v = L^{-1}f_1 - L^{-1}Ma \tag{7.1.13}$$

将这个表达式代入到式(7.1.9b)可得

$$(D+\tilde{M})a = f_3 = f_2 - M^* L^{-1}f_1 \tag{7.1.14}$$

其中 $\tilde{M} = QMQ - M^* L^{-1}m$，注意到 M 指数衰减，则由推论 7.1.1 可知 $\tilde{M}$ 对 ε 光滑。

命题 7.1.2 算子 $\mathscr{F} = 1 + D^{-1}\tilde{M}$ 作用于 $L_t^2\otimes\sin x$ 是一个指标为 0 的 Fredholm 算子，具有由 $\chi = Q\dot{b} + O(\varepsilon)$ 所张的一维零空间。

证明：因 $\tilde{M}$ 是指数衰减的，D^{-1} 映照 $L^2(R)$ 为 $H^2(R)$，可得 $D^{-1}\tilde{M}$ 在 $L_t^2\otimes\sin x$ 中是紧的，推出 $\mathscr{F}$ 为 Fredholm 的，$\mathscr{F}$ 的零空间可由寻求 $\varepsilon=0$ 时 $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}|_{\varepsilon=0}$ 的零空间计算得到，由散射理论，$\dot{b}$ 为 $\mathscr{L}_0 r = 0$，使得 $|r(t)|_e\to 0(t\to-\infty)$ 的一个解。由命题 7.1.1 推出：

$$P\dot{b} = -L_0^{-1}M_0 Q\dot{b}$$

且 $Q\dot{b}$ 为未扰动算子 $\mathscr{F}_0$ 的 L^2 零空间的一个解。因算子 $\mathscr{F}$ 是紧的，对 ε 是光滑的，从正则扰动理论可得 $\mathscr{F}$ 的零空间是一维的，且由 $\chi = Q\dot{b} + O(\varepsilon)$ 所张成，最后容易看到共轭的零空间为 $\psi = D_0 Q\dot{b} + O(\varepsilon)$ 所张成，这是因为

$$(L_0^{-1})^* g(t) = \int_{\infty}^{t} K_0(t,s)g(s)\mathrm{d}s$$

$$P\dot{b} = -(L_0^{-1})^* M_0 Q\dot{b}$$

从命题 7.1.1 可得，$\mathscr{L}$ 在 L^2 上具有一维零空间，它为

$$\varphi = \chi - L^{-1}M\chi = \dot{b} + O(\varepsilon)$$

所张，而 $\mathscr{L}^*$ 也在 L^2 上具有一维零空间，由

$$\phi = \varphi + O(\varepsilon) = \dot{b} + O(\varepsilon)$$

所张。进一步，因 L 是可逆的，$\mathscr{F}$ 是 Fredholm 的。我们叙述 Fredholm alternative 定理如下。

定理 7.1.1 给定 $f\in L_t^1(L_x^2)$，方程(7.1.7)：

$$\mathscr{L}r = f$$

具有一个解 $r\in L_t^\infty(H)\cap L_t^3(H)$，当且仅当：

$$\langle f,\phi\rangle = \langle f,\dot{b}\rangle + O(\varepsilon) = 0$$

其中

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} fg\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

进一步存在惟一解，$r = \mathscr{L}^{-1}f$ 满足：

$$\langle r,\varphi\rangle = 0$$

$$|r(t)|_e \leqslant C\int_{-\infty}^{t} |f(s)|_{L_x^2}\mathrm{d}x$$

$$|r|_{L_t^2(H)} \leqslant C\varepsilon^{-1/3}|f|_{L_t^1(L_x^2)}$$

现考虑非线性问题。由这些对线性方程的估计,可解非线性问题(7.1.5),首先求解近似方程:

$$\mathscr{L}r = \varepsilon F + G - \frac{\langle \varepsilon F + G,\phi\rangle}{\langle\phi,\phi\rangle}\phi \qquad (7.1.15)$$

命题 7.1.3 给定 ε 充分小,方程(7.1.15)具有惟一解 $r^*(\varepsilon,\alpha)\in L_t^\infty(H)\cap L_t^3(H)$,使得$\langle r^*,\varphi\rangle=0$ 和

$$|r^*(t;\varepsilon,\alpha)|_e \leqslant C\varepsilon$$

$$|r^*(\varepsilon,\alpha)|_{L_t^3(H)} \leqslant C\varepsilon^{2/3}$$

进一步 r^* 对 α 为 Lip 连续,$|r^*(\varepsilon,\alpha_1)-r^*(\varepsilon,\alpha_2)|_{L_t^3(H)}\leqslant C\varepsilon^{2/3}|\alpha_1-\alpha_2|$。

证明:方程(7.1.15)的右边是和 ϕ 正交的,我们能写方程为

$$r = K(r;\varepsilon,\alpha) = \mathscr{L}^{-1}[\varepsilon F + G - \langle\varepsilon F + G,\phi\rangle\phi/\langle\phi,\phi\rangle]$$

由定理 7.1.1 有

$$|K(r;\varepsilon,\alpha)|_{L_t^3(H)} \leqslant C\varepsilon^{-1/3}[\varepsilon + C|r|_{L_t^3(H)}^2]$$

$K(\cdot;\varepsilon,\alpha)$映照以$|r|<C\varepsilon^{2/3}$为半径的球为它自己。且

$$|K(r_1;\varepsilon,\alpha_1) - K(r_2;\varepsilon,\alpha_2)|_{L_t^3(t)} \leqslant$$

$$C[\varepsilon^{1/3}|r_1 - r_2|_{L_t^3(H)} + \varepsilon^{2/3}|\alpha_1-\alpha_2|],\ |r|\leqslant C\varepsilon^{2/3}$$

因此,由压缩映照原理可知,K 在球$|r|\leqslant C\varepsilon^{2/3}$内具有惟一不动点。由定理 7.1.1,这个不动点满足所提到的估计。

附注 7.1.1 这个不动点在空间 $L_t^\infty(H)$或 $L_t^3(H)$上对 ε 是不光滑的,但从推论 7.1.1 可知,$r(t,\varepsilon)$对 ε 是可微的,且:

$$|\partial_\varepsilon r(t,\varepsilon)| \leqslant C\exp\left[\frac{\sigma}{2}t\right]$$

定理 7.1.2 设:

$$\langle F,\dot b\rangle(\alpha) = -2(\dot b,\dot b\rangle + \langle g(\cdot+\alpha,b),\dot b\rangle$$

当 $\alpha=\alpha_0$ 具有一个简单零点。则方程(7.1.5)具有一个解 $r^*(\varepsilon,\alpha^*)\in L_t^\infty(H)\cap L_t^3(H)$,对某个 $\alpha^*=\alpha_0+O(\varepsilon)$使得

$$|r^*(t;\varepsilon,\alpha^*)|_e \leqslant C\varepsilon$$

$$|r^*(\varepsilon,\alpha^*)|_{L_t^3(H)} \leqslant C\varepsilon^{2/3}$$

证明:,从命题 7.1.3 可知,近似方程(7.1.15)有一个解 $r^*(\varepsilon,\alpha)\in L_t^\infty(H)\cap L_t^3(H)$,使得$|r^*|_{L_t^\infty(H)}\leqslant c\varepsilon$,进一步,$G=O(e^{-\sigma|t|}r^2+r^3)$,则$\langle G,\phi\rangle=O(\varepsilon^3)$。因此,由压缩映照原理,可得

$$\langle F,\phi\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle G,\phi\rangle = \langle F,b\rangle + R(\varepsilon,\alpha) = 0$$

其中 R 对α 为 Lip 连续,具有 Lip 常数 $O(\varepsilon)$,上式具有一个解 $\alpha^*=\alpha_0+O(\varepsilon)$。

附注 7.1.2 在耗散的情况下,同宿轨道在耗散扰动式(7.1.1)下的不变性能由 Melnikov 原理得到。首先,我们注意到未扰动时,0 是一个不稳定不动点,它的不稳定流形 $W_{\varepsilon=0}^u$是一维的,而它的中心稳定流形 $W_{\varepsilon=0}^{cs}$是余维数为 1 的,且有一个简单的指数稳定方向,对 $\varepsilon>0$ 仍保持一个解,它的算子和不稳定流形在扰动下是不变的。分别为 W_ε^u 和 W_ε^{cs}。特别是在不变的中心稳定流形 W_ε^{cs} 上有 $O(\sqrt{\varepsilon})$宽度,在许多"慢方向"中和在一个"快方向"中具有宽度 $O(1)$。这些流形的不变性和大小是由隐函数定理得到的,对有限 T,在扰动轨线 $b^\varepsilon(\cdot)=W_\varepsilon^u$ 和未扰动呼吸子$b(x,t)$之间距离为 $O(\varepsilon)$:

$$\mathrm{dist}[b^\varepsilon(t),b(t)] = O(\varepsilon), \qquad -\infty < t < T$$

由 W_ε^{cs} 大小的估计和"打靶"原理可得

$$\mathrm{dist}[b^\varepsilon(t),W_\varepsilon^{cs}] = \varepsilon\langle F,\dot b\rangle(\alpha) + O(\varepsilon)$$

于此$\langle F,\dot{b}\rangle$可看做 Melnikov 函数。

最后，如果 Melnikov 函数具有一个简单零点，则由隐函数定理，时间在参数空间中，能得到

$$\mathrm{dist}[b^{\varepsilon},W_{\varepsilon}^{cs}]=\varepsilon\langle F,\dot{b}\rangle(\alpha)+O(\varepsilon)=0,\text{对于 }\alpha$$

因此，不变同宿轨道存在，对于某个参数 α。有两点是必须强调的：

（1）Melnikov 距离的消失同于定理 7.1.1 中 Fredholm alternative 条件。

（2）Melnikov 论证，要求两种形式的隐函数原理。其一是对于流形的不变性和大小，其二是关于参数空间，作为分析工具也要求两种不同形式的隐函数定理。

最后，因中心稳定流形是余维 1 的，一个简单的测量量（一个简单参数 α）充分决定是否扰动轨线 $b^{\varepsilon}(t)$和 W_{ε}^{cs} 相交。无论如何，对于守恒扰动，即没有耗散的情况下，“forget”为零的稳定流形，它仅仅是一维的。无穷多测量量将被要求决定是否不稳定流形 W_{ε}^{u} 和稳定流形相交，此时，这些 Melnikov 测量的几何考虑将比耗散时较为困难。然而，对于这些测量量具有显式表示式的守恒方程，也可得到一些自然的结果。

7.2 另一类 Sine-Gordon 方程在耗散扰动下同宿轨道的不变性

考虑非线性方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}-\sin u=2\varepsilon^{\mu}u_{txx}+\varepsilon f(t,u,u_t) \qquad (7.2.1)$$

同宿轨道的不变性。其中 u 为 2π 周期的，关于 0 对 x 是偶的。ε 为耗散参数，$0\leqslant\varepsilon\ll1,1\leqslant\mu<2,a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$。扰动项 $f(t,u,d)$为光滑的，对 t 具周期 T，具有形式

$$f(t,u,d)=\gamma u+f_1(t,u,d) \qquad (7.2.2)$$

其中

$$f_{1u}(t,0,0)=f_{1d}(t,0,0)=0$$

γ 为常数，为简单计，设 f 及其一切导数均是有界的。

我们在偶周期函数空间考虑问题。令 L_e^2 表示 L^2 空间的函数，具有 2π 周期和偶的，即函数空间可写成形式 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cos nx$，$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^2<+\infty$，记 H^1 和 H^2 为 $\mathrm{H}^1\cap L_e^2,\mathrm{H}^2\cap L_e^2$。对任何 $u(0)\in H^1,u_t(0)\in L_e^2$，标准方法证明方程(7.2.1)具初值$(u(0),u_t(0))$的 Cauchy 问题具有惟一解：

$$u(x,t)\in C([0,+\infty),\mathrm{H}^1)\cap C^1([0,+\infty),L_e^2)$$

对 $\varepsilon=0$，方程(7.2.1)为可积系统，此时反散射方法为我们提供了许多明显的同宿轨道，例如“呼吸子”：

$$b(x,t)=4\arctan\frac{\sigma\cos x}{a\cosh\sigma t} \qquad (7.2.3)$$

其中 $\sigma=\sqrt{1-a^2}$。注意到 $b(x,t)$为方程的解，具有 2π 周期和对 x 是偶的，当$|t|\to\infty$时，$b\to0$

$$b(x,t)=O(\mathrm{e}^{-\sigma|t|}),\ |t|\to\infty \qquad (7.2.4)$$

为了研究“呼吸子”在扰动下的不变性，我们首先分析未扰动平凡解 $u=0$ 在扰动下的性态。对与 x 无关的解，方程(7.2.1)为

$$u_{tt}-\sin u=\varepsilon f(t,u,u_t) \qquad (7.2.5)$$

其中：

$$f(t+T,u,u_t)=f(t,u,u_t)$$

对 $\varepsilon=0$，易知 $u=0$ 为式(7.2.5)的鞍点，从 OPE 理论可知，存在式(7.2.5)的惟一 T 周期解 $p(t,\varepsilon)$，使得

$$p(t,\varepsilon)=O(\varepsilon) \qquad (7.2.6)$$

对任何 $t\in R$ 一致成立，解 p 对它的所有变元是光滑的。

现我们寻求方程(7.2.1)具有如下形式的解：

$$u(x,t,\varepsilon) = p(t,\varepsilon) + b(x,t-\alpha) + r(x,t,\varepsilon) \tag{7.2.7}$$

其中 $\alpha \in [0,T]$为一待定常数。如当$|t| \to \infty$时,$|r(t)|_{H^1} \to 0$,则 u 同宿于周期轨道 p,不具渐近位相差。

将式(7.2.7)代入方程(7.2.1),可得 r 的如下方程:

$$r_{tt} - a^2 r_{xx} - 2\varepsilon^{\mu} r_{txx} - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p(t)))r -$$
$$\varepsilon f_d(t,p,p_t) r_t + mr + m_1 r_t = \varepsilon F + G \tag{7.2.8}$$

其中 $r = r(x,t,\varepsilon), p = p(t,\varepsilon), b = b(x,t-\alpha)$且

$$m = m(x,t,\varepsilon,\alpha) =$$
$$\cos p - \cos(p+b) + \varepsilon(f_u(t,p,p_t) -$$
$$f_u(t,p+b,p_t+b_t)) =$$
$$O(\mathrm{e}^{-\sigma|t-\alpha|}) \tag{7.2.9}$$

$$m_1 = m_1(x,t,\varepsilon,\alpha) =$$
$$\varepsilon(f_d(t,p,p_t) - f_d(t,p+b,p_t+b_t)) =$$
$$\varepsilon O(\mathrm{e}^{-\sigma|t-\alpha|}) \tag{7.2.10}$$

$$F = F(x,t,\varepsilon,\alpha) =$$
$$\varepsilon^{-1}(2\varepsilon^{\mu} b_{txx} + \sin p(\cos b - 1) + \sin b(\cos p - 1)) +$$
$$f(t,p+b,p_t+b_t) - f(t,p,p_t) =$$
$$O(\mathrm{e}^{-|t-\alpha|}) \tag{7.2.11}$$

$$G = G(x,t,r,r_t,q,\alpha) =$$
$$\sin(p+b+r) - \cos(p+b)r - \sin(p+b) +$$
$$\varepsilon\{f(t,p+b+r,p_t+b_t+r_t) -$$
$$f(t,p+b,p_t+b_t) - f_u(t,p+b,p_t+b_t)r -$$
$$f_d(t,p+b,p_t+b_t)r_t\} =$$
$$\sin(p+b)(\cos r - 1) + \cos(p+b)(\sin r - r) +$$

$$O(\varepsilon(r^2 + r_t^2)) =$$
$$(\sin(p+b) - \sin p + \sin p)(\cos r - 1) +$$
$$\cos(p+b)(\sin r - r) + O(\varepsilon(r^2 + r_t^2)) =$$
$$O(|r|^3 + \varepsilon r^2 + \varepsilon r_t^2 + \mathrm{e}^{-\sigma|t-\alpha|} \cdot |r^2|) \tag{7.2.12}$$

令 $\mathscr{L}$ 表示式(7.2.8)左端的算子,则有

$$\mathscr{L} = \partial_{tt} - a^2\partial_{xx} - 2\varepsilon^{\mu}\partial_{txx} - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p_t)) -$$
$$- \varepsilon f_d(t,p,p_t)\partial_t + m + m_1\partial_t \tag{7.2.13}$$

则式(7.2.8)为

$$\mathscr{L}r = \varepsilon F + G$$

首先我们分析线性方程

$$\mathscr{L}r = g(x,t) \tag{7.2.14}$$

其中 $g \in L^p(R,H^1), 1 \leqslant p \leqslant +\infty$。记 L_t^p 为 $L^p(R,\cdot)$。对 $\varepsilon = 0$ 和 $|t| \to \infty$,算子 $\mathscr{L}$ 可写为

$$L_0 = \partial_{tt} - a^2\partial_{xx} - 1$$

取近似。对 $a \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, L_0 的特征值为 $\pm\sqrt{1-a^2k^2}, k = 0,1,2,\cdots$,当 $k = 0,1$ 时,对应的两对特征值为实的,为 ± 1 和 $\pm\sigma$;当 $k > 1$ 时,特征值纯虚,为 $\pm i\sqrt{ak^2-1}$。

事实上,$\{1,\cos x,\cdots,\cos kx,\cdots\}$为基,

$$L_0 a_k \cos kx = (\partial_{tt} a_k + a^2k^2 - 1)\cos kx$$

设 Q 为 H^1 上的正交投影,$H^1 \to \mathrm{Span}\{1,\cos x\}$

$$P = I - Q: H^1 \to \mathrm{Span}\{\cos 2x,\cdots,\cos nx,\cdots\}$$

令 $v = Pr, q = Qr, q = q_1 + q_2\cos x, r = q + v, v = Pv, q = Qq, 0 = Pq = Qv$。

由式(7.2.14)可得耦合方程组:

$$Lv + Mq = g_1 = Pg \tag{7.2.15}$$
$$M^* v + Nq = g_2 = Qg \tag{7.2.16}$$

其中:$L = P\mathscr{L}P, M = P(m_1 + m_1\partial_t)Q, M^* = Q(m + m_1\partial_t)P, N =$

$Q\mathscr{L}Q$。注意到对任何光滑函数 $u(t,x)$，且具 2π 周期的，对 x 为偶的，$Lu(t,\cdot),Mu(t,\cdot)\in PH^1,M^*u(t,\cdot),Nu(t,\cdot)\in QH^1$，对一切 t。

考虑

$$N = Q\mathscr{L}Q = D + Q(m + m_1\partial_t)Q \qquad (7.2.17)$$

其中 D 为算子：

$$D = \partial_{tt} - a^2\partial_{xx} - 2\varepsilon^{\mu}\partial_{txx} - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p_t)) - \varepsilon f_d(t,p,p_t)\partial_t$$

作用在 $QH^1 = \mathrm{Span}\{1,\cos x\}$ 上，即 $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$，其中

$$D_1 = \partial_{tt} - \varepsilon f_d(t,p,p_t)\partial_t - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p_t))$$

$$D_2 = \partial_{tt} + (2\varepsilon^{\mu} - \varepsilon f_d(t,p,p_t))\partial_t + a^2 - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p_t))$$

我们开始解方程(7.2.15)，它的解 v 依赖于 g_1 和 q 作为发展方程的解在 $t=-\infty$ 时有零值。对 $t\geqslant s$ 考虑如下问题：

$$Lw(t) = 0, w(s) = w_0, \partial_t w(s) = w_1$$

其中 $(w_0,w_1)\in PH^2\times PH^1$，显然，$w(t)\in PH^2,\partial_t w(t)\in PH^1$。

引理 7.2.1 存在常数 $C>0$，它与 $0\leqslant\varepsilon\ll 1,t,s,w_0,w_1$ 无关，使得

$$|w_{xx}(t)|_{L_e^2} + |w_{tx}(t)|_{L_e^2} \leqslant Ce^{-\varepsilon^{\mu}(t-s)}(|w_{0xx}|_{L_e^2} + |w_{1x}|_{L_e^2}) \qquad (7.2.18)$$

证明：从标准的能量估计得到

$$p(t,\varepsilon), f_d(t,p,p_t) = O(\varepsilon), f_u(t,p,p_t) = \gamma + O(\varepsilon)$$

且 $m,m_x,m_1,m_{1x} = O(e^{-\sigma|t-\alpha|})$，则有

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + 2\varepsilon^{\mu}w_{txx} + (1+\gamma\varepsilon)w + O(\varepsilon^2 + e^{-\sigma|t-\alpha|})w + O(\varepsilon^2 + e^{-\sigma|t-\alpha|})w_t$$

令

$$\tilde{w} = w_{tx} + \varepsilon^{\mu}w_x$$

则有：

$$\frac{1}{2}\partial_t\int_0^{2\pi}[\tilde{w}^2 + (a^2 - 2\varepsilon^{2\mu})w_{xx}^2 - (1+\gamma\varepsilon)w_x^2]\,dx =$$

$$\int_0^{2\pi}[-(w_{tt} + \varepsilon^{\mu}w_t)(w_{txx} + \varepsilon^{\mu}w_{xx}) + (a^2 - 2\varepsilon^{2\mu})w_{xx}w_{txx} - (1+\gamma\varepsilon)w_x w_{tx}]\,dx =$$

$$\int_0^{2\pi}[-(a^2 w_{xx} + 2\varepsilon^{\mu}w_{txx} + (1+\gamma\varepsilon)w + \varepsilon^{\mu}w_t)(w_{txx} + \varepsilon^{\mu}w_{xx}) + (a^2 - 2\varepsilon^{2\mu})w_{xx}w_{txx} - (1+\gamma\varepsilon)w_x w_{tx} + O(\varepsilon^2 + e^{-\sigma|t-\alpha|})(w_x^2 + \tilde{w}^2)]\,dx =$$

$$\int_0^{2\pi}[-\varepsilon^{\mu}(2\tilde{w}_x^2 + (a^2 - 2\varepsilon^{2\mu}))w_{xx}^2 - (1+\gamma\varepsilon)w_x^2 - \tilde{w}^2) + O(\varepsilon^2 + e^{-\sigma|t-\alpha|})(\tilde{w}^2 + w_x^2)]\,dx \qquad (7.2.19)$$

令 h 为

$$h(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\tilde{w}^2 + (a^2 - 2\varepsilon^{2\mu})w_{xx}^2 - (1+\gamma\varepsilon)w_x^2]\,dx$$

因 $\quad w\in PH^2, w(x,t) = \sum_{n\geqslant 2}a_n(t)\cos nx, w_x(x,t) = -\sum_{n\geqslant 2}na_n(t)\sin nx$

$$|w_x(t)|_{L_x^2}^2 = \sum_{n\geqslant 2}n^2a_n^2 \geqslant 4\sum_{n\geqslant 2}|a_n|^2 = 4|w(t)|_{L_x^2}^2$$

有 $\quad \int_0^{2\pi}w_{xx}^2\,dx \geqslant 4\int_0^{2\pi}w_x^2\,dx$

则对 ε 充分小有

$$a^2 - 2\varepsilon^{2\mu} - \frac{1+\gamma\varepsilon}{4} \geqslant \theta > 0, \theta = \frac{4a^2-1}{10}$$

$$|\tilde{w}|_{L_e^2}^2 + |w_{xx}|_{L_e^2}^2 \geqslant h(t) \geqslant \theta(|w_{tx}|_{L_e^2}^2 + |w_{xx}|_{L_e^2}^2)$$

则由式(7.2.19)推出，对小的 $\varepsilon\to 0$，存在常数 C 使得

$$h_t(t) \leqslant (-\varepsilon^{\mu} + Ce^{-\sigma|t-a|})h(t)$$

由此及 Gronwall 不等式即得到引理结论。

今后以 C 表示不同的正常数,令 $A(t,s): PH^2 \times PH^1 \to PH^2$ 为解算子,即

$$w(t) = A(t,s)(w_0, w_1)$$

令 $A_0(t,s) = A(t,s)(\cdot,0), A_1(t,s) = A(t,s)(0,\cdot)$

即有
$$w(t) = A_0 w_0 + A_1 w_1$$

利用这个引理,定义算子 L 的逆算子,即

$$L^{-1}(t)\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} A_1(t,s)\phi(s)ds \qquad (7.2.20)$$

于此 $\phi \in L_t^p(PH^1), 1 \leqslant p \leqslant \infty$。容易验证对任何 $1 \leqslant k \leqslant +\infty$ 和 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,有

$$|(L^{-1}\phi)_t|_{L_t^{kp}(H^1)} + |L^{-1}\phi|_{L_t^{kp}(H^2)} \leqslant C_{p,k}\varepsilon^{\mu\left(\frac{k-1}{kp}-1\right)} \cdot |\phi|_{L_t^p(H^1)} \qquad (7.2.21)$$

事实上,$L^{-1}\phi$ 是如下问题:

$$Lw = \phi, w|_{t=-\infty} = 0$$

的惟一解。

$$(L^{-1}\phi)_t = A_1(t,s)(0,\phi)|_{s=t} + \int_{-\infty}^{t} \partial_t A_1(t,s)(0,\phi(s))ds$$

由式(7.2.18)、式(7.2.20)推出

$$|(L^{-1}\phi)_t|_{H^1} + |L^{-1}\phi|_{H^2} \leqslant \int_{-\infty}^{t} \{|\partial_t A_1(t,s)(0,\phi(s))|_{H^1} + |A_1(t,s)(0,\phi(s))|_{H^2}\}ds \leqslant$$

$$C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\varepsilon^{\mu}(t-s)} \cdot |\phi(s)|_{H^1} ds \leqslant$$

$$C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\varepsilon^{\mu}(t-s)} \cdot |\phi(s)|_{H^1} ds$$

利用 Yang 不等式:

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

推出:

$$|(L^{-1}\phi)_t|_{L_t^{kp}(H^1)} + |L^{-1}\phi|_{L_t^{kp}(H^2)} \leqslant C_{pk}\varepsilon^{\mu\left(\frac{k-1}{kp}-1\right)} \cdot |\phi|_{L_t^p(H^1)}$$

其中 $1 \leqslant k \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$。

由 L^{-1}的定义,对任何 $g_1 \in L_t^p(PH^1), q \in W_t^{1,p}(QH^1)$,可写方程(7.2.15)为

$$v = L^{-1}(g_1 - Mq) \qquad (7.2.22)$$

$v \in L_t^{kp}(PH^1)$,对任何 $k \geqslant 1, \varepsilon > 0$。将 v 代入式(7.2.16)可得

$$(D + \tilde{M})q = g_3 = g_2 - M^* L^{-1} g_1$$

其中 $\tilde{M} = Q(m + m_1\partial_t)Q - M^* L^{-1} M$。由式(7.2.17),$D$ 为强椭圆算子,D^{-1}为有界算子:$L_t^p(QH^1) \to W_t^{2,p}(QH^1), 1 \leqslant p \leqslant +\infty$,且 ε 充分小,因此再写上述方程为:

$$(I + D^{-1}\tilde{M})q = D^{-1}g_3 = D^{-1}(Qg - M^* L^{-1} Pg) \qquad (7.2.23)$$

引理 7.2.2 对 $1 \leqslant p \leqslant +\infty, 0 \leqslant \varepsilon \ll 1$, $D^{-1}\tilde{M}$ 在 $W_t^{1,p}(QH^1)$ 上为紧算子

证明:从直观上 D^{-1}使函数光滑,$\tilde{M}$ 使函数衰减,由此推出 $D^{-1}\tilde{M}$ 是紧的。为完备起见,我们给出如下 D^{-1}和 $\tilde{M}$ 的明确估计:对任何 $q \in W_t^{1,p}(QH^1)$,令 $\bar{q} = \tilde{M}q$。由引理 7.2.1,对 $\varepsilon > 0$ 有

$$|\partial_t(L^{-1}Mq)(t)|_{H^1} + |L^{-1}Mq(t)|_{H^2} \leqslant$$

$$C\int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma|s-t|}(|q(s)|_{H^1} + |q_t(s)|_{H^1})ds \leqslant$$

$$C|q|_{W_t^{1,p}(QH^1)}$$

因此,对任意 $t \in R$ 有

$$| \bar{q}(t) |_{H^1} \leqslant Ce^{-\sigma|t-\alpha|}(| q(t) |_{H^1} + | q_t(p) |_{H^1} + | q |_{W_t^{1,p}}) \tag{7.2.24}$$

令 $\bar{q} = D^{-1}q, \bar{q}(t) = \bar{q}_1(t) + \bar{q}_2(t)\cos x, \tilde{q} = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2\cos x$，其中 $\bar{q}_1$，$\bar{q}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in L_t^p(R,R)$，于是有 $\bar{q}_1 = D_1\tilde{q}_1, \bar{q}_2 = D_2\tilde{q}_2$，其中

$$D_1 = \partial_{tt} - \varepsilon f_d(t,p,p_t)\partial_t - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p_t))$$

$$D_2 = \partial_{tt} + (2\varepsilon^\mu - \varepsilon f_d(t,p,p_t))\partial_t + a^2 - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p_t))$$

设 $w_1 \in W_t^{2,p}(R,R)$ 为下列方程的解：

$$D_3 w_1 = \Big\{\partial_{tt} + (2\varepsilon^\mu - \varepsilon f_d(t,p,p_t))\partial_t - \left(\frac{\sigma^2}{4} + \frac{\varepsilon\partial_t f_d(t,p,p_t)}{2} - \frac{(2\varepsilon^\mu - \varepsilon f_d)^2}{4}\right)\Big\}w_1 = -|\bar{q}_2|$$

记 $$C_2 = -\left(\frac{\sigma^2}{4} + \frac{\varepsilon\partial_t f_d(t,p,p_t)}{2} - \frac{(2\varepsilon^\mu - \varepsilon f_d(t,p,p_t))^2}{4}\right)$$

$$C_3 = a^2 - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p_t))$$

当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时，$C_2 < 0, C_3 < 0$。由极值原理推出，若 $w|_{t=-\infty} = 0$，则 $w_1(t) > 0, -\infty < t < +\infty$。

$$D_2\tilde{q}_2 - D_3w_1 = \partial_{tt}(\tilde{q}_2 - w_1) + (2\varepsilon^\mu - \varepsilon f_d(t,p,p_t)) \cdot \partial_t(\tilde{q}_2 - w_1) + C_2(\tilde{q} - w_1) + (C_2 - C_3)w_1 = |\bar{q}_2| + \bar{q}_2$$

因 $C_2 < C_3 < 0, w_1(t) > 0$，有

$$|\bar{q}_2| + q_2 + (C_3 - C_2)w_1 \geqslant 0$$

由极值原理推出

$$\tilde{q}_2 - w_1 \leqslant 0$$

$$D_3w_1 + D_2\tilde{q}_2 = \partial_{tt}(w_1 + \tilde{q}_2) + (2\varepsilon^\mu - \varepsilon f_d(t,p,p_t)) \cdot \partial_t(w_1 + \tilde{q}_2) + C_2(\tilde{q}_2 + w_1) + (C_3 - C_2)w_1 = -|\bar{q}_2| + \bar{q}_2$$

由 $$|q_2| + \bar{q}_2 + (C_2 - C_3)w_1 \leqslant 0$$

和极值原理推出

$$|\tilde{q}_2(t)| \leqslant w_1(t), \forall t \in R, 0 < \varepsilon \ll 1$$

令 $$w = w_1\exp\left[\int_0^t\left(\varepsilon^\mu - \frac{\varepsilon}{2}f_d(s,p,p_t)\right)ds\right]$$

容易验证：

$$\left(\partial_{tt} - \frac{\sigma^2}{4}\right)w = -|\bar{q}_2|\exp\left[\int_0^t\left(\varepsilon^\mu - \frac{\varepsilon}{2}f_d(s,p,p_t)\right)ds\right]$$

可得解：

$$w(t) = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{\sigma}{2}(t-s) + \int_0^s\left(\varepsilon^\mu - \frac{\varepsilon}{2}f_d(\tau,p,p_t)\right)d\tau\right] \cdot |\bar{q}_2(s)|ds + \frac{1}{\sigma}\int_t^\infty \exp\left[\frac{\sigma}{2}(t-s) + \int_0^s\left(\varepsilon^\mu - \frac{\varepsilon}{2}f_d(\tau,p,p_t)\right)d\tau\right] \cdot |q_2(s)|ds$$

$$|\tilde{q}_2(t)| \leqslant |w_1(t)| \leqslant \left|w(t)\exp \cdot \left[-\int_0^t\left(\varepsilon^\mu - \frac{\varepsilon}{2}f_d(s,p,p_t)\right)d\tau\right]\right| \leqslant \frac{1}{\sigma}\left|\int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{\sigma}{2}(t-s) - \right.\right.$$

$$\int_s^t\left(\varepsilon^{\mu}-\frac{\varepsilon}{2}f_d(\tau,p,p_t)\right)\mathrm{d}\tau\Big]\cdot$$

$$|\bar{q}_2(s)|\mathrm{d}s\Big|+\frac{1}{\sigma}\Big|\int_t^{\infty}\exp\Big[-\frac{\sigma}{2}(t-s)-$$

$$\int_s^t\left(\varepsilon^{\mu}-\frac{\varepsilon}{2}f_d(s,p,p_t)\right)\mathrm{d}\tau\Big]\cdot|\bar{q}_2(s)|\mathrm{d}s\Big|\leqslant$$

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[-\frac{\sigma}{4}(t-s)\Big]\exp[-\sigma|s-\alpha|]\cdot$$

$$|q|_{W_t^{1,p}(QH^1)}\mathrm{d}s,\quad 0<\varepsilon\ll 1\leqslant$$

$$C\exp\Big[-\frac{\sigma}{4}|t-\alpha|\Big]|q|_{W_t^{1,p}(QH^1)}$$

$$D_2\tilde{q}_{2,t}=\varepsilon\partial_t(f_d(t,p,p_t))\bar{q}_{2,t}+$$
$$\partial_t(\cos p+\varepsilon f_u(t,p,p_t))\bar{q}_2+\bar{q}_2$$

同理

$$|\tilde{q}_{2,t}|\leqslant C\exp\Big[-\frac{\sigma}{4}|t-\alpha|\Big]|q|_{W_t^{1,p}(QH^1)}$$

利用同样的办法估计 $\tilde{q}_1,\tilde{q}_{1,t}$,推出

$$|\tilde{q}(t)|+|\tilde{q}_t(t)|\leqslant Ce^{-\frac{\sigma}{4}|t-\alpha|}|q|_{W_t^{1,p}(QH^1)}\quad(7.2.25)$$

现取任何序列 $\{q_k\in W_t^{1,p}(QH^1):|q_k|_{W_t^{1,p}}\leqslant 1\}$,令 $\tilde{q}_k=D^{-1}\tilde{M}q_k$,$\bar{q}_k=\tilde{M}q_k$,对任何 $n>0$,令 $\chi_{[-n,n]}$为区间$[-n,n]$上特征函数,从标准的椭圆方程估计,有

$$|\tilde{q}_k\chi_{[-n,n]}|_{W_t^{2,p}}\leqslant C|\bar{q}_k|_{L_t^p}\leqslant C$$

因此,存在 $\tilde{q}_0\in L_t^p(QH^1)$,和子序列$\{q_{kl}\}$使得

$$\chi_{[-n,n]}\tilde{q}_{kl}\to\chi_{[-n,n]}\tilde{q}_0$$

依 $\bar{W}_t^{1,p}([-n,n],QH^1)$,$\forall n>0$。基于式(7.2.25),这是 $\bar{W}_t^{1,p}(R,QH^1)$中的一个 Cauchy 列,引理证毕。

因此,当 $0\leqslant\varepsilon\ll 1$,算子 $I+D^{-1}\tilde{M}$ 为具有零指标的 Fredholm 算子,这个算子对 q 是光滑的,有如下引理

引理 7.2.3 $D^{-1}\tilde{M}=D^{-1}Q(m+m_1\partial_t)Q-D^{-1}M^*L^{-1}M$ 对 ε 是 C^1 光滑的,$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$,$\varepsilon_0>0$。

证明:作为基$\{1,\cos x\}$的项,D 有形式式(7.2.17)。$D^{-1}\in C^1$,对 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$,$\varepsilon_0$ 充分小。事实上

$$D_1q=\partial_{tt}q-\varepsilon f_d(t,p,p_t)\partial_tq-$$
$$(\cos p+\varepsilon f_u(t,p,p_t))q=g_1$$

$$\partial_\varepsilon(D_1q)=\partial_{tt}q_\varepsilon-\varepsilon f_d(t,p,p_t)\partial_tq_\varepsilon-$$
$$(\cos p+\varepsilon f_u(t,p,p_t))q_\varepsilon-$$
$$f_d(t,p,p_t)\partial_tq-\varepsilon\partial_\varepsilon(f_d(t,p,p_t))\partial_tq+$$
$$\sin pp_\varepsilon q-f_u(t,p,p_t)q-$$
$$\varepsilon\partial_\varepsilon(f_u(t,p,p_t))q=\partial_\varepsilon g_1$$

D_1 为强椭圆型算子,因此 $g_1\in L_t^p$,推出 $q\in W_t^{2,p}$,由 ODE 理论知,$\partial_\varepsilon p(t,\varepsilon)=p_\varepsilon$ 关于 $\varepsilon=0$ 连续,推出 p_ε 在$[0,\varepsilon_0)$上有界,于是 $D_1q_\varepsilon=\tilde{g}_1(\varepsilon)$。若$\partial_\varepsilon g_1\in L_t^p$,推出 $\tilde{g}_1(\varepsilon)\in L_t^p$,推出 $g_\varepsilon\in W_t^{2,p}$,推出 $\partial_\varepsilon D^{-1}$关于 ε 连续。

同理可证 $D_\varepsilon D_2^{-1}$ 关于 ε 连续。

因

$$\partial_\varepsilon(D^{-1}\tilde{M})=\partial_\varepsilon D^{-1}\tilde{M}+D^{-1}\partial_\varepsilon\tilde{M}$$

$$\tilde{M}=Q(m+m_1\partial_t)Q-M^*L^{-1}M$$

$$M=p(m+m_t\partial_t)Q,\quad M^*=Q(m+m_1\partial_t)p$$

直接计算可得

$$\partial_\varepsilon m=[\sin(p+b)-\sin p-\varepsilon(f_{uu}(t,p+b,p_t+b_t)-$$
$$f_{uu}(t,p,p_t))]\partial_\varepsilon p-\varepsilon(f_{ud}(t,p+b,p_t+b_t)-$$

$$f_{ud}(t,p,p_t))\partial_\varepsilon p_t - (f_u(t,p+b,p_t+b_t) -$$
$$f_u(t,p,p_t)) = O(e^{-\sigma|t-\alpha|})$$
$$\partial_\varepsilon m_1 = -(f_d(t,p+b,p_t+b_t) - f_d(t,p,p_t)) -$$
$$\varepsilon(f_{du}(t,p+b,p_t+b_t) - f_{du}(t,p,p_t))\partial_\varepsilon p -$$
$$\varepsilon(f_{dd}(t,p+b,p_t+b_t) - f_{dd}(t,p,p_t))\partial_\varepsilon p_t =$$
$$O(e^{-\sigma|t-\alpha|})$$

因此

$$|D^{-1}\partial_\varepsilon(Q(m+m_1\partial_t)Q)q|_{W_t^{2,p}} \leqslant C|\partial_\varepsilon(Q(m+m_1\partial_t)Q)q|_{L_t^p} \leqslant$$
$$C\|q\|_{W_t^{1,p}(QH^1)}$$

下面仅需在 $W_t^{1,p}(QH^1)$ 中考虑 $D^{-1}M^*\partial_\varepsilon(L^{-1})M$。

对任何 $w\in PH^2$,我们首先考虑 $\partial_\varepsilon A_1(t,s,\varepsilon)w$, $t>s$,令 $u(t)=A_1(t,s,\varepsilon)w$ 和 $v(t)=\partial_\varepsilon u(t)$,即 u 为

$$Lu = u_{tt} - 2\varepsilon u_{txx} - a^2u_{xx} - (\cos p + \varepsilon f_u(t,p,p_t))u -$$
$$\varepsilon f_d(t,p,p_t)u_t + Pmu + Pm_1u_t = 0$$

满足 $u(s)=0, u_t(s)=w$ 的解,而 v 是满足上述方程对 ε 微分

$$Lv = 2u_{txx} + [f_u(t,p,p_t) + (\varepsilon f_{uu}(t,p,p_t) - \sin p)\partial_\varepsilon p +$$
$$\varepsilon f_{ud}(t,p,p_t)\partial_\varepsilon p_t]u + [f_d(t,p,p_t) + \varepsilon f_{du}(t,p,p_t)\partial_\varepsilon p +$$
$$\varepsilon f_{dd}(t,p,p_t)\partial_\varepsilon p_t]u_t - P\partial_\varepsilon mu - P\partial_\varepsilon m_1u_t \triangleq l(t)$$

且 $v(s)=0, v_t(s)=0$ 的解。这可推出

$$v(t) = \int_s^t A_1(t,\tau)l(\tau)d\tau, \qquad v_t(t) = \int_s^t \partial_t A_1(t,\tau)l(\tau)d\tau$$

类似于引理 7.2.1 的证明,可得

$$|u_{txx}(t)|_{L_x^2} \leqslant C|w_{xx}|_{L_x^2}$$
$$|\partial_\varepsilon A_1(t,\tau)w|_{H^1} = |v(t)|_{H^1} \leqslant C(1+(t-s))|w_{xx}|_{L_x^2}$$

对于 $\forall q\in W_t^{1,p}(QH^1)$有

$$|\partial_\varepsilon(L^{-1})Mq(t)|_{H^1} + |\partial_t\partial_\varepsilon(L^{-1})Mq|_{L_t^2} =$$
$$|(\partial_\varepsilon(L^{-1})P(m+m_1\partial_t)q)(t)|_{H^1} +$$
$$|\partial_t(\partial_\varepsilon(L^{-1})P(m+m_1\partial_t)q)(t)|_{L_t^2} =$$
$$\left|\int_{-\infty}^t \partial_\varepsilon A_1(t,s)(P(m+m_1\partial_t)q(s))ds\right|_{H^1} +$$
$$\left|\int_{-\infty}^t \partial_t\partial_\varepsilon A_1(t,s)(P(m+m_1\partial_t)q(s))ds\right|_{L_t^2} \leqslant$$
$$C\int_{-\infty}^t (t-s)e^{-\sigma|s-\alpha|}(|q(s)|+|q_t(s)|)ds \leqslant$$
$$C|q|_{W_t^{1,p}} \cdot |(t-s)e^{-\sigma|s-\alpha|}|_{L^{p/(p-1)}((-\infty,t])} \leqslant$$
$$C(1+|t-\alpha|)|q|_{W_t^{1,p}}$$

这里 C 依赖于 p。利用这个估计,以及 m, m_1 的指数衰减性,易知 $D^{-1}M^*\partial_\varepsilon(L^{-1})M$ 在$W_t^{1,p}(QH^1)$上有界于一个与 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)(\varepsilon_0>0)$无关的常数。

问:$(I+D^{-1}\tilde{M})q=g_4, g_4\in W_t^{1,p}(QH^1), 1\ll p\leqslant\infty$ 是否有非零解?若 $\varepsilon=0$ 时问题解决了,则依小扰动理论,$0<\varepsilon\ll 1$,问题也解决了。现设 $\varepsilon=0$,令 $q\in W_t^{1,p}(QH^1)$为$(I+D^{-1}\tilde{M})$的零空间

$$(I+D^{-1}\tilde{M})|_{\varepsilon=0}q = 0$$

令

$$v = L^{-1}M|_{\varepsilon=0}q$$

则由引理 7.2.2 的证明有

$$|v|_{H^2} + |v_t|_{H^1} \leqslant C\int_{-\infty}^t e^{-\sigma|t-\alpha|}(|q(s)|_H + |q_t(s)|_H)ds \leqslant$$
$$C|q|_{W_t^{1,p}(QH^1)}$$

因此，$v\in W_t^{1,\infty}(PH^1)$，且$\lim_{t\to\infty}v(t)=0$。令 $w=q+v$，则 w 为 SG 方程在 b 处(线性化)方程

$$w_{tt}-a^2w_{xx}-\cos bw=0 \tag{7.2.26}$$

使得$\lim_{t\to-\infty}w(t)=0$的解。容易验证 $w=b_t=O(e^{-\sigma|t-a|})$。它的惟一性可用 Bächlund 变换加以说明。

SG 方程：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}-\sin u=0$$

Bächlund 变换：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{2}(u_1+u_2)=\frac{1}{i\lambda}\sin\frac{u_1-u_2}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{2}(u_1-u_2)=i\lambda\sin\frac{u_1+u_2}{2}$$

其中 $\xi=\frac{at+x}{2a}$，$\eta=\frac{at-x}{2a}$。若 u_2(或 u_1)满足 SG 方程，则 u_2(或 u_1)也是 SG 方程的解。取 $u_2=0$，则

$$u_1=u_\lambda=4\arctan e^{\left(\frac{1}{i\lambda}+i\lambda\right)\frac{t}{2}+\left(\frac{1}{i\lambda}-i\lambda\right)\frac{x}{2a}+i\theta}$$

在 $u_2=0$ 处，SG 方程的线性化方程为

$$w_{tt}-a^2w_{xx}-w=0$$

它的解为

$$w_0=\exp\left[i\left(kt+\frac{\sqrt{k^2-1}x}{a}\right)\right],\quad\forall k\in C$$

在 $u_1=u_\lambda$ 处，SG 方程的线性化方程

$$w_{tt}-a^2w_{xx}-\cos u_\lambda w=0$$

的解 $w_1=w_\lambda$，通过 Bächlund 变换化成线性化(在 $u_2=0$，$u_1=u_\lambda$ 处)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{w_1+w_0}{2}\right)=\frac{1}{i\lambda}\cos\frac{u_1}{2}\frac{w_1-w_0}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{w_1-w_0}{2}\right)=i\lambda\cos\frac{u_1}{2}\frac{w_1+w_0}{2}$$

求出。呼吸子 $b(x,t)$可通过两次 Bächlund 变换求出，其中，取 $u_2=0$，$\lambda_1=\sigma+i$，$\lambda_2=-\sigma+i$，适当的 θ，可求出 $u_1=b(x,t)$。式(7.2.26)的解可通过两次 Bächlund 变换，在 $u_2=0$，u_{λ_1}，u_{λ_2}处的线性化求出。

$$w=w_\sigma+\frac{i}{\sigma}\frac{\cos^2\frac{b}{4}}{\cos^2\frac{(u_{\lambda_1}-u_{\lambda_2})}{4}}(w_{\lambda_1}-w_{\lambda_2}),\quad\sigma=\sqrt{1-a^2}$$

可以验证，$w=b_t$ 为方程(7.2.26)满足$\lim_{t\to-\infty}w=0$的惟一解。惟一性是在相差一个常数倍的意义下得到的，于是，$\ker\{(I+D^{-1}\tilde{M})|_{\varepsilon=0}\}=\text{span}\{Qb_t\}$是一维子空间。进一步，对 $\varepsilon=0$，$D+\tilde{M}$ 和 D 为自伴算子，则一维

$$\ker\{(I+D^{-1}\tilde{M})^*|_{\varepsilon=0}\}=\ker\{D(I+D^{-1}\tilde{M})D^{-1}|_{\varepsilon=0}\}=$$

$$\ker\{(D+\tilde{M})D^{-1}|_{\varepsilon=0}\}=$$

$$\text{span}\{D_0Qb_t\},D_0=D|_{\varepsilon=0}$$

因

$$\langle D_0Qb_t,Qb_t\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2h}D_0Qb_t(x,t)Qb_t(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<0$$

由此推出孤立特征值 $\lambda=0$ 的代数重数为 1。由正则扰动理论和引理 7.2.3，可推出当 $\varepsilon=0$，$(I+D^{-1}\tilde{M})$的谱是有界的且远离于零，除了有一个代数重数为 1 的孤立特征值 $\lambda\approx0$ 外，它的共轭$(I+D^{-1}\tilde{M})^*$的谱也一样。$(I+D^{-1}\tilde{M})^*$对应于 λ 的特征函数为

$$\chi^*=D_0Qb_t+O(\varepsilon)\in W_t^{-1,\frac{p}{p-1}}=(W_t^{1,p})^*$$

对 ε 是 C^1 函数。事实上，$(\lambda+1)\chi^*=\tilde{M}^*(D^{-1})^*\chi^*$对 t 是正则的，且当 $t\to\pm\infty$时为指数衰减的，χ^*与 λ，p 无关。因此，$I+$

$D^{-1}\tilde{M}$ 在 $\ker\{\chi^*\} = R(I+D^{-1}\tilde{M}) = (\chi^*)^{\perp}$ 上可逆，且关于 ε 一致有界。相应地我们解方程(7.2.23)，有

$$(I + D^{-1}\tilde{M})q = D^{-1}g_3 = D^{-1}(Qg - M^* L^{-1}Pg)$$

如果

$$\langle D^{-1}(Qg - M^* L^{-1}Pg), \chi^* \rangle = 0$$

命题 7.2.4 对 $\varepsilon > 0$ 充分小，一切 $g \in L_t^p(H^1)$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，$\mathscr{L}r = g$ 具有解 $r \in L_t^p(H^2)$，$r_t \in L_t^p(H^1)$，如果

$$\langle D^{-1}(Qg - M^* L^{-1}Pg), \chi^* \rangle = 0 \qquad (7.2.27)$$

进一步，对任何 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，

$$| r |_{W_t^{1,p}(H^1)} \leqslant C_p \varepsilon^{-\frac{\mu}{p}} | g |_{L_t^1(H^1)} \qquad (7.2.28)$$

证明：对任何 $g \in L_t^p(H^1)$，使得式(7.2.27)成立。令

$$q = (I + D^{-1}\tilde{M})^{-1}D^{-1}(Q + M^* L^{-1}P)g, \quad v = L^{-1}(Pg - Mq)$$

$r = v + q$。条件式(7.2.27)推出 q, v, r 是确定的。容易验证 $\mathscr{L}r = g$。我们仅需证明估计式(7.2.28)。注意到

$$(I + D^{-1}\tilde{M})^{-1} : (\chi^*) \longrightarrow (\chi^*)^{\perp}$$

$$D^{-1} : L_t^1(QH^1) \to W_t^{1,p}(QH^1)$$

$$M, M^* : W_t^{1,p_1} \to L_t^1$$

是对 ε 一致有界的，$1 \leqslant p_1 \leqslant \infty$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，由式(7.2.21)推出估计式(7.2.28)。

定义映射 Π 在 $W_t^{1,p}(QH^1)$ 上：

$$\Pi(q) = q - \frac{\langle q, \chi^* \rangle}{\langle D_0^{-1}Qb_t, \chi^* \rangle} D_0^{-1}Qb_t \qquad (7.2.29)$$

即 Π 是一个投影算子：$W_t^{1,p}(QH^1) \to (\chi^*)^{\perp} = R(I + D^{-1}\tilde{M})$，$\Pi(q) \in \ker(\chi^*)$。因此 $(I + D^{-1}\tilde{M})^{-1}$ 是在 $R(\Pi)$ 上的有界算子，

$$(I + D^{-1}\tilde{M})^{-1} : R(I + D^{-1}\tilde{M}) = \ker(\chi^*) = R(\Pi) \to \ker(\chi^*)$$

现考虑非线性问题：

$$\mathscr{L}r = \varepsilon F + G$$

固定

$$p_0 = \frac{\mu + 2}{2}, \quad e_0 = \frac{2 - \mu}{2(\mu + 2)}, \quad e_\infty = \frac{3\mu + 2}{2(\mu + 2)} \qquad (7.2.30)$$

对任何 $r \in W_t^{1,p_0}(H^1) \cap W_t^{1,\infty}(H^1)$，定义

$$q = (I - D^{-1}\tilde{M})^{-1}\Pi D^{-1}(Q + M^* L^{-1}P)(\varepsilon F + G)$$

$$v = L^{-1}(P(\varepsilon F + G) - Mq)$$

$K(r) = v + q : W_t^{1,2}(H^1) \cap W_t^{1,\infty}(H^1) \to W_t^{1,2}(H^1) \cap W_t^{1,\infty}(H^1)$。则非线性问题的解转化为映照 K 的不动点。简记 $|\cdot|_p = |\cdot|_{W_t^{1,p}(H^1)}$，从线性估计式(7.2.28)得

$$| K(r) |_{p_0} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{\mu}{p_0}}(\varepsilon | F |_{L_t^1(H^1)} + | G(r) |_{L_t^1(H^1)})$$

$$| K(r) |_\infty \leqslant C(\varepsilon | F |_{L_t^1(H^1)} + | G(r) |_{L_t^1(H^1)})$$

从式(7.2.11)和式(7.2.12)有

$$| F |_{L_t^1(H^1)} \leqslant C$$

$$| G(r) |_{L_t^1(H^1)} \leqslant C(| r |_\infty^2 + \varepsilon | r |_{p_0}^{p_0} | r |_\infty^{2-p_0} + | r |_\infty^{3-p_0} | r |_{p_0}^{p_0})$$

由此推出

$$| K(r) |_\infty \leqslant C(\varepsilon + | r |_\infty^2 + \varepsilon | r |_{p_0}^{p_0} | r |_\infty^{2-p_0} + | r |_\infty^{3-p_0} | r |_{p_0}^{p_0})$$

$$| K(r) |_{p_0} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{\mu}{p_0}}(\varepsilon + | r |_\infty^2 + | r |_{p_0}^{p_0} | r |_\infty^{2-p_0} + | r |_\infty^{3-p_0} | r |_{p_0}^{p_0})$$

令

$$S = \{ r \in W_t^{1,p_0}(H^1) \cap W_t^{1,\infty}(H^1) : | r |_\infty \leqslant \varepsilon^{e_\infty}, | r |_{p_0} \leqslant \varepsilon^{e_0} \}$$

因

$$\min\{1,2e_\infty,3e_\infty+p_0(e_0-e_\infty)\}>e_\infty$$

$$\min\left\{1-\frac{\mu}{p_0},2e_\infty-\frac{\mu}{p_0},3e_\infty+p_0(e_0-e_\infty)-\frac{\mu}{p_0}\right\}>e_0$$

我们有

$$|K(r)|_\infty<\varepsilon^\infty,\qquad |K(r)|_{p_0}<\varepsilon^{p_0}$$

这里 $K:S\to S$。

引理 7.2.5 K 当 $\varepsilon>0$ 充分小时在 S 上是压缩的。

证明:对任何 $r_1,r_2\in S$,某些计算后得

$$\begin{aligned}&|G(r_2)-G(r_1)|_{L_t^1(H^1)}\leqslant\\&C\{\varepsilon(|r_1|_{p_0}^{p_0-1}+|r_2|_{p_0}^{p_0-1})(|r_1|_\infty^{2-p_0}+|r_2|_\infty^{2-p_0})|r_2-r_1|_{p_0}+\\&(|r_1|_{p_0}^{p_0-1}+|r_2|_{p_0}^{p_0-1})(|r_1|_\infty^{3-p_0}+|r_2|_\infty^{3-p_0})|r_2-r_1|_{p_0}+\\&(|r_1|_\infty+|r_2|_\infty)|r_2-r_1|\}\leqslant\\&C(\varepsilon^{3e_\infty+p_0(e_0-e_\infty)-e_0}|r_2-r_1|_{p_0}+\varepsilon^{e_\infty}|r_2-r_1|_\infty)_\infty\end{aligned}$$

这就推出式(7.2.28),

$$\begin{aligned}&|K(r_2)-K(r_1)|_{p_0}+|K(r_2)-K(r_1)|_\infty\leqslant\\&C\varepsilon^{-\frac{\mu}{p_0}}(\varepsilon^{3e_\infty+p_0(e_0-e_\infty)-e_0}|r_2-r_1|_{p_0}+\varepsilon^{e_\infty}|r_2-r_1|_\infty)\end{aligned}$$

因

$$\min\{e_\infty,3e_\infty+p_0(e_0-e_\infty)-e_0\}>\frac{\mu}{p_0}$$

因此 K 当 $\varepsilon>0$ 充分小时在 S 上为压缩算子。

推之,对 $\varepsilon>0$ 充分小,对一切 $\alpha\in[0,T]$,存在映照 K 的惟一不动点,表以 $r(\alpha,\varepsilon)$。如

$$\langle D^{-1}(Q-M^*L^{-1}P)\varepsilon F+G(r(\alpha,\varepsilon)),\chi^*\rangle=0\tag{7.2.31}$$

则 $r(\alpha,\varepsilon)$为原来方程(7.2.8)的解。

为了寻找 $\alpha(\varepsilon)$使得式(7.2.31)对 $r(\alpha(\varepsilon),\varepsilon)$成立。我们开始考虑 K 对 α 的依赖性。对固定 $\varepsilon>0$,D 与 α 无关。而$\partial_\alpha m,\partial_\alpha m_1$ 具有对 t 的指数衰减性。为证明 L^{-1}对 α 的光滑性,我们考虑 $u=A_1(t,s)w$,它是线性方程的解:

$$Lu=0,\quad u(s)=0,\quad u_t(s)=w\in PH^1$$

为了得到对 $v=\partial_\alpha u=\partial_\alpha A_1(t,s)w$ 的先验估计,我们考虑

$$\begin{aligned}&Lv=P(\partial_\alpha m+\partial_\alpha m_1\partial_t)u=P(\partial_\alpha m+\partial_\alpha m_1\partial_t)A_1(t,s)w,\\&v(s)=0,\quad v_t(s)=0\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&\partial_\alpha A_1(t,s)w=v(t)=\int_s^tA_1(t,\tau)P(\partial_\alpha m+\partial_\alpha m_1\partial_t)A_1(\tau,s)w\mathrm{d}\tau=\\&\int_s^tA_1(t,\tau)P[\partial_\alpha mA_1(\tau,s)+\partial_\alpha m_1\partial_tA_1(\tau,s)]\mathrm{d}\tau w\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\partial_\alpha\partial_tA_1(t,s)w=v_t(t)=\\&\int_s^t\partial_tA_1(t,\tau)P[\partial_\alpha mA_1(\tau,s)+\partial_\alpha m_1\partial_tA_1(\tau,s)]\mathrm{d}\tau w\end{aligned}$$

因此,对任何 $g\in L_t^1(PH^1)$

$$\begin{aligned}&|\partial_\alpha L^{-1}g(t)|_{H^2}+|\partial_\alpha(\partial_tL^{-1}g)(t)|_{H^1}\leqslant\\&C\int_{-\infty}^t\int_s^t\mathrm{e}^{-\sigma|t-\alpha|-2\varepsilon^{\mu}(t-s)}|g(s)|_{H^1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\\&C\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-2\varepsilon^{\mu}(t-s)}|g(s)|_{H^1}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

可得

$$|(\partial_\alpha L^{-1})g|_{W_t^{1,p}(H^1)}\leqslant C\varepsilon^{-\frac{\mu}{p}}|g|_{L_t^1(H^1)}$$

利用这个估计,易得 L^{-1}和 $\widetilde{M}=-\alpha(m+m_1\partial_t)Q-M^*L^{-1}M$ 对α 为 C^1。推出$(I+D^{-1}\widetilde{M})^*$对应特征值 $\lambda\approx0$ 的特征函数 χ^*,$(I+D^{-1}\widetilde{M})^*\chi^*=\lambda\chi^*$ 和 Π 投影到$(\chi^*)^\perp=R(I+D^{-1}\widetilde{M})$(式(7.2.29)所定义的)均为 α 的C^1 函数。为证 $r(\alpha,\varepsilon)$对 α 为C^1 函

数，注意到

$$|\partial_\alpha F(t)|_{H^1} \leqslant Ce^{-\sigma|t-\alpha|}$$

对一切 $r \in W_t^{1,p_0}(H^1) \cap W_t^{1,\infty}(H^1)$，

$$|\partial_\alpha G(r(t),t)|_{H^1} \leqslant Ce^{-\sigma|t-\alpha|}(|r|_{H^1}^2 + \varepsilon |r_t|_{H^1}^2)$$

因此

$$\varepsilon |\partial_\alpha F|_{L_t^1(H^1)} + |\partial_\alpha G(r)|_{L_t^1(H^1)} \leqslant C(\varepsilon + |r|_\infty^2)$$

这就推出 K 对 α 是可微的，且 $r(\alpha,\varepsilon) \in C^1(\alpha)$。

最后，为证明对某 $\alpha(\varepsilon)$ 满足方程(7.2.31)，我们利用如下的隐函数定理：

引理 7.2.6 设

$$H(x,y) = f(x) + g(x,y)$$

为定义在$(0,0) \in R^2$ 的邻域 U 里的函数，满足：

(1) $f(x) \in C^0, f(0) = 0, f'(0)$存在，且 $f'(0) \neq 0$；

(2) $g(x,y)$对 x 连续(对每个固定 y)，且 $|g(x,y)| \leqslant C|y|^\delta, \delta > 0$。

则对充分小的 y，存在 $H(x,y) = 0$ 的一个解$(x(y),y)$。

证明：因 $f(0) = 0$，$f'(0) = 0$。存在 $x_1 < 0$，$x_2 > 0$ 使得 $f(x_1)f(x_2) \neq 0$。因此有 $H(x_1,y)H(x_2,y) < 0$，对充分小的 y，注意到$H(x,y)$对 x 连续，以中值定理推出，存在 $x(y) \in (x_1,x_2)$，使得$H(x(y),y) = 0$。

运用这个引理到方程(7.2.31)。写出这个方程为

$$\tilde{E}(\alpha,\varepsilon) = \langle D^{-1}(Q - M^* L^{-1}P)F - \varepsilon^{-1}G(r(\alpha,\varepsilon)),\chi^*\rangle \triangleq$$

$$E_F(\alpha,\varepsilon) + E_G(\alpha,\varepsilon) = 0 \tag{7.2.32}$$

其中：

$$E_F(\alpha,\varepsilon) = \langle D^{-1}(Q - M^* L^{-1}P)F,\chi^*\rangle$$

$$E_G(\alpha,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\langle D^{-1}(Q - M^* L^{-1}P)G,\chi^*\rangle$$

注意到：

$$E_G \leqslant \varepsilon^{-1}|\langle D^{-1}(Q + M^* L^{-1}P)G(r(\varepsilon,\alpha)),\chi^*\rangle| \leqslant$$

$$C\varepsilon^{-1}|G(r(\varepsilon,\alpha))|_{L_t^1(H^1)} \leqslant$$

$$C\varepsilon^{-1}(|r(\varepsilon,\alpha)|_\infty^2 + \varepsilon|r(\varepsilon,\alpha)|_{p_0}^{p_0}|r(\varepsilon,\alpha)|_\infty^{2-p_0} +$$

$$|r(\varepsilon,\alpha)|_\infty^{3-p_0}|r(\varepsilon,\alpha)|_{p_0}^{p_0}) \leqslant$$

$$C\varepsilon^{-1}(\varepsilon^{2e_\infty} + \varepsilon^{(3-p_0)e_\infty + p_0e_0}) \leqslant C\varepsilon^\lambda \tag{7.2.33}$$

其中

$$\lambda = \min\{2e_\infty, 3e_\infty + p_0(e_0 - e_\infty)\} - 1 \tag{7.2.34}$$

从式(7.2.30)知，$\lambda > 0$。为估计 E_F，分两种情况：

当 $\mu = 1$，此时因 $F \in C^1, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$，如同引理 7.2.3 所证，$E_F$ 对ε 是C^1 函数，$\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$，令

$$E(\alpha) = E_F(\alpha,0) = \langle D^{-1}(Q - M^* L^{-1}P)F,\chi^*\rangle|_{\varepsilon=0}$$

则

$$E_F(\alpha,\varepsilon) = E(\alpha) + O(\varepsilon)$$

且

$$\tilde{E}(\alpha,\varepsilon) = E(\alpha) + O(\varepsilon^\lambda) \tag{7.2.35}$$

当 $\mu \in (1,2)$，此时情况是类似的，由 $E(\alpha) = E_F(\alpha,0)$，有

$$\tilde{E}(\alpha,\varepsilon) = E(\alpha) + O(\varepsilon^{\mu-1}) + O(\varepsilon^\lambda) \tag{7.2.36}$$

其中 $O(\varepsilon^{\mu-1})$来自 F 表示式中的项$\varepsilon^{\mu-1}b_{txx}$。

应用引理 7.2.6，对于 $\tilde{E}(\alpha,\varepsilon)$，$E(\alpha)$和高阶项；如用 H,f,g 可得如下定理：

定理 7.2.7(主要定理) 设 $E(\alpha)$具有一个简单零点在$[0,T]$上。则对 $\varepsilon > 0$ 充分小，存在式(7.2.1)的一个解 $u(x,t)$同宿于一个与 x 无关的时间周期解(从 $u = 0$ 形成的)。进一步，u 不存在渐进位相差，当 $t \to \pm\infty$时。

附注：$E(\alpha)$具有 Melnihov 函数形式

$$E(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}[f(t+\alpha,b(x,t),b_t(x,t))b(x,t) -$$

$$2\delta_{\mu,1}b_{tx}(t,x)^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7.2.37}$$

其中 $\mu=1$ 时，$\delta_{\mu,1}=1$；其余情况 $\delta_{\mu,1}=0$。

事实上，当 $\epsilon=0$ 时，有

$$\mathscr{L} = \partial_{tt} - a^2\partial_{xx} - \cos b$$

b_t 为 $\mathscr{L}_u=0$ 的一个解。推出 $Pb_t = L^{-1}MQb_t$。另外，注意到 D_0 和 $L^{-1}|_{\epsilon=0}$是自伴的，$\chi^*|_{\epsilon=0}=D_0Qb_t$。因此

$$\begin{aligned}E(\alpha) = &\langle D_0^{-1}(Q + M^* L^{-1}P)F, D_0Qb_t\rangle = \\ &\langle QF, Qb_t\rangle + \langle PF, Pb_t\rangle = \\ &\langle F, b_t\rangle = \\ &-2\delta_{\mu,1}\langle b_{tx}, b_{tx}\rangle + \langle f(t,b,b_t), b_t\rangle + \\ &\langle(\cos b - 1)\partial_\epsilon p - f(t,0,0), b_t\rangle\end{aligned}$$

因 b 为未扰动方程的解，可计算得到

$$\langle(\cos b - 1)\partial_\epsilon p - f(t,0,0), b_t\rangle = 0$$

因此

$$E(\alpha) = -2\delta_{\mu,1}\langle b_{tx}, b_{tx}\rangle + \langle f(t,b,b_t), b_t\rangle$$

它等价于式(7.2.37)。

附注：事实上，更加一般的光滑函数 $f(t,u,d)$仅对 t 周期，而不必具有式(7.2.2)的形式，如 f 满足：

$$(4a^2-1)(8-\max f_d(t,0,0)) + \min f_{1u}(t,0,0) > 0$$

对于 $\mu=1$，定理同样成立。证明是类似的。

7.3 一类 Klein-Gordon 方程小扰动下同宿轨道的不变性

考虑方程

$$u_{tt} - u_{xx} - m^2u + 2u^3 = \epsilon[f(x,t) + g(x,t;u;\lambda)] \tag{7.3.1}$$

其中 $m^2<1$；f、g 为 x、t 的光滑函数，对 x 具有 2π 周期且为偶函数；g 为 $\lambda\in l_1^2(|\lambda|_{l_1}^2=\sum_k k^2\lambda_k^2)$的光滑函数，现再限制对 x,t 均为偶函数。

对 $\epsilon=0$，零解是一个不稳定不动点，$m^2<1$ 保证零且有一维稳定和不稳定流形(由与 x 有关的函数组成和一个余维 2 的中心流形)。无论如何稳定和不稳定相连，产生一个同宿于原点的同宿轨道。

$$b = m\,\mathrm{sech}\,mt \tag{7.3.2}$$

对 $\epsilon>0$，我们将证明在零解产生的同宿轨道、周期解的扰动下，同宿轨道是不变的。

先考虑关于同宿轨道 b 的线性化方程：

$$r_{tt} - r_{xx} - m^2r + bm^2\mathrm{sech}^2 mtr = 0 \tag{7.3.3}$$

函数 $b(t)$提供了式(7.3.3)的一个解，它当 $t\to\pm\infty$时指数衰减，但是不合适的，因此对 t 是奇的，从 F 氏展开，可得 $k>1$ 由$\{R_{1k}, R_{2k}, k=1,2,\cdots,\}$线性组合的任何解，其中

$$R_{ik}(x,t) = \hat{R}_{ik}(t)\cos kx \tag{7.3.4}$$

其中

$$\hat{R}_{ik}(t) = \frac{w_k^2 + m^2 - 3m\tanh^2 t}{w^2 + m^2}\cos w_k t - \frac{3w_k m\tanh t}{w^2 + m^2}\sin w_k t$$

$w_k^2 = k^2 - m^2$，存在对于 $\hat{R}_{2k}(t)$偶函数的类似表示。我们视 $R_{ik}(x,t)$为辐射态，因它们仅仅是有界的，而当 $t\to\pm\infty$时不衰减，它们和不动点在原点的切空间的“中心方向”相联系。

如同耗散情况，我们研究线性问题

$$\mathscr{L}r = r_{tt} - r_{xx} - m^2r + 6b^2(t)r = f(x,t) \tag{7.3.5}$$

其中 $f\in L_t^1(L_x^2)$。

为求 $\mathscr{L}$ 的逆，引入投影

$$Qr = a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(x,t)\,\mathrm{d}x$$

$$Pr = v = (I - Q)r$$

考虑方程(7.3.5)作为一对方程：

$$Lv = f_1 = Pf \tag{7.3.6a}$$

$$Da = f_2 = Qf \tag{7.3.6b}$$

其中

$$L = P\mathscr{L}P = \partial_t^2 - \partial_x^2 - m^2 + 6b^2(t)$$

$$D = Q\mathscr{L}Q = \partial_t^2 - m^2 + 6b^2(t)$$

算子 D 是强椭圆算子，$D_0 = \partial_t^2 - m^2$，它具有给定边界条件下确定逆的扰动。算子 L 为波动方程 $L_0 = \partial_t^2 - \partial_x^2 - m$ 限制在 PH^1 上的扰动。L 的逆能用辐射态 $R_{1k}(x,t)$ 作明确的计算。从 L^{-1} 的明显表达式可证明如下。

命题 7.3.1

$$Lv = 0 \tag{7.3.7}$$

的有限能量解为在能量模 $t \in R$ 中是一致有界的。这里能量模给定为：

$$|v(t)|_e^2 = \int [v_t^2 + v_x^2 - m^2 v] \mathrm{d}x$$

命题 7.3.2

$$Lv = f_1 \tag{7.3.8}$$

的任何有限能量解是对 $t \in R$ 一致有界的，其中 $f_1 \in L_t^1(QL_x^2)$ 且惟一地为初值 v_h 在 $t = -\infty$ 上所决定。即

$$v(t) = v_h(t) + \int_{-\infty}^t K(t,s) f(s) \mathrm{d}s$$

其中 $v_h(t)$ 是齐次方程 $Lv_h = 0$ 的解，K 的 F 氏系数为 $K_e(t,s) = \hat{R}_{1e}(s)\hat{R}_{2e}(s)\cdots\hat{R}_{2e}(t)\hat{R}_{1e}(t)$。

这些命题直接导致如下关于解在 $t = -\infty$ 消失的推论。

推论 7.3.3 给定 $f_1 \in L_t^1(PL_x^2)$，方程(7.3.8)具有惟一的有限能量解 v，使得

$$|v(t)|_e \leqslant c\int_{-\infty}^t |f_1|_{L_x^2} \mathrm{d}s$$

解 v 为

$$v(t) = L^{-1}f_1 = \int_{-\infty}^t K(t,s) f_1(s) \mathrm{d}s$$

进一步 $v(t) \to 0 (t \to \infty)$ 当且仅当

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t,s) f_1(s) \mathrm{d}s = 0 \tag{7.3.9}$$

现设外力项 f_1 具有指数衰减 $\alpha < m$

$$\exp(\alpha |t|) f_1 \in L_t^\infty(L_x^2) \tag{7.3.10}$$

引入衰减函数

$$L_\alpha^\infty(L^2) = \{u; |u|_{L_\alpha^\infty(L_x^2)} = \sup_t e^{\alpha t} |u(t)|_{L_x^2} < \infty\}$$

$$L_\alpha^\infty(H^1) = \{u; |u|_{L_\alpha^\infty(H^1)} = \sup_t e^{\alpha |t|} |u(t)|_{H^1} < \infty\}$$

命题 7.3.4 考虑线性问题

$$Lv = f_1$$

其中 $f_1 \in L_\alpha^\infty(L_x^2)$，$0 < \alpha < m$ 则 $v(t) = L^{-1}f_1$ 满足：

$$\exp(\alpha |t|) v \in L_t^\infty(H^1)$$

当且仅当

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s) f_1(s) \mathrm{d}s = 0$$

最后，寻求偶函数空间的解

$$Da = f_2$$

其中 $D = \partial_{tt} - m^2 + 6b^2(t)$，$\exp(\alpha|t|) f_2 \in L_t^\infty$。我们注意到仅有一个障碍对于 D^{-1}，即函数 Qb_t 对 t 是奇的，因此对于 $0 < \alpha < m$，可得 $D^{-1}f_2 \in L_\alpha^\infty$。

现对线性方程综合这些结果，利用 Fredholm Alternative 定理：

定理 7.3.5 考虑线性方程(7.3.5)

$$\mathscr{L}r = r_{tt} - r_{xx} - m^2 r + 6b^2(t) r = f(x,t)$$

其中外力项 f 为偶函数，满足衰减条件

$$\exp(\alpha|t|)f \in L_t^\infty(L_x^2), \quad 0 < \alpha < m$$

方程具有惟一解 $r(t)$,满足 $\lim\limits_{t\to-\infty} r=0$

$$r(t) = \mathscr{L}^{-1}f$$

这个解满足

$$\exp(\alpha|t|)r \in L_t^\infty(H^1)$$

当且仅当 $f_1 = Pf$ 满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)f_1(s)\mathrm{d}s = 0 \tag{7.3.11}$$

它等价于

$$\langle f, R_{1k}\rangle = 0, \qquad \forall k = 1,2,\cdots \tag{7.3.12}$$

现考虑同宿轨道的存在性,在给定方程(7.3.1)对于零解扰动为阶 ε 的周期解,注意到在偶 2π 周期函数空间 $H^1(S^1\times S^1)$线性波动方程:

$$w = \partial_t^2 - \partial_x^2 - m^2$$

具有符号

$$\hat{w}(j,k) = -j^2 + k^2 - m^2, \quad \forall j,k \in Z,\text{且}$$

$$|\hat{w}(j,k)| \geqslant ||j^2 - k^2| - m^2| \geqslant \min(1-m^2, m^2)$$

这推出 w 在 $H^1(S^1\times S^1)$上具有有界逆,且

$$u = w^{-1}[\varepsilon f + g - 2u^3]$$

由隐函数定理,我们得到惟一解

$$u = \varepsilon p(x,t;\lambda,\varepsilon)$$

其中 p 对 ε 是光滑的,且

$$p(x,t;\lambda,\varepsilon) = p_0(x,t) + O(\varepsilon)$$

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 - m^2)p_0 = f(x,t)$$

$$|p(\cdot,\cdot;\lambda,\varepsilon)|_{H^1} \leqslant C$$

其中 C 依赖于 $|f|_{H^1}, |\lambda|_{l_1^2}$ 和 ε。

线性化方程(7.3.1)关于 $b+\varepsilon p$ 为

$$u = b + \varepsilon p + \varepsilon r$$

可得

$$r_{tt} - r_{xx} - m^2 r + 6m^2\operatorname{sech}^2(mt)r = -6p_0m^2\operatorname{sech}mt + g(x,t;b,\lambda) + \varepsilon G \tag{7.3.13}$$

其中 G 依赖于 $|r|_{H^1}, |\lambda|_{l_1^2}$ 和 ε。

证明对于同宿于 εp 轨道存在性等价于寻求方程(7.3.13)的一解 r,当 $t\to\pm\infty$ 时,$r\to 0$。

首先选取 $\lambda\in l_1^2$ 使得定理 7.3.5 的假设满足。再引用压缩映照原理证明方程(7.3.13)解的存在。

命题 7.3.6 给定 $r\in L_\alpha^\infty(H^1)$, $g\in H^1(S^1\times S^1)$使得

$$B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} K(x,t)(-6p_0m^2\operatorname{sech}^2 mt + g)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7.3.14}$$

具有简单零点 λ_0,即算子

$M = \{M_{ik}\}$ 在 l_1^2 上可逆。

其中

$$M_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} R_i(x,s)\frac{\delta g}{\delta\lambda_k}(x,s;b;\lambda_0)(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

这里 $R = \{R_k\}, k=1,2,\cdots$,则对充分小的 r,使得

$$\lambda^*(r) \in l_1^2$$

对 r 是 Lip 的。且

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t;s)[-6p_0m^2\operatorname{sech}^2 mt + g + \varepsilon G]\mathrm{d}s = 0 \tag{7.3.15}$$

证明:从定理 7.3.5,上面方程等价于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} R_{1k}(x,s)[-6p_0m^2\operatorname{sech}^2 mt + g + \varepsilon G]\mathrm{d}x\mathrm{d}s = 0$$

$k=1,2,\cdots$,在方程中对 ε 无关项为

$$B_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} R_{1h}[-6p_0m^2\operatorname{sech}^2 mt + g]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

它能写成

$$B(\lambda) = M(\lambda - \lambda_0) + O(\lambda - \lambda_0)$$

其中 M 在 l_1^2 上为

$$M_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} R_{1k}(x,t)\partial_{\lambda l}g(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

因 M 在 l_1^2 上为有界逆,方程(7.3.15)可写成

$$\lambda = F(r,\lambda,\varepsilon) = \lambda_0 + M^{-1}\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} RG\mathrm{d}x\mathrm{d}t + O(\lambda - \lambda_0)$$

进一步,对任何函数 $F \in L_\alpha^\infty(H^1)$,有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} RF\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|_{l_1^2} \leqslant C \mid F \mid_{L_\alpha^\infty}(H^1)$$

由此推出,对于 $|r|_{L_\alpha^\infty(H^1)} \leqslant A$

$$|F|_{l_1^2} \leqslant C(A, |\lambda|_{l_1^2}, \varepsilon)$$

$$|F(r_1,\lambda_1,\varepsilon) - F(r_2,\lambda_2,\varepsilon)|_{l_1^2} \leqslant$$

$$C(A,\lambda_1,\lambda_2)\varepsilon[\,|\lambda_1 - \lambda_2|_{l_1^2} + |r_1 - r_2|_{L_\alpha^\infty(H^1)}]$$

由压缩映像原理,可推出存在 $\varepsilon_0(A)$ 使得

$$|\varepsilon| < \varepsilon_0(A)$$

方程(7.3.15)具有惟一解

$$\lambda_* = \lambda_0 + O(\varepsilon)$$

且对 r 是 Lip 的。

定理 7.3.7 任意给定 ε 充分小,g 如命题 7.3.6,存在 $\lambda \in l_1^2$ 使得方程(7.3.13)具有一解 $r \in L_\alpha^\infty(H^1)$,$0 < \alpha < m$。

证明:选取 λ 于命题 7.3.6 中,方程(7.3.13)可写成

$$r = \mathscr{L}^{-1}g(r,\varepsilon)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} R_{1k}g(r,\varepsilon)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varepsilon = 0 \qquad (7.3.16)$$

从定理 7.3.5,可得

$$|r|_{L_\alpha^\infty(H^1)} \leqslant A$$

$$|\mathscr{L}^{-1}g(r,\varepsilon)|_{L_\alpha^\infty(H^1)} \leqslant C(|p_0|_{H^1(S^1\times S^1)} + |\lambda_*|_{l_1^2}) + \varepsilon C(A)$$

$$|\mathscr{L}^{-1}[g(r_1,\varepsilon_1) - g(r_2,\varepsilon)]|_{L_\alpha^\infty(H^1)} \leqslant C(A,\varepsilon)\,|r_1 - r_2|_{L_\alpha^\infty(H^1)}$$

选取 $A = 2(|p_0| + |\lambda_0|)$ 和 $\varepsilon c(A,\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}$,用压缩映照原理可得方程(7.3.13)具有惟一解,在球 $|r|_{L_\alpha^\infty(H^1)} \leqslant A$ 之内。

附注 7.3.8 定理建立了一类扰动下同宿轨道的不变性,这种情况不是空集。

令 $g = (\sum_l \lambda_l \cos lx \cos lt)u^2$,此时算子 M 具有对角矩阵

$$M_{hl} = \delta_{hl}\left[1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right]$$

它在 l_1^2 上可逆。

附注 7.3.9 我们考虑 Sine-Gordon 方程

$$u_{tt} - c^2u_{xx} - \sin u = \varepsilon[f(x,t) + g(x,t;\lambda,u)]$$

关于呼吸子 $b(x,t)$ 的不变性,其中对于 x 为 2π 周期的奇性的。f、g 为 2π 空间、时间周期的,但有时是很复杂的。例如线性方程组是耦合的,以及辐射态要求用完全可积性去明显表述和应用时间相关散射理论去证明它们是完备的等。这是考虑"呼吸子"的不变性为守恒扰动是自治的情况。

$$u_{tt} - c^2u_{xx} - \sin u = \varepsilon\sum_1^\infty \lambda_i u^i \qquad (7.3.17)$$

不变性的分析归结为考虑参数 $\{\lambda_i\}$ 满足的方程

$$M(c)\lambda + O(\varepsilon\lambda) = 0 \qquad (7.3.18)$$

其中:矩阵 M 是形式:

$$M_{kl}(c) = (R_k, b^l)$$

$\{R_k\}$ 表示线性化 Sine-Gordon 方程的辐射态,关于未扰动呼吸子

$b(x,t)$为使呼吸子保持不变，M 应是可逆的，不幸的是，这是困难的，分析这些可逆性，式(7.3.17)更自然地扰动为

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \sin u = \varepsilon \sum_{1}^{\infty} \lambda_i u^i + \varepsilon g(u, u_t, u_x) \quad (7.3.19)$$

此时参数方程能取形式

$$M(c)\lambda + N(c) + O(\varepsilon\lambda) = 0 \quad (7.3.20)$$

其中外力项 $N(c)$具形式

$$N_k = \langle R_k, g(b, b_t) \rangle$$

外力项 $g(u, u_t)$提供附加的自由度，如矩阵 M 是可逆的，解析理论将建立呼吸子的不变性。

第八章　扰动高阶非线性 Schrödinger 方程同宿轨道的不变性

8.1　扰动三次—五次 NLS 方程同宿轨道的不变性

我们考虑扰动三次—五次 NLS 方程：

$$iq_t = q_{xx} + 2(q\bar{q} - \omega^2) q +$$
$$i\varepsilon(\mathrm{D}q - \Gamma - m|q|^4 q - n|q|^2 q) \quad (8.1.1)$$

这里 q 关于 x 是偶的且有 2π 周期，D 是有界耗散算子，被假定具有形式

$$\mathrm{D}q = -\alpha q + \beta \mathrm{B}q \quad (8.1.2)$$

B 是∂_{xx}的 Fourier 截断，即

$$\mathrm{B}\cos kx = \begin{cases} -k^2 \cos kx, & k < K \\ 0, & k \geq K \end{cases} \quad (8.1.3)$$

其中 K 为某个正整数，α、β 为正常数，$m \geq 0$, $n \geq 0$, $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，$\varepsilon > 0$是一个小的扰动参数。我们将证明，对于 ε 充分小和适当的参数值，方程(8.1.1)存在一个解同宿到平衡点。

8.1.1　一些基本结果

8.1.1.1　解的存在性与正则性

设 $H^1_{e,p}$是偶的，2π 周期函数构成的 Sobolev 空间，它的函数及其导数平方可积。则在 $H^1_{e,p}$上，关于式(8.1.1)的 Cauchy 问题是

适定的,即有:

定理 8.1.1 对于 $q_0 \in H^1_{e,p}$ 和 $t \in (-\infty, \infty)$,存在方程(8.1.1)的惟一解 $q(t, q_0)$ 关于 t 连续且使得 $q|_{t=t_0} = q_0$。同时,$q(t, \cdot; \cdot)$ 光滑地依赖于 q_0 和 ε。

定理的证明是能量方法的标准应用。

8.1.1.2 空间无关解分析

关于式(8.1.1),常值平面 Π_c:

$$\Pi_c \equiv \{q(x,t) \mid \partial_x q(x,t) = 0\}$$

是一个不变平面,且在 Π_c 上方程变为

$$iq_t = 2(q\bar{q} - \omega^2)q - i\varepsilon(\alpha q + \Gamma + m|q|^4 q + n|q|^2 q) \tag{8.1.4}$$

引入极坐标:

$$q = \sqrt{I}\exp\{i\theta\}$$

方程(8.1.4)化为

$$\begin{cases} I_t = -2\varepsilon[\alpha I + nI^2 + mI^3 + \Gamma\sqrt{I}\cos\theta] \\ \theta_t = -2(I - \omega^2) + \varepsilon\Gamma\sin\theta/\sqrt{I} \end{cases} \tag{8.1.5}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,在 Π_c 上的未扰动方程组具有形式

$$\begin{cases} I_t = 0 \\ \theta_t = -2(I - \omega^2) \end{cases}$$

因此,在 Π_c 上,未扰动的轨道是一组圆圈套。其中包含不动点圆 C_ω,它由 $I = \omega^2$ 给出。

当 $\varepsilon > 0$ 时,方程组(8.1.5)的不动点满足:

$$\begin{cases} \Gamma\varepsilon\sin\theta = 2\sqrt{I}(I - \omega^2) \\ \Gamma\varepsilon\cos\theta = -\varepsilon(\alpha\sqrt{I} + nI^{3/2} + mI^{5/2}) \end{cases}$$

求解这个方程组,我们得到两个不动点:

$$\begin{cases} ① \begin{cases} I_p = \omega^2 + \dfrac{\sqrt{h}}{2\omega}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \theta_p = -\arctan\left[\dfrac{\omega\sqrt{h}}{\Gamma^2 - h}\right] - \pi + O(\varepsilon) \end{cases} \\ ② \begin{cases} I_q = \omega^2 - \dfrac{\sqrt{h}}{2\omega}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \theta_q = \arctan\left[\dfrac{\omega\sqrt{h}}{\Gamma^2 - h}\right] - \pi + O(\varepsilon) \end{cases} \end{cases} \tag{8.1.6}$$

这里 $h \equiv \Gamma^2 - \omega^2(\alpha + n\omega^2 + m\omega^4) > 0$,以及对应的增长率:

$$\begin{cases} \sigma_q = \pm 2\sqrt{\varepsilon\omega\sqrt{h}} - \varepsilon(\alpha + 2n\omega^2 + 3m\omega^4) + O(\varepsilon^{3/2}) \\ \sigma_p = \pm 2i\sqrt{\varepsilon\omega\sqrt{h}} - \varepsilon(\alpha + 2n\omega^2 + 3m\omega^4) + O(\varepsilon^{3/2}) \end{cases} \tag{8.1.7}$$

因此,对于 $\varepsilon > 0$,在 C_ω 附近存在两个不动点:一个鞍点 Q 和一个螺线收点 P,它们的增长率分别为 σ_q 和 σ_p,引入变量 J:

$$J = I - \omega^2$$

方程组(8.1.5)化为

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J + \omega^2) + n(J + \omega^2)^2 + \\ \qquad m(J + \omega^2)^3 + \Gamma\sqrt{J + \omega^2}\cos\theta] \\ \theta_t = -2J + \varepsilon\Gamma\sin\theta/\sqrt{J + \omega^2} \end{cases} \tag{8.1.8}$$

为了刻划 Q 的稳定流形附近的流,我们重新标度坐标:

$$\begin{cases} \tau = \nu t \\ J = \nu j, \qquad \nu = \sqrt{\varepsilon} \end{cases} \tag{8.1.9}$$

在新的坐标之下,方程组(8.1.8)化为

$$\begin{cases} j_\tau = -2[\alpha(\nu j+\omega^2)+n(\nu j+\omega^2)^2+ \\ \qquad m(\nu j+\omega^2)^3+\Gamma\sqrt{\nu j+\omega^2}\cos\theta] \\ \theta_\tau = -2j+\dfrac{\nu\Gamma\sin\theta}{\sqrt{\nu j+\omega^2}} \end{cases} \tag{8.1.10}$$

令 $y=(j,\theta)^{\mathrm{T}}$,则式(8.1.10)能写作

$$y_\tau = Y(y;\nu) \tag{8.1.11}$$

这里 $Y=(Y_1,Y_2)^{\mathrm{T}}$,由式(8.1.10)所确定。利用这组变量,不动点 Q 有坐标 $y_q=(j_q,\theta_q)$:

$$j_q = -\frac{\sqrt{h}}{2\omega}\nu+O(\nu^3)$$

$$\theta_q = \arctan\left[\frac{\omega\sqrt{h}}{\Gamma^2-h}\right]-\pi+O(\nu^2)$$

关于 y_q 线性化方程组(8.1.10)并让 $\tilde{y}=y-y_q$,得

$$\tilde{y}_\tau = Y'(y_q,\nu)\tilde{y}+O(\tilde{y}^2)$$

这里 $Y'(y_q,\nu)$是一个 2×2 矩阵:

$$\begin{bmatrix} -2\alpha\nu-4n\nu(\nu j+\omega^2)-6m\nu(\nu j+\omega^2)^2-\dfrac{\nu\Gamma\cos\theta}{\sqrt{\nu j+\omega^2}} & 2\sqrt{\nu j+\omega^2}\,\Gamma\sin\theta \\ -2-\dfrac{\varepsilon\Gamma\sin\theta}{2\sqrt{(\nu j+\omega^2)^3}} & \dfrac{\nu\Gamma\cos\theta}{\sqrt{\nu j+\omega^2}} \end{bmatrix}_{(j_q,\theta_q)}$$

于是,$Y'(y_q,\nu)$的特征值是

$$\begin{cases} \lambda = -2\sqrt{\omega\sqrt{h}}-\nu(\alpha+2n\omega^2+3m\omega^4)+O(\nu^2) \\ \mu = 2\sqrt{\omega\sqrt{h}}-\nu(\alpha+2n\omega^2+3m\omega^4)+O(\nu^2) \end{cases} \tag{8.1.12}$$

对应特征向量分别为 $e_1(\nu)$和 $e_2(\nu)$。这些特征向量光滑地依赖于 ν,且

$$e_1(0) = \left(\frac{\xi}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$$

$$e_2(0) = \left(-\frac{\xi}{2},1\right)^{\mathrm{T}},\quad \xi = 2\sqrt{\omega\sqrt{h}}$$

这表明 Q(或者 y_q)是鞍点。

由正则扰动理论和不变流形定理知,对于 ε 充分小,在 Q 的一个不依赖 ε 的开邻域 U 里,Q 的稳定流形是 ν 的光滑函数。因此,Q 的稳定流形的一个部分能够被参数化。

$$\begin{cases} y = y_*(s,\nu) \\ s = \exp\{\lambda\tau\} \end{cases} \tag{8.1.13}$$

这里 $0\leqslant s\leqslant s_*=\exp\{\lambda\tau_*\}$,$s_*$很小且与 ε 无关。

我们注意到,Q 是点 $Q_0=(j_0,\theta_0)$的一个阶 $O(\nu)$扰动,其中

$$j_0 = 0$$

$$\theta_0 = \arctan\left[\frac{\omega\sqrt{h}}{\Gamma^2-h}\right]-\pi$$

而且式(8.1.10)是如下保守系统的一个阶 $O(\nu)$扰动:

$$j_\tau = -2[\alpha\omega^2+n\omega^4+m\omega^6+\Gamma\omega\cos\theta]$$

$$\theta_t = -2j$$

这个系统的能量是

$$E(j,\theta) = \frac{1}{2}j^2-[\alpha\omega^2\theta+n\omega^4\theta+m\omega^6\theta+\Gamma\omega\sin\theta] \tag{8.1.14}$$

这里曲线 $E(j,\theta)=E(j_0,\theta_0)$是保守系统的稳定流形,用 C_0^s 表示,C_0^s: $y_0(\tau)=(j_0(\tau),\theta_0(\tau))$。

若我们固定 $\tau_0<\tau_*$,则由正则扰动理论得,对于 $\tau_0<\tau<\tau_*$,Q 的稳定流形满足:

$$y = y_0(\tau)+O(\nu)$$

因此,假若我们用 C_ε^s 表示 Q 的稳定流形对应于 $\tau\in(\tau_0,\infty)$的部

分，那么 C_ε^s 能通过 $s\in[0,s_0]$ 参数化

$$y = y_*(s,\nu)$$
$$s = \exp\{\lambda\tau\}$$

这里 y_* 是 s 和 ν 的光滑函数。于是，曲线 y_* 在 $\tau_0<\tau$ 时阶 $O(\nu)$ 接近于 y_0。

为了描述 C_ε^s 附近的流，我们采用第五章中相同的方法引入坐标 (r,s)。在这组坐标之下，方程组(8.1.10)能被写作

$$\begin{cases} r_\tau = a(s,\nu)r + O(r^2) \\ s_\tau = \lambda s + b(s,\nu)r + O(r^2) \end{cases} \tag{8.1.15}$$

这里 a 和 b 是 (s,ν) 的光滑函数且 $0<s<s_0$。关于这组坐标，C_ε^s 对应于 $r=0$，且在 C_ε^s 上的流满足：

$$s_\tau = \lambda s$$

进一步，因为 $e_1(\nu)$ 在 Q 点与 C_ε^s 相切，则 $a(0,\nu)=\mu$。

虽然 (r,s) 方程组比式(8.1.10)更简单，但它还不是刻划 C_ε^s 附近流的最好形式。原因在于，耦合项 $b(s,\nu)r$ 可以剧烈地改变 s 流。因此，我们引入一个新的变量 η，它的线性流在 $\tau\to\infty$ 时将不受 r 方程的影响。具体地，对于小的 s，让

$$s = \eta + (h_0 + h_1\eta)r \tag{8.1.16}$$

这里常数 h_0 和 h_1 由下式确定：

$$h_0 = \frac{b_0}{\mu-\lambda}, \qquad h_1 = \frac{b_1 - h_0a_1}{\mu}$$

其中 $a=\mu+a_1s+O(s^2)$，$b=b_0+b_1s+O(s^2)$。利用 (r,η) 坐标，方程组(8.1.15)化为

$$\begin{cases} r_\tau = a(\eta,\nu)r + O(r^2) \\ \eta_\tau = \lambda\eta + c(\eta,\nu)r + O(r^2) \end{cases} \tag{8.1.17}$$

这里 $|c(\eta,\nu)|\leqslant c_0|\eta|^2$（在 C_ε^s 上），即 $0\leqslant\eta\leqslant s_0$。

方程组(8.1.17)关于 C_ε^s 的线性化流，即

$$\delta r_\tau = a_*\delta r$$
$$\delta\eta_\tau = \lambda\delta\eta + c_*\delta r$$

与关于 Q 的线性化方程组有相似的扩张和收缩率。

8.1.1.3 来自可积理论的结果

这里，我们简要叙述来自可积理论的一些结果，它们是证明同宿轨道不变性所需要的。

未扰动($\varepsilon=0$)三次—五次 NLS 方程在函数空间 $H_{e,p}^1$ 上是一个 Hamilton 系统：

$$-iq_t = \frac{\delta}{\delta\bar{q}}H \tag{8.1.18}$$

且有 Hamilton 量 H：

$$H = \int_0^{2\pi}[q_x\bar{q}_x - (q\bar{q})^2 + 2\omega^2 q\bar{q}]\,dx$$

众所周知，系统式(8.1.18)有 Lax 对和 Bäcklund (Darboux)变换，是一个完全可积的 Hamilton 系统。

对于系统式(8.1.18)，令 $q_*(t)$ 为一个时间周期解：

$$q_*(t) = r\exp\{-i[2(r^2-\omega^2)t-\gamma]\} = r\exp\{i\theta\}$$

运用 Bäcklund (Darboux)变换，我们能够得到同宿到 $q_*(t)$ 的精确解：

$$q_h^\pm = \left\{\frac{\cos^2p\cosh\tau - i\sin^2p\sinh\tau \pm \sin p\cos x}{\cosh\tau \mp \sin p\cos x}\right\}q_*(t) \tag{8.1.19}$$

这里 $\tau=\sigma_r(t+t_0)$，$\sigma_r=\sqrt{4r^2-1}$，$\exp\{ip\}=\dfrac{1+i\sigma_r}{2r}$。而式中的 ± 号表示“数字 8”的两叶，即存在同宿轨道的对称偶。式(8.1.19)提供了关于“Whiskered circle”的显式表达式。进一步，它也提供了不稳定流形的一个表达式：

$$W^u(C_r) = W^s(C_r) = \bigcup_{\gamma,t_0,\pm} q_h^\pm(t;\gamma,t_0,r)$$

其中 C_r 是前面给出的时间周期解 $q_*(t)$。

与第五章和文献[98]所讨论的情况一样，我们引入一个重要的不变量 F

$$F = \Delta(\lambda^c(q);q)$$

这里 Δ 是所谓的“Floquet 判别式”。F 与 Hamilton 量 H 的 Poisson 括号等于零

$$\{F(q),H(q)\} = 0$$

并且未扰动系统的中心稳定流形 W_0^{cs} 有表达式：

$$W_0^{cs} = W_0^{cu} = \{q \mid F(q) = \pm 2\}$$

具体地，对于 $q_* = r\exp\{i\theta\}$，q_h 是同宿到 q_* 的轨道，我们能够得到

$$\begin{cases} \dfrac{\delta F}{\delta q} = a\{[(\mp \sin p\cosh\tau \pm i\cos p\sinh\tau)\cos x + 1]\}/ \\ \qquad \{[1 \mp \sin p\cos x/\cosh\tau]^2\}r\exp\{i\theta\} \\ \dfrac{\delta F}{\delta \bar{q}} = \overline{\dfrac{\delta F}{\delta q}} \end{cases} \tag{8.1.20}$$

这里 $\tau = \sigma_r(t + t_0)$，$\sigma_r = \sqrt{4r^2 - 1}$，$p = \arctan\sigma_r$，$a = 2\pi\sin^2 p/\cosh^2\tau$。由这个表达式，我们得到

$$F'(q_h(t)) \neq 0$$

$$F'(q_h(t)) \to 0, \qquad t \to \pm\infty$$

而且以指数幂($\exp\{-\sigma_r|t|\}$)趋近于零。这一部分内容的详细叙述可参见第五章或文献[98]。

8.1.2 在 C_ω 的一个邻域里的方程组

8.1.2.1 基本方程组

为了研究不动点圆 C_ω 的一个邻域内非线性问题解的动力学行为，我们利用(J,θ,f)坐标书写方程(8.1.1)，这里 J 和 θ 是常值平面 Π_c 上的坐标，而 $f \in \Pi_c^{\perp}$。这些坐标通过以下方式确定。

首先，让

$$q = [\rho(t) + f(x,t)]\exp\{i\theta(t)\} \tag{8.1.21}$$

这里 ρ 和 θ 是 Π_c 上的极坐标，$f \in \Pi_c^{\perp}$，且 f 有空间均值零 $\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0\right)$，我们用$\langle\cdot\rangle$来表示一个周期上的空间均值。

对于未扰动流，L^2 范是一个常值运动，因此，它被用于代替 ρ：

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q\bar{q}\,\mathrm{d}x = \rho^2 + \langle f\bar{f}\rangle \tag{8.1.22}$$

由于我们是在不动点圆 C_ω 的一个邻域里讨论问题，而 C_ω 对应于 $I = \omega^2$，因此，引入变量 J 是方便的，有

$$J = I - \omega^2 \tag{8.1.23}$$

利用式(8.1.21)～式(8.1.23)，我们可以得到关于坐标(J,θ,f)的方程组：

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + m(J+\omega^2)^3 + n(J+\omega^2)^2] - \\ \qquad 2\varepsilon\sqrt{J+\omega^2}\,\Gamma\cos\theta + \tilde{A}_1(J,\theta,f;\varepsilon) \\ \theta_t = -2J + \dfrac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta + \tilde{A}_2(J,\theta,f;\varepsilon) \\ if_t = L_\varepsilon f + V_\varepsilon f + \omega Q_3(f) + \tilde{A}_3(J,\theta,f;\varepsilon) \end{cases} \tag{8.1.24}$$

这里

$$L_\varepsilon f = f_{xx} + i\varepsilon\hat{D}f + 2\omega^2(f+\bar{f}) - i\varepsilon n\omega^2(2f+\bar{f}) - i\varepsilon m\omega^4(3f+2\bar{f})$$

$$V_\varepsilon f = 2J(f+\bar{f}) + \frac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J+\omega^2}}f\sin\theta - i\varepsilon nJ(2f+\bar{f}) - i\varepsilon m(J^2 + 2J\omega^2)(3f+2\bar{f})$$

$$Q_3(f) = 4(f\bar{f} - \langle f\bar{f}\rangle) + 2(f^2 - \langle f^2\rangle)$$

且对于 J 和 f 在零点的一个小邻域内取值，$\tilde{A}_k(k=1,2,3)$有阶：

$$
\begin{cases}
\tilde{A}_1(J,\theta,f;\varepsilon) = O(\varepsilon f^2) \\
\tilde{A}_2(J,\theta,f;\varepsilon) = O(f^2) \\
\tilde{A}_3(J,\theta,f;\varepsilon) = O(Jf^2 + \varepsilon f^2 + f^3)
\end{cases}
\tag{8.1.25}
$$

同时，$\tilde{A}_k(k=1,2,3)$关于 θ 是 2π 周期的，而方程组(8.1.24)可看作式(8.1.8)的一个扰动。

8.1.2.2 规范形式和局部方程组

点 Q 是方程组(8.1.24)的一个临界点，为了构造一条 Q 的同宿轨道，我们需要估计 Q 的局部稳定流形的大小。变量(J,θ)的大小由 C_ε^s 确定，而 C_ε^s 是 Q 的稳定流形与常值平面 Π_c 的交线为了估计 f 的大小，我们必须利用方程组(8.1.24)中的 f 方程，而这个方程有一个麻烦的二次项 $Q_3(f)$。不过，这个二次项是非共振的，它能够利用规范形式变换被消掉。

运用第五章相同的讨论，我们得到如下命题。

命题 8.1.2 存在一个近似恒等二次映射把方程

$$
i\partial_t f = f_{xx} + 2\omega^2(f+\bar{f}) + \omega Q_3(f)
$$

化为一个含三次非线性项的方程

$$
i\partial_t g = g_{xx} + 2\omega^2(g+\bar{g}) + O(g^3)
$$

这里 $g=f+K(f,\bar{f})$，$K(f,\bar{f})$是一个有界双线性映射。

利用(J,θ,g)坐标，在 C_ω 附近的方程组可写为

$$
\begin{cases}
J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + m(J+\omega^2)^3 + n(J+\omega^2)^2] - \\
\qquad 2\varepsilon\sqrt{J+\omega^2}\,\Gamma\cos\theta + N_1(J,\theta,g;\varepsilon) \\
\theta_t = -2J + \dfrac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta + N_2(J,\theta,g;\varepsilon) \\
ig_t = L_\varepsilon g + V_\varepsilon g + N_3(J,\theta,g;\varepsilon)
\end{cases}
\tag{8.1.26}
$$

这里，对于 J 和 g 属于零点的一个小邻域，有

$$
N_1(J,\theta,g;\varepsilon) = O(\varepsilon g^2)
$$
$$
N_2(J,\theta,g;\varepsilon) = O(g^2)
$$
$$
N_3(J,\theta,g;\varepsilon) = O(Jg^2 + \varepsilon g^2 + g^3)
$$

由于我们将在 C_ω 的一个邻域内讨论实的不变流形，所以引入实坐标系是方便的。让

$$
u = (\mathrm{Re}g, \mathrm{Im}g)^T
$$

则方程组化为

$$
\begin{cases}
J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + m(J+\omega^2)^3 + n(J+\omega^2)^2] - \\
\qquad 2\varepsilon\sqrt{J+\omega^2}\,\Gamma\cos\theta + N_1(J,\theta,u;\varepsilon) \\
\theta_t = -2J + \dfrac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta + N_2(J,\theta,u;\varepsilon) \\
u_t = \tilde{L}_\varepsilon u + \tilde{V}_\varepsilon u + N_3(J,\theta,u;\varepsilon)
\end{cases}
\tag{8.1.27}
$$

其中 N_3 是一个二元向量，且

$$
\tilde{L}_\varepsilon = \boldsymbol{J}\partial_{xx} - 4\omega^2 S + \varepsilon\boldsymbol{D} - 2\varepsilon\omega^2(n+2m\omega^2)P - \varepsilon\omega^2(n+\omega^2 m)I
$$

$$
\tilde{V}_\varepsilon = -4JS + \frac{\varepsilon\Gamma\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}}\boldsymbol{J} - 2\omega J(2mJ+4m\omega^2+n)P - \varepsilon J(mJ+2m\omega^2+n)I
$$

这里 I 是二阶单位阵：

$$
\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

8.1.3 不变流形

8.1.3.1 不变流形的存在性

在 C_ω 的一个邻域内，方程组(8.1.27)可视为如下线性系统的一个扰动：

$$\begin{cases} J_t = 0 \\ \theta_t = -2J \\ u_t = \tilde{L}_\varepsilon u \end{cases} \qquad (8.1.28)$$

为了研究方程组(8.1.27)的解的局部行为,我们必须分析算子 $\tilde{L}_\varepsilon$ 的谱。因此,我们考虑特征值问题:

$$\tilde{L}_\varepsilon e = \lambda e$$

利用 Fourier 展式,我们得到了关于特征值 λ 的二次表达式:

$$[\lambda + \varepsilon d(k)]^2 + 2[\lambda + \varepsilon d(k)](2\varepsilon n\omega^2 + 3\varepsilon m\omega^4) +$$

$$(3\varepsilon n\omega^2 + 5\varepsilon m\omega^4)(\varepsilon\omega^2 n + \varepsilon\omega^4 m) + k^2(k^2 - 4\omega^2) = 0$$

从而有

$$\lambda = -\varepsilon[d(k) + 2\omega^2 n + 3\omega^4 m] \pm$$

$$\sqrt{k^2(4\omega^2 - k^2) + \varepsilon^2\omega^4(n + 2\omega^2 m)^2}$$

这里 $k = 1, 2, 3, \cdots$,且

$$d(k) = \begin{cases} \alpha + k^2\beta, & k < K \\ \alpha, & k \geqslant K \end{cases}$$

表示 $\hat{D}$ 的特征。因为 $\omega \in (\frac{1}{2}, 1)$,则对于 $k = 1$ 有

$$\sigma_{s,u}^\varepsilon = \mp \sigma - \varepsilon[d(1) + 2\omega^2 n + 3\omega^4 m] \qquad (8.1.29)$$

这里 $\sigma = \sqrt{(4\omega^2 - 1) + \varepsilon^2\omega^4(n + 2\omega^2 m)^2}$。特征值 $\sigma_{s,u}^\varepsilon$ 在 $\varepsilon = 0$ 时对应的特征向量分别为:

$$e_{s,u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}(1, \pm\sigma_0)^{\mathrm{T}}, \quad \sigma_0 = \sqrt{4\omega^2 - 1} \qquad (8.1.30)$$

对于 $k \geqslant 2$,特征值是具有负实部的复共轭对:

$$\lambda_k = \pm i\Omega_k - \omega[d(k) + 2\omega^2 n + 3\omega^4 m] \qquad (8.1.31)$$

这里 $\Omega_k = \sqrt{k^2(k^2 - 4\omega^2) - \varepsilon^2\omega^4(n + 2\omega^2 m)^2}$,对于充分小的 $\varepsilon > 0$ 有 $\Omega_k > 0$。

利用特征基、零均值函数 u 能被写做

$$u(x) = v_s e_s(x) + v_u e_u(x) + v_0(x) \qquad (8.1.32)$$

其中 v_s 和 v_u 是实的标量,$v_0(x) \in [\mathrm{span}\{\Pi_c, e_u, e_s\}]^\perp$。采用这组变量,线性方程组(8.1.28)分解为

$$\begin{cases} J_t = 0 \\ \theta_t = -2J \\ v_{s,t} = \sigma_s^\varepsilon v_s \\ v_{u,t} = \sigma_u^\varepsilon v_u \\ v_{0,t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 \end{cases} \qquad (8.1.33)$$

于是,我们有,对于 $\varepsilon = 0$,线性方程组有一个不稳定方向(e_u),一个稳定方向(e_s),和无穷多个中心方向(J, θ, v_0)。记这些中心变量为 v_c($v_c = (J, \theta, v_0)^{\mathrm{T}}$),方程组(8.1.33)简化为

$$\begin{cases} v_{u,t} = \sigma_u^\varepsilon v_u \\ v_{s,t} = \sigma_s^\varepsilon v_s \\ v_{c,t} = A v_c \end{cases} \qquad (8.1.34)$$

这里 A 由式(8.1.33)所定义。

在 C_ω 的一个 δ 邻域内,非线性方程组(8.1.27)可视为线性方程组(8.1.28)的一个扰动。在这个线性方程组的流之下且对于 $\varepsilon = 0$,C_ω 有一维的稳定与不稳定流形,以及余维数为 2 的中心流形。现在,我们的注意力集中在中心流形 $E^c(C_\omega)$,和中心稳定流形 $E^{cs}(C_\omega)$ 与中心不稳定流形 $E^{cu}(C_\omega)$ 上。

$$E^{cs}(C_\omega) = [\mathrm{span}\{e_u\}]^\perp$$

$$E^{cu}(C_\omega) = [\mathrm{span}\{e_s\}]^\perp$$

$$E^c(C_\omega) = [\mathrm{span}\{e_u, e_s\}]^\perp$$

我们将证明,对于 $\varepsilon>0$,这些不变流形在 C_ω 的一个邻域内存在。为此,我们局部化方程组(8.1.27)。

固定一个充分大的整数 n_0 和一个局部化参数 $\delta=a/n_0^2$,这里 a 是一个与 ε 无关的常数,它能被具体确定。我们引入一个局部化函数 ψ_δ:

$$\psi_\delta: R\to R,\qquad \psi_\delta(s)=\psi(s/\delta)$$

其中 ψ 是 C^∞ 函数且满足:

$$\psi(s)=\begin{cases}1, & |s|\leqslant 1\\ 0, & |s|\geqslant 2\end{cases}$$

这个局部化函数可以局部化方程组(8.1.27)为

$$\begin{cases} J_t=-2\varepsilon[\alpha(J_\delta+\omega^2)+m(J_\delta+\omega^2)^3+n(J_\delta+\omega^2)^2]-\\ \qquad 2\varepsilon\sqrt{J_\delta+\omega^2}\,\Gamma\cos\theta+N_1(J_\delta,\theta,u_\delta;\varepsilon)\\ \theta_t=-2J+\dfrac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J_\delta+\omega^2}}\sin\theta+N_2(J_\delta,\theta,u_\delta;\varepsilon)\\ u_t=\tilde{L}_\varepsilon u+[\tilde{V}_\varepsilon u_\delta+N_3(J_\delta,\theta,u_\delta;\varepsilon)]\end{cases}\tag{8.1.35}$$

这里,对任何变量 s 有 $s_\delta=s\psi(s/\delta)$。

关于方程组(8.1.35),它的所有非线性项或者有系数 ε,或者对于变量(J,u)至少是二次的从而在零点的 δ 邻域内被局部化。这意味着方程组(8.1.35)有一个阶为 $O(\varepsilon+\delta)$的整体 Lipschitz 常数。利用 $v=(v_u,v_s,v_c)^{\mathrm T}$ 作为变量,则式(8.1.35)能够写作

$$\begin{aligned} v_{u,t}&=\sigma_u^\varepsilon v_u+R_u^\delta(v;\varepsilon)\\ v_{s,t}&=\sigma_s^\varepsilon v_s+R_s^\delta(v;\varepsilon)\\ v_{c,t}&=Av_c+R_c^\delta(v;\varepsilon)\end{aligned}\tag{8.1.36}$$

这里 $R^\delta(v;\varepsilon)$和它的一阶导数是 $O(\varepsilon+\delta)$阶的。这个局部化方程组有 C^l 不变流形,它们是 E^{cs},E^{cu}和 E^c 的光滑变形。反过来,对于原来的方程组,这些流形将在 C_ω 的 δ 邻域内局部不变。

定理 8.1.3 存在 C_ω 的一个 δ 邻域 U_δ,一个 $\varepsilon_0(\delta)>0$ 和一个整数 $l>3$,使得:任意 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$,方程组(8.1.27)在 U_δ 里有一个余维数为 1 的局部不变流形:

$$W_\varepsilon^{cs}=\{v\in H^1\mid v_u=h_u(v_s,v_c;\varepsilon)\}\tag{8.1.37}$$

这里 h_u 关于它的所有标量是 C^l 的且是 θ 的 2π 周期函数。进一步,对于 $\varepsilon=0$,W_0^{cs} 沿着 C_ω 与 E^{cs}切向相交。

类似地,我们有局部不变流形:

$$W_\varepsilon^{cu}=\{v\in H^1\mid v_s=h_s(v_u,v_c;\varepsilon)\}\tag{8.1.38}$$

这里 h_u 关于它的所有标量是 C^l 的且是 θ 的 2π 周期函数。进而,对于 $\varepsilon=0$,W_0^{cu} 沿着 C_ω 与 E^{cu}切向相交。

一个余维数为 2 的"慢流形"M_ε 的存在性由以下推论给出:

推论 8.1.4 让 M_ε 表示交集:

$$M_\varepsilon=W_\varepsilon^{cs}\cap W_\varepsilon^{cu}$$

那么 M_ε 是一个余维数为 2 的局部不变流形(在 U_δ 内)。

$$M_\varepsilon=\{v\in H^1\mid v_u=h_u^c(v_c;\varepsilon),v_s=h_s^c(v_c;\varepsilon)\}\tag{8.1.39}$$

其中函数 h_u^c 和 h_s^c 关于它们的标量是 C^l 的且关于 θ 是 2π 周期的。进一步,对于 $\varepsilon=0$,M 沿着 C_ω 与 E^c 切向相交。

注:在 M_ε 上的流由如下方程组给出

$$\begin{aligned} J_t&=-2\varepsilon[\alpha(J_\delta+\omega^2)+m(J_\delta+\omega^2)^3+n(J_\delta+\omega^2)^2]-\\ &\qquad 2\varepsilon\sqrt{J_\delta+\omega^2}\,\Gamma\cos\theta+\tilde{N}_1(J_\delta,\theta,v_{0\delta};\varepsilon)\\ \theta_t&=-2J+\frac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J_\delta+\omega^2}}\sin\theta+\tilde{N}_2(J_\delta,\theta,v_{0\delta};\varepsilon)\\ v_{0,t}&=\tilde{L}_\varepsilon v_0+[\tilde{V}_\varepsilon v_{0\delta}+\tilde{N}_3(J_\delta,\theta,v_{0\delta};\varepsilon)]\end{aligned}\tag{8.1.40}$$

这里 $\tilde{N}$ 是N 在M_ε 上的限制。

一旦积分方程组被建立,定理 8.1.3 的证明便是不动点理论的标准应用,详细的讨论参见第五章。

8.1.3.2 纤维化

尽管不变流形 $M_\varepsilon, M_\varepsilon^{cs}, M_\varepsilon^{cu}$ 关于 ε 是可微的,但由于慢时间标度 $\sqrt{\varepsilon}t$ 的出现,这些不变流形作为轨道的并集掩盖了对于 ε 的可微性。在有限维情况下,Fenichel 引入了这些流形的纤维表示,这些纤维有关于 ε 的若干次可微性,因而在奇异扰动理论中十分有用。在这里,由于线性化问题有小的增长率,因此,对于 $t\in(-\infty,\infty)$,同宿轨道的整体结构是一个奇异扰动问题。利用分析方法,我们能够给出不变流形的纤维表示。

定理 8.1.5 对于所有 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$,$C^l$ 流形 W_ε^{cu} 存在一个 C^{l-2} 坐标系:

$$v_u = \zeta_u, \qquad J_u\in[-\zeta_0,\zeta_0]$$

$$v_c = f^u(\zeta_u,\zeta_c;\varepsilon)$$

使得子流形 M_ε 对应于 $\zeta_u=0$,且在 W_ε^{cu} 上的流解耦为以下形式:

$$\zeta_{u,t} = [\sigma_u^\varepsilon + \Gamma^\delta(\zeta_u,\zeta_c;\varepsilon)]\zeta_u$$

$$\zeta_{c,t} = A\zeta_c + S_c^\delta(\zeta_c;\varepsilon)$$

这里 $\zeta_u,\zeta_c,\Gamma^\delta,S_c^\delta$ 和它们的一阶导数是 $O(\varepsilon+\delta)$ 阶的。一个类似的结果对于 W_ε^{cs} 也成立。

纤维定理的陈述与证明参见第五章和文献[41]。

8.1.3.3 在 M_ε 里 Q 的稳定流形

对于 $\Gamma^2-\omega^2(\alpha+n\omega^2+m\omega^4)\equiv h>0$,点 Q 作为定常解在流式(8.1.1)之下关于变量 (J,θ,u) 的坐标为

$$J_q = -\frac{\sqrt{h}}{2\omega}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\theta_q = \arctan\left[\frac{\omega\sqrt{h}}{\Gamma^2-h}\right] - \pi + O(\varepsilon)$$

$$u_q = 0$$

在 Q 点线性化方程组(8.1.35)可得,Q 是全空间中的鞍点,且有二维不稳定流形 $W^u(Q)$ 和一个余维数为 2 的稳定流形 $W^s(Q)$。Q 的不稳定流形沿曲线 C_ε^u 与常值平面 Π_c 相交,沿与 v_n 方向相切的曲线与 W_ε^{cu} 相交。Q 的稳定流形沿曲线 C_ε^s 与 Π_c 相交,并在一个余维数为 1 的子流形里与 M_ε 相交。在这一节里,我们估计 $W=W^s(Q)\cap M_\varepsilon$ 的大小。特别地,我们将表明,局部的 W 能被看做阶为 $O(1)$ 的 C_ε^s 片与阶为 $O(\varepsilon^{3/4})$ 的 v_0 方向薄片的乘积。

1. 方程组的建立

注意到 Q 的稳定流形在常值平面上能被参数化,即

$$C_\varepsilon^s = \{y=(j,\theta)\mid y=y_*(s,\nu)\}$$

这里 $\nu=\sqrt{\varepsilon}$,y_* 由式(8.1.13)给出,具有

$$j_{*,\tau} = Y_1(j_*,\theta_*;\nu)$$

$$\theta_{*,\tau} = Y_2(j_*,\theta_*;\nu)$$

利用 (J,θ,v_0) 坐标并代 $J=\nu j$ 得到 M_ε 上流形满足的方程组

$$\begin{cases} j_t = \nu Y_1(j,\theta;\nu) + \overline{N}_1(j,\theta,v_0;\nu) \\ \theta_t = \nu Y_2(j,\theta;\nu) + \overline{N}_2(j,\theta,v_0;\nu) \\ v_{0,t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + \tilde{V}_\varepsilon v_0 + \overline{N}_3(j,\theta,v_0;\nu) \end{cases} \tag{8.1.41}$$

为了估计 W 的大小,我们使用在 8.1.1 节中引入的 (r,η) 坐标,利用这些变量,在 M_ε 上的流由如下方程组给出(在 C_ε^s 的一个邻域内):

$$\begin{cases} r_t = \nu a(\eta,\nu)r + O(\nu r^2 + v_0^2) \\ \eta_t = \nu\lambda\eta + \nu c(\eta,\nu)r + O(\nu r^2 + v_0^2) \\ v_{0,t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + \tilde{V}_\varepsilon v_0 + O(\nu r^2 + v_0^3 + \nu r v_0) \end{cases} \tag{8.1.42}$$

这里 $a(\eta,\nu)$ 和 $c(\eta,\nu)$ 是 (η,ν) 的光滑函数。

最后,为了构造一个包含 C_ε^s 的 Q 的局部稳定流形,我们沿着 C_ε^s 上流线性化式(8.1.42),这里 C_ε^s 上的流对应于 $r_*=0,\eta_*(t;$

$\nu) = \eta_0\exp\{\lambda\nu t\}$,其中,$0\leqslant\eta_0\leqslant s_0$,且 $t\geqslant0$。引入变量:

$$\gamma = \eta - \eta_*(t;\nu)$$

方程组(8.1.42)能被写做

$$\begin{cases} r_t = \nu a_*(t,\nu,\eta_0)r + N_{*1}(t,r,\gamma,v_0;\nu) \\ \gamma_t = \nu\lambda\gamma + \nu c_*(t,\nu,\eta_0)r + N_{*2}(t,r,\gamma,v_0;\nu) \\ v_{0,t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + V_*(t,\nu,\eta_0)v_0 + N_{*3}(t,r,\gamma,v_0;\nu) \end{cases} \tag{8.1.43}$$

这里

$$V_* = -4\nu j_*(s,\nu)S + \frac{\varepsilon\Gamma\sin\theta_*(s,\nu)}{\sqrt{\nu j_*(s,\nu)+\omega^2}}\hat{J} -$$

$$2\nu^3 j_*(2\nu m j_* + 4m\omega^2 + n)P -$$

$$\nu^3 j_*(\nu m j_* + 2m\omega^2 + n)I$$

$$N_{*1} = O(\nu r^2 + \nu\gamma^2 + v_0^2)$$

$$N_{*2} = O(\nu r^2 + \nu\gamma^2 + v_0^2)$$

$$N_{*3} = O(\nu r^2 + \nu\gamma^2 + \nu v_0^2 + v_0^3)$$

2. 方程组(8.1.43)线性流的估计

容易看出,方程组(8.1.43)的线性部分包含一个常微分方程组和一个偏微分方程,它们的系数与时间相关。

首先,我们对常微分方程组进行估计。简单计算知,常微分方程组的基本解由下面的 2×2 矩阵给出

$$\begin{vmatrix} A_*(t,s;\eta_0,\nu) & 0 \\ \Gamma_*(t,s;\eta_0,\nu) & \exp\{\nu\lambda(t-s)\} \end{vmatrix}$$

这里

$$A_*(t,s;\eta_0,\nu) = \exp\left\{\int_s^t \nu a_* ds'\right\}$$

$$\Gamma_*(t,s;\eta_0,\nu) = \nu\int_s^t \exp\{\nu\lambda(t-s')\}c_*(s')A_*(s',s)ds'$$

为了估计 A_*,我们注意到 a_* 能被写做

$$a_* = \mu + \hat{a}$$

而

$$|\hat{a}| \leqslant C\eta_0\exp\{\nu\lambda t\} \leqslant Cs_0\exp\{\nu\lambda t\}$$

这里 μ 由式(8.1.12)给出。于是,关于 A_* 有估计如下:对于 $t,s\geqslant0$,

$$C_1\exp[\nu\mu(t-s)] \leqslant A_* \leqslant C_2\exp[\nu\mu(t-s)]$$

其中 C_1 和 C_2 是与 ε 无关的常数。

为了得到 $\Gamma_*(t,s;\eta_0,\nu)$的界,我们注意到

$$|c_*| \leqslant C\exp[2\nu\lambda t]$$

这意味着,对于 $t,s\geqslant0$,有

$$|\Gamma_*| \leqslant C\nu\left|\int_s^t \exp\{\nu[\lambda(t-s') + 2\lambda s' + \mu(s'-s)]\}ds'\right|$$

由于 $\lambda+\mu = -2\nu(\alpha+2n\omega^2+3m\omega^4)+O(\nu^2)<0$,则对于 $t,s\geqslant0$ 有:

$$|\Gamma_*| \leqslant C\nu|t-s|\exp\{\nu\lambda(t-s)\}$$

这里 C 与 ε 无关。

接下来,我们进行偏微分方程估计。为估计偏微分方程基本解的增长率,我们用线性算子 $\tilde{L}_\varepsilon + V_*$ 的 Fourier 系数 $\mathscr{L}(k)$来表示它,这里 $\mathscr{L}(k)$由下面的矩阵给出

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon[d(k)+3n(J_*+\omega^2)+5m(J_*+\omega^2)^2] & -k^2+\varepsilon\alpha_1 \\ k^2-4\omega^2-\varepsilon\alpha_1-\nu\alpha_2 & -\varepsilon[d(k)+n(J_*+\omega^2)+m(J_*+\omega^2)^2] \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha_1 = \Gamma\sin\theta_*(s,\nu)/\sqrt{\nu j_*(s,\nu)+\omega^2}$,$\alpha_2 = 4j_*(s,\nu)$,$J_* = \nu j_*$ 都是 $\exp\{\nu\lambda t\}$和 ν 的光滑函数,$d(k)\geqslant\alpha$,且 $k=2,3,\cdots$。算子 $\mathscr{L}(k)$有特征值:

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon d - \varepsilon\alpha_3 \pm iD(k)$$

这里

$$d = d(k) + 2n\omega^2 + 3m\omega^4$$

$$\alpha_3 = 3mJ_*^2 + 6m\omega^2 J_* + 2nJ_*$$

$$D(k) = \sqrt{(k^2 - \varepsilon\alpha_1)(k^2 - 4\omega^2 - \varepsilon\alpha_1 - \nu\alpha_2) - \varepsilon^2\alpha_4}$$

$$\alpha_4 = [3n(J_* + \omega^2) + 5m(J_* + \omega^2)^2][n(J_* + \omega^2) + m(J_* + \omega^2)^2] - [d(k) + 2n\omega^2 + 3m\omega^4 + 3mJ_*^2 + 6m\omega^2 J_* + 2nJ_*]^2$$

我们假定 $\varepsilon > 0$ 充分小,使得 $D(k) > 0$,则 $\mathscr{L}(k)$能通过矩阵 $U(k)$ 而对角化,有

$$U(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\varepsilon n(J_* + \omega^2) + 2\varepsilon m(J_* + \omega^2)^2 + iD(k)}{-k^2 + \varepsilon\alpha_1} & \dfrac{\varepsilon n(J_* + \omega^2) + 2\varepsilon m(J_* + \omega^2)^2 - iD(k)}{-k^2 + \varepsilon\alpha_1} \end{bmatrix}$$

满足 $U^{-1}\mathscr{L}(k)U = \boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示对角形矩阵 $\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2]$。

注意到 U 在空间$[\mathrm{span}\{\Pi_c, e_s, e_u\}]^{\perp}$上是有界的,因此,假若我们使变量 v_0 为 w,其中 $\hat{v}_0 = U(k)\hat{w}(k)$,我们得到

$$\hat{w}_t = \Lambda\hat{w}(k) - U^{-1}U_t\hat{w}(k) \tag{8.1.44}$$

容易推证,$U^{-1}U_t$ 是有界的,且

$$|U^{-1}U_t| \leqslant \frac{C}{k^2}\varepsilon\exp\{\nu\lambda t\}$$

这里 C 与 k 和 ε 无关。

事实上,让

$$M = \frac{iD(k)}{k^2 - \varepsilon\alpha_1}, \quad N = \frac{\varepsilon n(J_* + \omega^2) + 2\varepsilon m(J_* + \omega^2)^2}{-k^2 + \varepsilon\alpha_1}$$

那么 M 和 N 是有界的,且

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ N - M & N + M \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{2M}\begin{pmatrix} N + M & -1 \\ M - N & 1 \end{pmatrix}$$

于是,我们有

$$U^{-1}U_t = \frac{1}{2M}\begin{bmatrix} \dot{M} - \dot{N} & -\dot{N} - \dot{M} \\ \dot{N} - \dot{M} & \dot{N} + \dot{M} \end{bmatrix}$$

这里

$$\dot{N} = \left(\frac{\varepsilon n(J_* + \omega^2) + 2\varepsilon m(J_* + \omega^2)^2}{-k^2 + \varepsilon\alpha_1}\right)_t = \frac{\varepsilon nJ_*' + 4\varepsilon m(J_* + \omega^2)J_*'}{-k^2 + \varepsilon\alpha_1} - \frac{[\varepsilon n(J_* + \omega^2) + 2\varepsilon m(J_* + \omega^2)^2](\varepsilon\alpha_1')}{(-k^2 + \varepsilon\alpha_1)^2}$$

由于 α_1 是 s 的光滑函数,那么

$$\alpha_1' = \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \nu\lambda\exp\{\nu\lambda t\}$$

$$|\alpha_1'| \leqslant C\nu\exp[\nu\lambda t]$$

同样地,

$$|J_*'| \leqslant C\nu\exp\{\nu\lambda t\}$$

因此

$$|\dot{N}| \leqslant \frac{C}{k^2}\varepsilon\exp[\nu\lambda t]$$

一个类似的估计对于$|\dot{M}|$成立。

利用方程(8.1.44),得到积分方程

$$\hat{w}(k) = F(t,s;k)\hat{w}_0(k) - \int_s^t F(t,s';k)U^{-1}U_t\hat{w}(k)\mathrm{d}s'$$

这里 $F(t,s;k) = \exp\left\{\int_s^t \Lambda(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$,且对于 $t \geqslant s \geqslant 0$,有

$$|F(t,s;k)| \leqslant C\exp\{-\varepsilon d(k)(t-s)\}$$

进一步,我们有

$$|\hat{w}(k)| \leqslant C\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)| + C\int_s^t \frac{\varepsilon}{k^2}\exp[-\varepsilon d(k)(t-s')]\exp[\nu\lambda s']|\hat{w}(k)|\mathrm{d}s'$$

由 $\lambda<0$ 得到,对于 $t\geqslant s\geqslant 0$,有

$$|\hat{w}(k)| \leqslant C\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)| + \varepsilon C\int_s^t |\hat{w}(k)|\mathrm{d}s'$$

利用 Gronwall 不等式有,对于 $t\geqslant s\geqslant 0$,有

$$|\hat{w}(k)| \leqslant C\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)|$$

最后,若我们用 $U(t,s)$ 表示偏微分方程的基本解并注意到 $d(k)\geqslant\alpha$,则有

$$\| U(t,s)v_{i0}\|_{H^1} \leqslant C\exp[-\varepsilon\alpha(t-s)]\| v_{i0}\|_{H^1}$$

3. 稳定流形的大小

定理 8.1.6 点 Q 在 M_ε 里有 C^1 局部稳定流形,它能通过 (η, v_{i0}) 参数化,即

$$W = \{(r,\eta,v_{i0}) \mid r = f(\eta,v_{i0})\}$$

这里 $\eta\in[0,s_0]$, $\| v_{i0}\|_{H^1}\in[0,\varepsilon^{3/4}]$。而且 $f(\eta,0)=0$, $|r|\leqslant C\varepsilon$。

定理的证明见第五章定理 5.3.5。

8.1.4 同宿轨道的不变性

我们综合到目前为止所得到的局部分析结果和未扰动可积系统的整体信息,去建立扰动三次-五次 NLS 方程关于鞍点 Q 的同宿轨道的存在性。同第五章的情况一样,论证分两步进行。即所谓的第一测度和第二测度。在第一测度里,我们构造一个距离函数 Δ,它的零点对应于这样的轨道——不在常值平面里,于反向时间趋近于鞍点 Q,而在正向时间($t\to\infty$)趋近于 M_ε。第二测度也构造一个函数 d,它的零点对应于第一测度中所得到的一条轨道——它相交于基点在 $W^s(Q)$ 里的一条纤维。利用纤维的定义,则由于 Δ 和 d 联立等于零,便保证了 Q 点的同宿轨道的存在性。

8.1.4.1 第一测度(Melnikov 测度)

方程(8.1.1)能写成如下形式:

$$q_\tau = iH'(q) + \varepsilon G(q) \tag{8.1.45}$$

其中 $H'(q) = -q_{xx} - 2(q\bar{q}-\omega^2)q$, $G(q) = -\alpha q + \beta\hat{B}q - \Gamma - m|q|^4 q - n|q|^2 q$。

对于 Q 的不稳定流形 $W^u(Q)$,它是一个二维流形,在平面 $\Pi_c\subset M_\varepsilon$ 里有一个慢方向,离开平面有一个快方向与 $\cos k$ 相切。在常值平面 Π_c 上 Q 的不稳定流形是曲线 C_ε^u,它由传动摆的能量式(8.1.14)控制,这条曲线位于不动点圆 C_ω 附近且可看做整个圆的一个图。即曲线 C_ε^u 能通过一个角度 θ_b 参数化。

因为 $W^u(Q)$ 是 W_ε^{cu} 的子流形,则

$$W^u(Q) = \bigcup_{q_b\in C_\varepsilon^u}\{\mathscr{F}_{q_b}^u(\cdot;\varepsilon)\}$$

这里 $\mathscr{F}_{q_b}^u(\cdot;\varepsilon)$ 表示一条基点为 q_b 的不稳定纤维。特别地,我们在曲线 C_ε^u 上固定一个基点 q_b(它对应于角度 θ_b),考虑两条有同一基点的不同的纤维——扰动纤维 $\mathscr{F}_{q_b}^u(\cdot;\varepsilon)$ 和与它相邻的未扰动纤维 $\mathscr{F}_{q_b}^u(\cdot;0)$。固定一个小正数 δ,沿着这两条纤维,我们能够定义未扰动的和扰动的"起飞"点: $q_h(0)=\mathscr{F}_{q_b}^u(\delta;0)$ 和 $q_\varepsilon(0)=\mathscr{F}_{q_b}^u(\delta;\varepsilon)$,它们都是基点 q_b 所对应角度 θ_b 的函数。

接下来,我们讨论初始点在"起飞"点的两条轨道 $q_h(t)$ 和 $q_\varepsilon(t)$。轨道 $q_h(t)$ 是一条未扰动可积同宿轨道,它肯定在正向时间接近平面 Π_c。另一方面,轨道 $q_\varepsilon(t)$ 是扰动方程(8.1.45)的一个解,我们的目的是要确定是否能够选择"起飞"角度 θ_b 而保证这条轨道在 $t\to+\infty$ 时趋近慢流形 M_ε。

由可积同宿轨道 $q_h(t)$ 的显式表达式知,存在一个时间 $T_*(\delta)$,使得对于所有 $t\geqslant T_*$,有

$$\mathrm{dist}(q_h(t),\Pi_c)\leqslant\delta$$

在 T_* 处,我们定义两个"着陆点":

$$q_0 = q_h(T_*)$$
$$q_l = q_\varepsilon(T_*)$$

利用有限时间扰动理论知,这两个着陆点有一个阶 $O(\varepsilon)$ 距离。由于在 $t \to \infty$ 时 $q_h(t) \to \Pi_c$,则 $q_0 \in W_0^{cs}$。我们希望选择"起飞"角度 θ_b 使得扰动的着陆点 $q_l \in W_\varepsilon^{cs}$。

流形 W_ε^{cs} 是余维1的且与 W_0^{cs} 相距 $O(\varepsilon)$ 阶,而且,W_0^{cs} 可由 $\{q \in H^1 | F(q) + 2 = 0\}$ 刻划。因此,我们定义:

$$\Delta \equiv \langle F'(q_0), q_l - q_s \rangle$$

作为 q_l 与 q_s 之间的距离测度,这里 q_s 表示经过 q_l 沿着 W_0^{cs} 在点 q_0 处的法线方向的直线与 W_ε^{cs} 的交点。

为了实际计算 Δ,我们定义轨道:

$$q_*(t) = q_h(t + T_*)$$
$$q_u(t) = q_\varepsilon(t + T_*)$$

这里 $t \leqslant 0$。类似地,对于 $t \geqslant 0$,我们定义 $q_s(t)$ 为扰动问题关于初值 q_s 的解,并把 $q_*(t)$ 的解扩展到所有 t。这些轨道允许我们引入定义:

$$\Delta^-(t) \equiv \langle F'(q_*(t)), q_u(t) - q_*(t) \rangle, \quad t \leqslant 0$$
$$\Delta^+(t) \equiv \langle F'(q_*(t)), q_s(t) - q_*(t) \rangle, \quad t \geqslant 0$$
$$\Delta = \Delta^-(0) - \Delta^+(0)$$

同在有限维情形一样[131],通过微分 $\Delta^-(t)$ 和 $\Delta^+(t)$ 能使我们借助于 Melnikov 积分去估计距离 Δ。

命题 8.1.7 距离 Δ 为

$$\Delta = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_*(t)), G(q_*(t)) \rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2)$$

命题的详细证明在第五章中能找到。

让 $q_\omega(t)$ 表示一条未扰动的可积偏微分方程的同宿到不动点圆 C_ω 的轨道,则它与可积的同宿轨道 $q_*(t)$ 有一个阶 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 距离。利用 G 的显式表达式并借助于 $q_\omega(t)$ 得

推论 8.1.8 距离 Δ 有一个关于 ε 的表述式

$$\Delta = \varepsilon M(\alpha, \beta, \Gamma, m, n, \theta_b) + O(\varepsilon^{3/2}) \qquad (8.1.46)$$

$$M(\alpha, \beta, \Gamma, m, n, \theta_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_*(t)), G(q_*(t)) \rangle \mathrm{d}t = -[\alpha M_\alpha + \beta M_\beta + \Gamma M(\theta_b) + mM_m + nM_n]$$

这里

$$M_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_\omega(t)), q_\omega(t) \rangle \mathrm{d}t$$

$$M_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_\omega(t)), -\hat{B} q_\omega(t) \rangle \mathrm{d}t$$

$$M(\theta_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_\omega(t)), 1 \rangle dt = M_0 \cos(\theta_b - 2p_0)$$

$$M_m = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_\omega(t)), |q_\omega(t)|^4 q_\omega(t) \rangle \mathrm{d}t$$

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F'(q_\omega(t)), |q_\omega(t)|^2 q_\omega(t) \rangle \mathrm{d}t$$

具体地,利用 $q_\omega(t)$ 和 F' 的显式表达式,$M_\alpha, M_\beta, M_0, M_m, M_n$ 能进行计算。

$$M_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, \frac{4\pi\omega^2 \sin^2 p_0}{\sigma_0 A^3} \cdot [\cosh\tau + \sin p_0 \sinh^2\tau - \sin^2 p_0 (2 + \cos^2 x)\cosh\tau + 2\sin^3 p_0 \cos x]$$

$$M_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, \frac{4\pi\omega^2 \sin^2 p_0}{\sigma_0 A^5} \cdot$$

$$[\sin p_0 \cosh^2\tau \cos x - \sin^2 p_0(1+\sin^2 x)] \cdot$$

$$[2\cosh\tau - \sin p_0 \cos x - 2\sin^2 p_0 \cosh\tau +$$

$$2\sin^3 p_0 \cos x] + O(\sin^{k-2} p_0)$$

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, \frac{4\pi\omega^2 \sin^2 p_0}{\sigma_0 A^2} \cdot (1 - \sin p_0 \cosh\tau \cos x)$$

$$M_n = M_\alpha \cdot \frac{\omega^2}{A^2}[(\sin 2p_0 \sinh\tau)^2 +$$

$$(\cos 2p_0 \cosh\tau + \sin p_0 \cos x)^2]$$

$$M_m = M_n \cdot \frac{\omega^2}{A^2}[(\sin 2p_0 \sinh\tau)^2 +$$

$$(\cos 2p_0 \cosh\tau + \sin p_0 \cos x)^2]$$

这里 $p_0 = \arctan\sqrt{4\omega^2 - 1}$，$\sigma_0 = \sqrt{4\omega^2 - 1}$，$A = \cosh\tau - \sin p_0 \cos x$，而

$$q_\omega(t) = \left(\frac{\cos 2p_0 \cosh\tau - i\sin 2p_0 \sinh\tau + \cos x \sin p_0}{\cosh\tau - \sin p_0 \cos x}\right) \cdot$$

$$\omega \exp\{i(\theta_b - 2p_0)\}$$

假若 M_α, M_β, M_m 和 M_n 之一不等于零，则函数

$$-M(\alpha, \beta, \Gamma, m, n, \theta_b) =$$

$$\alpha M_\alpha + \beta M_\beta + \Gamma M_0 \cos(\theta_b - 2p_0) +$$

$$mM_m + nM_n \qquad (8.1.47)$$

有非退化零点。这意味着，我们可以选择参数使得 $\Delta = 0$，即

$$q_l = q_s \in W_\varepsilon^{cs}$$

8.1.4.2 第二测度

由第一测度，我们可以选择“起飞”角度 θ_b 使着陆点 q_l 在 W_ε^{cs} 内，从而，这条轨道趋近于 M_ε，但是，我们不知道它是否趋近于鞍点 Q。为了确认它必然回到点 Q，我们实施第二测度。

在第二测度里，我们将使用 Fenichel 纤维并采用打靶论证。当 $W^s(Q)$ 作为全空间的子流形时，其余维数为 2；而作为 W_ε^{cs} 的子流形时，其余维数为 1。由第一测度知着陆点 $q_l \in W_\varepsilon^{cs}$，因此，一维打靶论证是充分的。

我们用 $q_{l,b}$ 和 $q_{0,b}$ 分别表示在扰动与未扰动情况下“着陆”纤维的基点：

$$q_0 \in \mathcal{F}_{q_{0,b}}(\cdot;0)$$

$$q_l \in \mathcal{F}_{q_{l,b}}(\cdot;\varepsilon)$$

其中 $\mathcal{F}_{q_{0,b}}(\cdot;0)$ 和 $\mathcal{F}_{q_{l,b}}(\cdot;\varepsilon)$ 便是所谓的未扰动与扰动情况下的“着陆”纤维。众所周知，未扰动的基点在平面 Π_c 上，另一方面，扰动的基点位于余维数为 2 的慢流形 M_ε 上。不过，由于纤维关于 ε 的光滑性，我们知道基点 $q_{0,b}$ 和 $q_{l,b}$ 是 ε 接近的。现在的问题是，基点 $q_{l,b}$ 是否实际上在稳定流形 $W = W^s(Q) \cap M_\varepsilon$ 上。为回答这一问题，我们给出如下命题。

命题 8.1.9 从“着陆”基点 $q_{l,b}$ 到稳定流形 W 的距离能够用“起飞”角度 θ_b 的函数来测度：

$$d = \omega[2\Gamma \sin 2p_0(\theta_b - 2p_0) + 4\alpha\omega p_0 +$$

$$4m\omega^3 p_0 + 4n\omega^5 p_0] + O(\sqrt{\varepsilon}) \qquad (8.1.48)$$

命题的证明同第五章中相应结论的证明类似，这里不再叙述。同时，假若我们定义：

$$\tilde{d} = 2\Gamma \sin 2p_0 \cos(\theta_b - 2p_0) + 4\alpha\omega p_0 +$$

$$4m\omega^3 p_0 + 4n\omega^5 p_0 \qquad (8.1.49)$$

并设 $\tilde{d}$ 有非退化零点，那么，我们能够再次选择参数，使得 $d = 0$。

8.1.4.3 同宿轨道的存在性

定理 8.1.10 假设参数 $(\omega, \alpha, \beta, \Gamma, m, n)$ 和 θ_b 满足下列条件：

(1) $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

(2) $\alpha > 0, \beta > 0, m \geqslant 0, n \geqslant 0$;

(3) $\frac{1}{\Gamma}(\alpha + n\omega^2 + m\omega^4) \equiv \tilde{\alpha} \in (-a_0, a_0)$,这里

$$a_0 = \min\left\{\frac{1}{\omega}, \frac{\sin 2p_0}{2\omega p_0}\right\},$$

$$p_0 = \arctan\sqrt{4\omega^2 - 1};$$

(4) $\cos(\theta_b - 2p_0) = -\frac{2\omega p_0 \tilde{\alpha}}{\sin 2p_0}$且 $\theta_b \in (\theta_{\min}, \theta_0)$,其中

$$\theta_0 = \arctan\left[\frac{\omega\sqrt{h}}{\Gamma^2 - h}\right] - \pi, \quad (h = \Gamma^2 - \omega^2 \Gamma \tilde{\alpha})$$

$$\sin\theta_{\min} + \tilde{\alpha}\omega\theta_{\min} = \sin\theta_0 + \tilde{\alpha}\omega\theta_0, \quad \theta_{\min} < \theta_0;$$

(5) M_α, M_β, M_m 和 M_n 之一不为零,且

$$\alpha M_\alpha + \beta M_\beta - \frac{2\omega p_0(\alpha + n\omega^2 + m\omega^4)}{\sin 2p_0} M_0 + mM_m + nM_n = 0$$

那么,对于充分小的正数 ε,方程(8.1.45)存在同宿轨道的对称偶。

证明:为方便计,我们固定参数$(\omega, \alpha, \Gamma, m, n)$,且这些参数满足条件(1)~(3),让 $M_\beta \neq 0$,那么 $\tilde{d}$ 和$M(\alpha, \beta, \Gamma, m, n)$便是 θ_b 和β的函数:

$$-M(\alpha, \beta, \Gamma, m, n, \theta_b) =$$

$$\alpha M_\alpha + \beta M_\beta + \Gamma M_0 \cos(\theta_b - 2p_0) + mM_m + nM_n$$

$$\tilde{d} = 2\Gamma \sin 2p_0 \cos(\theta_b - 2p_0) + 4\alpha\omega p_0 + 4m\omega^2 p_0 + 4n\omega^5 p_0$$

为证明同宿到 Q 的轨道的存在性,只要表明 $M(\alpha, \beta, \Gamma, m, n, \theta_b)$和 $\tilde{d}$ 同时存在非退化零点即可,其中 $\beta > 0, \theta_b \in (\theta_{\min}, \theta_0)$,$(\theta_{\min}, \theta)$是平面 Π_c 上对于未扰动同宿轨道而言 θ 的取值范围这里

$$\theta_0 = \arctan\left[\frac{\omega\sqrt{h}}{\Gamma^2 - h}\right] - \pi, \qquad h = \Gamma^2 - \omega^2 \Gamma \tilde{\alpha}$$

$$\sin\theta_{\min} + \tilde{\alpha}\omega\theta_{\min} = \sin\theta_0 + \tilde{\alpha}\omega\theta_0, \quad \theta_{\min} < \theta_0$$

当 $M_\beta \neq 0$ 时,我们能够求解 $\tilde{d} = 0$ 和 $M(\alpha, \beta, \Gamma, m, n, \theta_b) = 0$ 而得到

$$\cos(\theta_b - 2p_0) = -\frac{2\omega p_0 \tilde{\alpha}}{\sin 2p_0} \tag{8.1.50}$$

$$\beta = -\frac{1}{M_\beta}\left[\alpha M_\alpha - \frac{2\omega p_0(\alpha + n\omega^2 + m\omega^4)}{\sin 2p_0}\right] M_0 + mM_m + nM_n \tag{8.1.51}$$

进而,利用隐函数定理,我们能够在由式(8.1.50)和式(8.1.51)所得到的点(θ_b, β)的一个小邻域内,求解 $\Delta = d = 0$。由于 $\Delta = d = 0$,则点 $q_l \in W_\varepsilon^{cs}$,进而有 q_l 位于基点 $q_{l,b} \in W$ 的一条纤维上,因此,轨道 $q_s(t)$在 $t \geqslant 0$ 时仍然在 C_ω 的一个小邻域内。这意味着轨道

$$q(t) = \begin{cases} q_u(t), & t \leqslant 0 \\ q_s(t), & t \geqslant 0 \end{cases}$$

是 Q 的同宿轨道。又因为未扰动系统有两条同宿轨道 $q_h^{\pm}$,这样便得到了对称偶的存在性。

注:若我们让 $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 接近$\frac{1}{2}$,且 α, m 和 n 很小,那么,能够保证 $M_\beta \neq 0$。

8.2 导数非线性 Schrödinger 方程六维模型的同宿轨道

众所周知,非线性 Schrödinger 方程是对光纤中非线性脉冲波包的传播过程的最低次近似,即仅考虑了一阶色散(群速度色散)和最低次的非线性项。对于较小输入功率和 ps 量级的脉冲而言,

这种近似是很好的。但用它不能解释对于更窄的脉冲(fs 量级)和更大输入功率所导致的输出脉冲频谱的不对称调制和频率自漂移。为克服这一弊端,Kodama 和 Hasegawa 利用约化微扰法导出了新的具导数高阶非线性 Schrödinger 方程(HNLS):

$$iq_t - \frac{1}{2}k_1'' q_{xx} + lq|q|^2 + i\varepsilon\Big[-\frac{1}{6}k_1''' q_{xxx} + h_1(q|q|^2)_x - h_2 q(|q|^2)_x\Big] = 0 \tag{8.2.1}$$

这里 $\varepsilon \ll 1$ 为小参数。

我们考虑有阻尼和外力项的具导数高阶非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + (|u|^2 - 1)u = \\ i\varepsilon[\alpha u + \beta_1 u_{xxx} + \beta_2(|u|^2 u)_x + \\ \beta_3(|u|^2)_x u + \Gamma] \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

其中 $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 和 Γ 为实参数,$u(x,t)$ 为复的演化振幅,有周期边界条件

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t) \tag{8.2.3}$$

关于方程(8.2.2)和式(8.2.3),人们已经得到它们的孤立子解和混沌运动的某些理论与数值结果,但没有涉及关于同宿轨道的分析。利用方程(8.2.2)的 3-模 Fourier 截断,我们得到了一个6维的常微分方程组。这里,我们将讨论这个六维模型,并利用 Melnikov 分析和几何奇异扰动理论证明同宿轨道的保持性。

8.2.1 扰动的具导数 NLS 方程的 Fourier 截断

对于方程(8.2.2),假定 $x \in [0, 2\pi]$ 且满足边界条件式(8.2.3)。现令式(8.2.2)有如下形式的解:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}a(t) + b(t)\cos x + c(t)\sin x \tag{8.2.4}$$

代入式(8.2.2),并忽略高阶 Fourier 项得

$$\left\{\begin{aligned}
& i\dot{a} + \Big(\frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2 + \frac{1}{2}|c|^2 - 1\Big)a + \\
& \quad \frac{1}{2}(ab^* + a^*b)b + \frac{1}{2}(ac^* + a^*c)c = \\
& \quad i\varepsilon\Big[\alpha a + \frac{1}{2}b(ac^* + a^*c)\beta_3 - \\
& \quad \frac{1}{2}c(ab^* + a^*b)\beta_3 + \sqrt{2}\Gamma\Big] \\
& i\dot{b} + \Big(\frac{1}{2}|a|^2 + \frac{3}{4}|b|^2 + \frac{1}{4}|c|^2 - 2\Big)b + \\
& \quad \frac{1}{2}(ab^* + a^*b)a + \frac{1}{4}(bc^* + b^*c)c = \\
& \quad i\varepsilon\Big[\alpha b - \beta_1 c + c\Big(\frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2 + \frac{1}{2}|c|^2\Big)\beta_2 + \\
& \quad \frac{1}{2}a(ac^* + a^*c)(\beta_2 + \beta_3) + \frac{1}{4}b(bc^* + cb^*)\cdot \\
& \quad (\beta_2 + 2\beta_3) - \frac{1}{4}c(|b|^2 - |c|^2)(\beta_2 + 2\beta_3)\Big] \\
& i\dot{c} + \Big(\frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{4}|b|^2 + \frac{3}{4}|c|^2 - 2\Big)c + \\
& \quad \frac{1}{2}(ac^* + a^*c)a + \frac{1}{4}(bc^* + b^*c)b = \\
& \quad i\varepsilon\Big[\alpha c + \beta_1 b - b\Big(\frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2 + \frac{1}{2}|c|^2\Big)\beta_2 - \\
& \quad \frac{1}{2}a(ab^* + a^*b)(\beta_2 + \beta_3) - \\
& \quad \frac{1}{4}c(bc^* + cb^*)(\beta_2 + 2\beta_3) - \\
& \quad \frac{1}{4}b(|b|^2 - |c|^2)(\beta_2 + 2\beta_3)\Big]
\end{aligned}\right. \tag{8.2.5}$$

容易验证，下面的坐标变换对于未扰动($\varepsilon=0$)的方程组是不变的.

$$(a,b,c)\to(-a,b,c) \tag{8.2.6}$$

$$(a,b,c)\to(a,-b,-c) \tag{8.2.7}$$

其中式(8.2.7)对于扰动($\varepsilon>0$)方程组也是不变的.

进一步假设

$$\begin{cases} a=\rho(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)} \\ b=[x_1(t)+ix_2(t)]\mathrm{e}^{i\theta(t)} \\ c=[y_1(t)+iy_2(t)]\mathrm{e}^{i\theta(t)} \end{cases} \tag{8.2.8}$$

则有

$$\left\{\begin{aligned}
&\dot\rho+x_1x_2\rho+y_1y_2\rho=\varepsilon[\alpha\rho+\sqrt{2}\Gamma\cos\theta] \\
&\dot\theta=\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)-1+x_1^2+y_1^2+ \\
&\qquad \varepsilon\beta_3(x_2y_1-x_1y_2)-\frac{\sqrt{2}\varepsilon\Gamma\sin\theta}{\rho} \\
&\dot x_1-x_2\dot\theta+\left[\frac{1}{2}\rho^2+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2-2\right]x_2+ \\
&\quad \frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_2)y_2= \\
&\quad \varepsilon(\alpha x_1-\beta_1y_1)+\varepsilon\Big\{\frac{1}{2}(\rho^2+x^2+y^2)y_1\beta_2+ \\
&\quad \rho^2y_1(\beta_2+\beta_3)+\frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_2)x_1(\beta_2+2\beta_3)- \\
&\quad \frac{1}{4}y_1(x^2-y^2)(\beta_2+2\beta_3)\Big\} \\
&-\dot x_2-x_1\dot\theta+\left[\frac{1}{2}\rho^2+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2-2\right]x_1+ \\
&\quad \frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_2)y_1+\rho^2x_1= \\
&\quad -\varepsilon\Big\{\frac{1}{2}(\rho^2+x^2+y^2)y_2\beta_2+ \\
&\quad \frac{1}{2}x_2(x_1y_1+x_2y_2)(\beta_2+2\beta_3)- \\
&\quad \frac{1}{4}(x^2-y^2)y_2(\beta_2+2\beta_3)\Big\}-\varepsilon(\alpha x_2-\beta_1y_2) \\
&\Big\{\dot y_1-y_2\dot\theta+\left[\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}y^2-2\right]y_2+ \\
&\quad \frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_2)x_2\Big\}= \\
&\quad \varepsilon(\alpha y_1+\beta_1x_1)-\varepsilon\Big\{\frac{1}{2}(\rho^2+x^2+y^2)x_1\beta_2+ \\
&\quad \rho^2x_1(\beta_2+\beta_3)+\frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_2)\cdot \\
&\quad y_1(\beta_2+2\beta_3)+\frac{1}{4}x_1(x^2-y^2)(\beta_2+2\beta_3)\Big\} \\
&\Big\{-\dot y_2-y_1\dot\theta+\left[\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}y^2-2\right]y_1+ \\
&\quad \frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_2)x_1+\rho^2y_1\Big\}= \\
&\quad -\varepsilon(\alpha y_2+\beta_1x_2)+\varepsilon\Big\{\frac{1}{2}(\rho^2+x^2+y^2)x_2\beta_2+ \\
&\quad \frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_2)y_2(\beta_2+2\beta_3)+ \\
&\quad \frac{1}{4}x_2(x^2-y^2)(\beta_2+2\beta_3)\Big\}
\end{aligned}\right. \tag{8.2.9}$$

其中 $x^2 = x_1^2 + x_2^2, y^2 = y_1^2 + y_2^2$,又令 $I = \frac{1}{2}(\rho^2 + x^2 + y^2)$,则方程组(8.2.9)变形为

$$
\begin{cases}
\dot{I} = 2\varepsilon\alpha I + \sqrt{2}\varepsilon\Gamma\sqrt{2I - x^2 - y^2}\cos\theta \\
\dot{\theta} = I - 1 + x_1^2 + y_1^2 - \dfrac{\sqrt{2}\varepsilon\Gamma\sin\theta}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} + \\
\qquad \beta_3\varepsilon(y_1x_2 - x_1y_2) \\
\dot{x}_1 = x_2 + \dfrac{3}{4}x_1^2x_2 - \dfrac{1}{4}x_2^3 + \dfrac{5}{4}y_1^2x_2 + \dfrac{1}{4}x_2y_2^2 - \\
\qquad \dfrac{1}{2}(x_1y_1 + x_2y_2)y_2 + \varepsilon(\alpha x_1 - \beta_1y_1) + \\
\qquad \varepsilon\Big\{\beta_2y_1I + \rho^2y_1(\beta_2 + \beta_3) + \dfrac{1}{2}(\beta_2 + 2\beta_3)\cdot \\
\qquad x_1(x_1y_1 + x_2y_2) - \dfrac{1}{4}y_1(x^2 - y^2)(\beta_2 + 2\beta_3)\Big\} + \\
\qquad \beta_3\varepsilon x_2(y_1x_2 - x_1y_2) - \dfrac{\sqrt{2}\varepsilon\Gamma x_2\sin\theta}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \\
\dot{x}_2 = (2I - 1)x_1 - \dfrac{7}{4}x_1^3 - \dfrac{9}{4}x_1y_1^2 - \dfrac{3}{4}x_1x_2^2 - \\
\qquad \dfrac{5}{4}x_1y_2^2 + \dfrac{1}{2}(x_1y_1 + x_2y_2)y_1 + \\
\qquad \varepsilon(\alpha x_2 - \beta_1y_2) + \varepsilon\Big\{\beta_2Iy_2 + \dfrac{1}{2}x_2(\beta_2 + 2\beta_3)\cdot \\
\qquad (x_1y_1 + x_2y_2) - \dfrac{1}{4}(\beta_2 + 2\beta_3)y_2(x^2 - y_2^2)\Big\} - \\
\qquad \beta_3\varepsilon x_1(y_1x_2 - x_1y_2) + \dfrac{\sqrt{2}\varepsilon\Gamma x_1\sin\theta}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \\
\dot{y}_1 = y_2 + \dfrac{3}{4}y_1^2y_2 - \dfrac{1}{4}y_2^3 + \dfrac{5}{4}x_1^2y_2 + \dfrac{1}{4}x_2^2y_2^2 - \\
\qquad \dfrac{1}{2}x_2(x_1y_1 + x_2y_2) + \varepsilon(\alpha y_1 + \beta_1y_1) - \\
\qquad \varepsilon\Big\{\beta_2x_1I + \rho^2x_1(\beta_2 + \beta_3) + \dfrac{1}{2}(\beta_2 + 2\beta_3)\cdot \\
\qquad y_1(x_1y_1 + x_2y_2) + \dfrac{1}{4}(\beta_2 + 2\beta_3)x_1(x^2 - y^2)\Big\} + \\
\qquad \beta_3\varepsilon y_2(y_1x_2 - x_1y_2) - \dfrac{\sqrt{2}\varepsilon\Gamma y_2\sin\theta}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \\
\dot{y}_2 = (2I - 1)y_1 - \dfrac{7}{4}y_1^3 - \dfrac{3}{4}y_1y_2^2 - \dfrac{9}{4}x_1^2y_1 - \\
\qquad \dfrac{5}{4}x_2^2y_1 + \dfrac{1}{2}x_1(x_1y_1 + x_2y_2) + \\
\qquad \varepsilon(\alpha y_2 + \beta_1x_2) - \varepsilon\Big\{\beta_2Ix_2 + \dfrac{1}{2}(\beta_2 + 2\beta_3)\cdot \\
\qquad (x_1y_1 + x_2y_2)y_2 + \dfrac{1}{4}(\beta_2 + 2\beta_3)x_2(x^2 - y^2)\Big\} - \\
\qquad \beta_3\varepsilon y_1(y_1x_2 - x_1y_2) + \dfrac{\sqrt{2}\varepsilon\Gamma y_1\sin\theta}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}}
\end{cases}
\tag{8.2.10}
$$

在方程组(8.2.10)中 $\rho^2 = 2I - x^2 - y^2$, ε 是一个小的扰动参数。当 $\varepsilon = 0$ 时,系统式(8.2.10)是可积的,且有下面的能量积分:

$$
H = -\frac{1}{2}I^2 + I - I(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{7}{16}x_1^4 + \\
\frac{9}{8}x_1^2y_1^2 + \frac{3}{8}x_1^2x_2^2 + \frac{5}{8}x_1^2y_2^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{7}{16}y_1^4 +
$$

$$\frac{3}{8}y_1^2y_2^2+\frac{5}{8}y_1^2x_2^2+\frac{1}{2}(x_2^2+y_2^2)-\frac{1}{16}x_2^4+$$

$$\frac{1}{8}x_2^2y_2^2-\frac{1}{16}y_2^4-\frac{1}{4}(x_1y_1+x_2y_2)^2 \tag{8.2.11}$$

于是,在 $\varepsilon=0$ 时,系统(8.2.10)能被写作

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dfrac{\partial H}{\partial x_2}, & \dot{x}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}\\ \dot{y}_1=\dfrac{\partial H}{\partial y_2}, & \dot{y}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial y_1}\\ \dot{I}=0, & \dot{\theta}=-\dfrac{\partial H}{\partial I}\end{cases} \tag{8.2.12}$$

我们注意到:子流形 $M_0=\{x_1=x_2=y_1=y_2=0, I_1<I<I_2, \theta\in[0,2\pi]\}$($I_1, I_2$ 是两个确定实数)是不变流形。对于 $I_1<I<I_2$,点 $x_1=x_2=y_1=y_2=0$ 是如下系统的一个双曲不动点:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dfrac{\partial H}{\partial x_2}, & \dot{x}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}\\ \dot{y}_1=\dfrac{\partial H}{\partial y_2}; & \dot{y}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial y_1}\end{cases} \tag{8.2.13}$$

这个双曲不动点有二维稳定和不稳定流形,而且这两个流形相交于一个二维同宿流形。

命题 8.2.1 在同宿流形上,同宿轨道有下面的形式:对于任意(I,θ)。有

(1) 若 $x_1\neq 0$ 或 $x_2\neq 0$,那么对任意 $k\in R$

$$x_1(t)=r(t)\cos\phi(t)$$
$$x_2(t)=r(t)\sin\phi(t)$$
$$y_1(t)=kr(t)\cos\phi(t)$$
$$y_2(t)=kr(t)\sin\phi(t)$$

(2) 若 $x_1=x_2=0$,则

$$x_1(t)=x_2(t)=0$$
$$y_1(t)=r(t)\cos\phi(t)$$
$$y_2(t)=r(t)\sin\phi(t)$$

这里

$$r^2=\frac{I(1+\cos 2\phi)-1}{(1+k^2)\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2\phi\right)}$$

$$\tan\phi=\lambda\tan(-\lambda t)$$

基中 $\lambda=\sqrt{2I-1}\left(\dfrac{1}{2}<I<4\right)$。

证明:对于系统(8.2.13),关于不动点(0,0,0,0)的特征函数为

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 1-2I & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 1-2I & \lambda\end{vmatrix}$$

特征根为 $\lambda_1=\lambda_3=\sqrt{2I-1}, \lambda_2=\lambda_4=-\sqrt{2I-1}$(这里 $I>\dfrac{1}{2}$),对应特征向量分别为

$$v_1=(f_1(I),f_2(I),0,0)^T$$
$$v_2=(f_1(I),-f_2(I),0,0)^T$$
$$v_3=(0,0,f_1(I),f_2(I))^T$$
$$v_4=(0,0,f_1(I),-f_2(I))^T$$

于是,局部不稳定流形是 v_1 和 v_3 的线性组合 $v=\{c_1v_1+c_3v_3 | c_1, c_3\in R\}$。若 $c_1\neq 0$,则有 $y_1=kx_1, y_2=kx_2$(其中 $k=\dfrac{c_3}{c_1}\in R$)。

我们也注意到,对于 $k\in R$,流形$\{(x_1,x_2,kx_1,kx_2)\}$对于系统(8.2.13)是不变的。在这个不变平面上,系统(8.2.13)化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \dfrac{3}{4}(1+k^2)x_1^2x_2 - \dfrac{1}{4}(1+k^2)x_2^3 \\ \dot{x}_2 = (2I-1)x_1 - \dfrac{7}{4}(1+k^2)x_1^3 - \\ \qquad \dfrac{3}{4}(1+k^2)x_1x_2^2 \end{cases} \tag{8.2.14}$$

这也是一个 Hamilton 系统且有能量函数

$$H_0 = -\frac{1}{2}I^2 + I + \frac{7}{16}(1+k^2)x_1^4 + \frac{3}{8}(1+k^2)x_1^2x_2^2 - \frac{1}{16}(1+k^2)x_2^4 - (I - \frac{1}{2})x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{8.2.15}$$

简单分析可知，对于系统(8.2.14)，点(0,0)是一个双曲不动点，有同宿轨道与之连接。现给出同宿轨道的显式表示。

设 $x_1 = r\cos\phi, x_2 = r\sin\phi$，那么

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{1}{2}[2Ir - (1+k^2)r^3]\sin2\phi \\ \dot{\phi} = -1 + I(1+\cos2\phi) - \\ \qquad (1+k^2)r^2(\dfrac{3}{4} + \cos2\phi) \end{cases} \tag{8.2.16}$$

从而，Hamilton 能量函数变为

$$H_0 = -\frac{1}{2}I^2 + I + (1+k^2)r^4(\frac{3}{16} + \frac{1}{4}\cos2\phi) - r^2[\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(I\cos2\phi - 1)] \tag{8.2.17}$$

于是

$$r^2 = \frac{I(1+\cos2\phi) - 1}{(1+k^2)(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos2\phi)} \tag{8.2.18}$$

且 $\dot{\phi} = 1 - I(1+\cos2\phi)$。进一步，对于 $\frac{1}{2} < I < 4$ 和初值条件 $\phi(t=0)=0$ 有：

$$\tan\phi = \lambda\tanh(-\lambda t) \tag{8.2.19}$$

这里 $\lambda = \sqrt{2I-1}$，把式(8.2.19)代入式(8.2.18)，得：

$$r^2 = \frac{1}{1+k^2} \cdot \frac{8\lambda^2}{(4-I)\cosh(2\lambda t) + 3 + I} \tag{8.2.20}$$

命题获证。

设 $\xi = \theta + \phi$，则

$$\dot{\xi} = \dot{\theta} + \dot{\phi} = I - 1 + \frac{1}{8}(1+k^2)r^2 \tag{8.2.21}$$

利用式(8.2.20)及初始条件 $\xi(t=0) = \xi_0$，得

$$\xi(t) = \frac{1}{(1+k^2)\sqrt{7}}\text{arth}[\frac{\lambda}{\sqrt{7}}\tanh(\lambda t)] + (I-1)t + \xi_0 \tag{8.2.22}$$

未扰动向量场限制在 M_0 上时为

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\theta} = I - 1 \end{cases} \tag{8.2.23}$$

这个系统是相当简单的，它的轨道除 $I=1$ 外均是周期轨道。而当 $I=1$ 时，$\dot{\theta}=0$，即由 $I=1$ 产生一个不动点圆，于是，我们有一个共振 $I=1$。在共振值 $I=1$ 时，利用式(8.2.19)、式(8.2.22)得

$$\begin{cases} \xi(-\infty) = -\dfrac{1}{\sqrt{7}(1+k^2)}\text{arth}(\sqrt{\dfrac{1}{7}}) + \xi_0 \\ \xi(+\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{7}(1+k^2)}\text{arth}(\sqrt{\dfrac{1}{7}}) + \xi_0 \\ \phi(-\infty) = \dfrac{\pi}{4}, \qquad \phi(+\infty) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \tag{8.2.24}$$

又因为 $\xi = \theta + \phi$，则

$$
\begin{cases}
\theta(-\infty) = \xi_0 - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{7(1+k^2)}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right) \\
\theta(+\infty) = \xi_0 + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{7(1+k^2)}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right) \\
\Delta\theta = \Delta(+\infty) - \Delta(-\infty) = \dfrac{\pi}{2} + \\
\qquad \dfrac{2}{\sqrt{7(1+k^2)}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)
\end{cases}
\tag{8.2.25}
$$

8.2.2 正规双曲不变流形的不变性

在这一部分，我们列出正规双曲不变流形和它的稳定与不稳定流形的某些结果。首先，对于 $\varepsilon=0$，M_0 是正规双曲不变流形。

在 $\varepsilon>0$ 时，我们知道 $x_1=x_2=y_1=y_2=0$ 在扰动系统(8.2.10)之下是不变的，因此，集合

$$
M_\varepsilon = \{(x,y,I,\theta) \mid x = y = 0, \quad \frac{1}{2} < I < 4, \theta \in [0,2\pi]\} \tag{8.2.26}
$$

对于扰动系统而言是一个不变流形(这里用 x 和 y 分别表示(x_1、x_2)和(y_1,y_2))。不过，在 M_0 里的轨道与 M_ε 里轨道有很大的不同，由于对扰动问题而言 $\dot{I}\neq 0$，所以 M_ε 必须作为一个有边界的不变流形。这意味着 M_ε 里的轨道要离开 M_ε 只有穿过它的边界。在这种情况下，我们能够证明：对于 ε 充分小，扰动问题式(8.2.10)存在局部不变流形 $W^s_{\text{loc}}(M_\varepsilon)$ 和 $W^u_{\text{loc}}(M_\varepsilon)$，它们分别作为未扰动稳定和不稳定流形 $W^s_{\text{loc}}(M_0)$ 与 $W^u_{\text{loc}}(M_0)$ 的图而被表示。而且，这些流形具有与向量场一样的可微性，我们用 $W^s(M_\varepsilon)$ 和 $W^u(M_\varepsilon)$ 分别表示 M_ε 的整体稳定流形与整体不稳定流形，并定义如下：让 $\Phi_t(\cdot)$ 表示由式(8.2.10)生成的流，则

$$
W^s(M_\varepsilon) = \bigcup_{t\leqslant 0}\Phi_t(W^s_{\text{loc}}(M_\varepsilon)\cap U^\delta)
$$

$$
W^u(M_\varepsilon) = \bigcup_{t\geqslant 0}\Phi_t(W^u_{\text{loc}}(M_\varepsilon)\cap U^\delta)
$$

这里 U^δ 是 M_0 的一个 δ 邻域。关于扰动的稳定与不稳定流形的详细描述可参见文献[91]。

接下来，我们在共振附近讨论 M_ε 上的动力学行为。扰动矢量场式(8.2.10)限制在 M_ε 上得

$$
\begin{cases}
\dot{I} = 2\varepsilon[\Gamma\sqrt{I}\cos\theta + \alpha I] \\
\dot{\theta} = I - 1 - \dfrac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{I}}\sin\theta
\end{cases}
\tag{8.2.27}
$$

设 $I=1+\sqrt{2\varepsilon\Gamma}h$，$\tau=\sqrt{2\varepsilon\Gamma}t$，则式(8.2.27)化为

$$
\begin{cases}
h' = \cos\theta + \dfrac{\alpha}{\Gamma} + \eta\left(\dfrac{\alpha}{\Gamma} + \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)h + O(\eta^2) \\
\theta' = h - \dfrac{\eta}{2}\sin\theta + O(\eta^2)
\end{cases}
\tag{8.2.28}
$$

这里“′”表示对 τ 的导数，$\eta=\sqrt{2\varepsilon\Gamma}$。对式(8.2.28)在 $\varepsilon\to 0$ 时取极限(或者让 $\eta=0$)得

$$
\begin{cases}
h' = \cos\theta + \dfrac{\alpha}{\Gamma} \\
\theta' = h
\end{cases}
\tag{8.2.29}
$$

针对系统式(8.2.28)，区域 M_ε 定义为

$$
\mathscr{A}_\varepsilon = \{x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0, \mid h \mid < C, \theta \in [0,2\pi]\}
$$

这里 C 是一个 $O(1)$ 常数，被选择为足够大使其能包含共振结构。

简单分析可得：

(1) 系统(8.2.29)是一个 Hamilton 系统，有 Hamilton 能量函数

$$
\mathscr{H} = -\frac{h^2}{2} + \sin\theta + \frac{\alpha}{\Gamma}\theta \tag{8.2.30}
$$

(2) 系统(8.2.29)有两个不动点，一个是中心点 p_0，另一个是鞍点 q_0，这里

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \left(0, \pi - \arccos\frac{\alpha}{\Gamma}\right) = (0, \theta_{p_0}) \\
q_0 &= \left(0, \pi + \arccos\frac{\alpha}{\Gamma}\right) = (0, \theta_{q_0})
\end{aligned}
\tag{8.2.31}
$$

利用隐函数定理和标准的相平面分析得：对于 η 充分小且 $0<\frac{\alpha}{\Gamma}<1$，$p_0$ 变化成为收点，用 p_ε 表示，鞍点 q_0 保持下来，用 q_ε 表示。并且原来的同宿到 q_0 的轨道被打破，q_ε 的不稳定流形一支趋向于 p_ε。我们强调：

$$p_\varepsilon = p_0 + O(\varepsilon = \eta^2), \qquad q_\varepsilon = q_0 + O(\varepsilon = \eta^2)$$

即，在 I-θ 坐标系下，p_ε 与 p_0，q_ε 和 q_0 是 $O(\varepsilon)$ 接近的。进一步，对于 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 的稳定与不稳定流形，我们有如下纤维定理。

定理 8.2.2 （见文献[134]）。存在 $\delta_0>0$ 和 $\varepsilon_0>0$ 使得：对于任意 $(h,\bar{\theta})\in\mathcal{M}_\varepsilon$，有一族二维稳定纤维，它能够表示为

$$\begin{cases} x_2 = x_2(x_1,y_2;h,\bar{\theta},\sqrt{\varepsilon}) \\ y_2 = y_2(x_1,y_2;\bar{h},\theta,\sqrt{\varepsilon}) \\ h = h(x_1,y_2;\bar{h},\bar{\theta},\sqrt{\varepsilon}) \\ \theta = \theta(x_1,y_2;\bar{h},\bar{\theta},\sqrt{\varepsilon}) \end{cases}$$

点 $(\bar{h},\bar{\theta})$ 被称为纤维的基点，这些图对于任意 $0<\delta\leqslant\delta_0, 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 和 $|x_1|\leqslant\delta$，$|y_1|\leqslant\delta$ 有定义，而且，这些曲线具有以下性质：

(1) 它们关于 x_1,y_2 是 C^r 的，关于 $(\bar{h},\bar{q},\sqrt{\varepsilon})$ 是 C^{r-1} 的。

(2) $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)=\bigcup_{(h,\theta)\in\mathcal{M}_\varepsilon}[x_2(x_1,y_1;\bar{h},\bar{\theta},\sqrt{\varepsilon}),y_2(x_1,y_1;\bar{h},\theta,\sqrt{\varepsilon})]$。

(3) 设 $(\bar{h}(t),\bar{\theta}(t))$ 是 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 中满足 $(\bar{h}(0),\bar{\theta}(0))=(\bar{h},\bar{\theta})$ 的一条轨道，让 $(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t),h(t),\theta(t))$ 表示 $W^s_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ 中满足

$$\begin{cases} x_2(0) = x_2(x_1(0),y_1(0);h,\bar{\theta},\sqrt{\varepsilon}) \\ y_2 = y_2(x_1(0),y_1(0);\bar{h},\bar{\theta},\sqrt{\varepsilon}) \\ h(0) = h(x_1(0),y_1(0);\bar{h},\bar{\theta},\sqrt{\varepsilon}) \\ \theta(0) = \theta(x_1(0),y_1(0);h,\bar{\theta},\sqrt{\varepsilon}) \end{cases} \tag{8.2.32}$$

的一条轨道，即这条轨道由基点为 $(\bar{h},\bar{\theta})$ 的纤维开始。那么，当 $(\bar{h}(t),\bar{\theta}(t))\in\mathcal{M}_\varepsilon$ 时，

$$|(x(t),y(t),h(t),\theta(t))-(0,0,\bar{h}(t),\bar{\theta}(t))|<Ce^{[-\lambda t]}$$

对于所有 $t>0$ 和某个 $C>0$ 成立。换句话说，从一条稳定纤维开始的轨道趋近于 $\mathcal{M}_\varepsilon$ 中从这条纤维的基点开始的轨道。

(4) 在时间流映照下，从纤维到纤维的映射使这一族稳定纤维形成不变纤维族。具体地，若 $(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t),h(t),\theta(t))$ 是满足条件(8.2.32)的一条轨道，则

$$\begin{cases} x_2(t) = x_2(x_1(t),y_1(t);\bar{h}(t),\bar{\theta}(t),\sqrt{\varepsilon}) \\ y_2(t) = y_2(x_1(t),y_1(t);h(t),\bar{\theta}(t),\sqrt{\varepsilon}) \\ h(t) = h(x_1(t),y_1(t);\bar{h}(t),\bar{\theta}(t),\sqrt{\varepsilon}) \\ \theta(t) = \theta(x_1(t),y_1(t);\bar{h}(t),\bar{\theta}(t),\sqrt{\varepsilon}) \end{cases}$$

(5) 在 $\varepsilon=0$ 时，未扰动纤维对应于未扰动异宿轨道。因此，扰动和未扰动纤维以阶 $O(\sqrt{\varepsilon})C^r$ 接近。

一个类似的结果对于 $W^u_{loc}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ 成立，而且，我们也能得到 $W^u(q_\varepsilon)$ 和 $W^s(q_\varepsilon)$ 的纤维表示。

8.2.3 同宿轨道的保持性

扰动系统(8.2.10)能够改写为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial x_2} + \varepsilon g^{x_1} \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} + \varepsilon g^{x_2} \\ \dot{y}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial y_2} + \varepsilon g^{y_1} \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial y_1} + \varepsilon g^{y_2} \\ \dot{I} = \dfrac{\partial H}{\partial \theta} + \varepsilon g^I, (\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = 0) \\ \dot{\theta} = -\dfrac{\partial H}{\partial I} + \varepsilon g^\theta \end{cases} \tag{8.2.33}$$

这里,H 是由式(8.2.11)所确定的 Hamilton 能量函数,$(g^{x_1},g^{x_2},g^{y_1},g^{y_2},g^I,g^\theta)^{\mathrm{T}}$ 由方程组(8.2.10)定义,且有如下形式:

$$\begin{pmatrix} g^{x_1} \\ g^{x_2} \\ g^{y_1} \\ g^{y_2} \\ g^{I} \\ g^{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{-\partial H_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial H_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{-\partial H_1}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial H_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{-\partial H_1}{\partial I} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ 2I \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1^{x_1} \\ g_1^{x_2} \\ g_1^{y_1} \\ g_1^{y_2} \\ g_1^{I} \\ g_1^{\theta} \end{pmatrix} \tag{8.2.34}$$

其中$(g_1^{x_1},g_1^{x_2},g_1^{y_1},g_1^{y_2},g_1^I,g_1^\theta)^{\mathrm{T}}$ 由式(8.2.10)中含有系数 β_1、β_2、β_3 的所有项构成,$H_1=\sqrt{2}\Gamma\sqrt{2I-x_1^2-x_2^2-y_1^2-y_2^2}\sin\theta$。

为了证明系统(8.2.33)的同宿轨道的存在性,需分两步进行。第一步,我们运用 Melnikov 方法去计算 $W^s(M_\varepsilon)$与 $W^u(M_\varepsilon)$之间的距离,从而表明 M_ε 中不动点的不稳定流形在 $W^s(M_\varepsilon)$中。第二步则要证明前面的不稳定流形相交于基点在 M_ε 里的稳定流形的稳定纤维。

现在,我们讨论 $W^u(q_\varepsilon)$与 $W^s(\mathscr{A}_\varepsilon\subset M_\varepsilon)$之间的距离。众所周知,对于同宿流形中的任意一点$(x_1,x_2,y_1,y_2,I,\theta)$,该点处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(\frac{\partial H}{\partial x_1},\frac{\partial H}{\partial x_2},\frac{\partial H}{\partial y_1},\frac{\partial H}{\partial y_2},\frac{\partial H}{\partial I},\frac{\partial H}{\partial \theta})$。采用第五章中相同的讨论,则有

$$M(\theta_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle\boldsymbol{n},(g^{x_1},g^{x_2},g^{y_1},g^{y_2},g^I,g^\theta)\rangle(q^h(t,I,\theta_0))\mathrm{d}t \tag{8.2.35}$$

这里 $q^h(t,I,\theta_0)$是同宿流形上的轨道并经过点$(x_1,x_2,y_1,y_2,I,\theta)=(0,0,0,0,1,\theta_0)$。容易验证,$M(\theta_0)$与系数 $\beta_j(j=1,2,3)$无关。

事实上,在同宿流形上$(I=1)$,有

$$\boldsymbol{n}=(-\dot{x}_2,\dot{x}_1,-\dot{y}_2,\dot{y}_1,-\dot{\theta},0)$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\langle\boldsymbol{n},(g^{x_1},g^{x_2},g^{y_1},g^{y_2},g^I,g^\theta)\rangle=\\
&\quad(-\dot{x}_2)\{-\beta_1kx_1+\beta_2kx_1I+(\beta_2+\beta_3)kx_1\rho^2+\\
&\quad\frac{1}{2}(\beta_2+2\beta_3)kx_1(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{4}(\beta_2+2\beta_3)k(1-\\
&\quad k^2)x_1(x_1^2+x_2^2)\}+\dot{x}_1\{-\beta_1kx_2+\beta_2kx_2I+\\
&\quad\frac{1}{2}(\beta_2+2\beta_3)kx_2(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{4}(\beta_2+2\beta_3)k(1-k^2)\cdot\\
&\quad x_2(x_1^2+x_2^2)\}-k\dot{x}_2\{\beta_1x_1-\beta_2x_1I-(\beta_2+\beta_3)x_1\rho^2-\\
&\quad\frac{1}{2}(\beta_2+2\beta_3)k^2x_1(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{4}(\beta_2+2\beta_3)(1-k^2)x_1\cdot\\
&\quad(x_1^2+x_2^2)\}+kx_1^2\{\beta_1kx_2-\beta_2Ix_2-\frac{1}{2}(\beta_2+2\beta_3)\cdot\\
&\quad k^2x_2(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{4}(\beta_2+2\beta_3)(1-k^2)x_2(x_1^2+x_2^2)\}=0
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\langle\boldsymbol{n},(g^{x_1},g^{x_2},g^{y_1},g^{y_2},g^I,g^\theta)\rangle(q^h(t,I=1,\theta_0))=\\
&\quad-\dot{x}_2(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}+\alpha x_1)+\dot{x}_1(-\frac{\partial H_1}{\partial x_1}+\alpha x_2)-\\
&\quad\dot{y}_2(\frac{\partial H_1}{\partial y_2}+\alpha y_1)+\dot{y}_1(-\frac{\partial H_1}{\partial y_1}+\alpha y_2)-\dot{\theta}(\frac{\partial H_1}{\partial \theta}+2\alpha)=\\
&\quad-\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t}+\alpha(1+k^2)(\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2)-2\alpha\dot{\theta}
\end{aligned}\tag{8.2.36}$$

上式右端第一、第三项的积分容易被得到

$$\begin{cases} -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH_1}{dt}dt = -2\Gamma[\sin\theta(+\infty) - \sin\theta(-\infty)] = \\ \qquad -2\Gamma[\sin\theta(-\infty)(\cos\Delta\theta - 1) + \cos\theta(-\infty)\sin\Delta\theta] \\ -\int_{-\infty}^{\infty} 2\alpha\dot{\theta}dt = -2\alpha\Delta\theta \end{cases} \tag{8.2.37}$$

在不动点处，有

$$\cos\theta(-\infty) = -\frac{\alpha}{\Gamma}, \quad \sin\theta(-\infty) = \sqrt{1-(\frac{\alpha}{\Gamma})^2} \tag{8.2.38}$$

所以

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH_1}{dt}dt = 2\Gamma[\frac{\alpha}{\Gamma}\sin\Delta\theta - \sqrt{1-(\frac{\alpha}{\Gamma})^2}(\cos\Delta\theta - 1)] \tag{8.2.39}$$

下面，我们计算式(8.2.36)右端第二项的积分。由于 $x_1 = r\cos\phi, x_2 = r\sin\phi$，则

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1\dot{x}_2 = -r^2\dot{\phi} \tag{8.2.40}$$

从而

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}(\dot{x}_1 x_2 - x_1\dot{x}_2)dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} r^2\dot{\phi}dt = \\ &-\frac{8}{1+k^2}\int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} \frac{\cos2\phi}{3+4\cos2\phi}d\phi = \\ &-\frac{2}{1+k^2}\Delta\phi + \frac{6}{1+k^2}\int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} \frac{d\phi}{3+4\cos2\phi} = \\ &-\frac{2}{1+k^2}\Delta\phi - \frac{6}{\sqrt{7}(1+k^2)}\text{arth}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \end{aligned} \tag{8.2.41}$$

这里 $\Delta\phi = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$。故 Melnikov 积分为

$$\begin{aligned} M(\alpha,\Gamma,k) &= 2\Gamma[\frac{\alpha}{\Gamma}\sin\Delta\theta - \sqrt{1-(\frac{\alpha}{\Gamma})^2}(\cos\Delta\theta - 1)] - 2\alpha\Delta\theta + \\ &\pi\alpha - \frac{6\alpha}{\sqrt{7}}\text{arth}(\frac{\sqrt{7}}{4}) = \\ &2\Gamma[\frac{\alpha}{\Gamma}\sin\Delta\theta - \sqrt{1-(\frac{\alpha}{\Gamma})^2}(\cos\Delta\theta - 1)] \\ &\frac{4\alpha}{\sqrt{7}(1+k^2)}\text{arth}(\sqrt{\frac{1}{7}}) - \frac{6\alpha}{\sqrt{7}}\text{arth}(\frac{\sqrt{7}}{4}) \end{aligned} \tag{8.2.42}$$

其中 $\Delta\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{7}(1+k^2)}\text{arth}(\sqrt{\frac{1}{7}})$。Melnikov 积分可以另写为

$$\begin{aligned} M(\alpha,\Gamma,k,\theta_{q_0}) &= 2\Gamma[\sin(\theta_{q_0} + \Delta\theta) - \sin\theta_{q_0}] - \\ &\frac{4\alpha}{\sqrt{7}(1+k^2)}\text{arth}(\sqrt{\frac{1}{7}}) - \frac{6\alpha}{\sqrt{7}}\text{arth}(\frac{\sqrt{7}}{4}) \end{aligned} \tag{8.2.43}$$

其中 $\theta_{q_0} = \pi + \arccos\frac{\alpha}{\Gamma}$。

利用文献[91,111]所得到的理论。为了得到同宿到 q_ε 的轨道的存在性，首先要表明 Melnikov 函数有简单零点。这个条件对于证明存在一条轨道，它在 $t\to-\infty$ 时趋近于 q_ε 而在 $t\to+\infty$ 时趋近于 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 中一条轨道，是充分的。进一步，为了证明 $W^u(q_\varepsilon)$ 相交于基点在 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 里的一条稳定纤维，我们定义

$$\Delta\mathscr{H} = \mathscr{H}(0,\theta_b) - \mathscr{H}(0,\pi + \arccos\frac{\alpha}{\Gamma})$$

这里 $\mathscr{H}$ 由式(8.2.30)给出。因此，q_ε 的不稳定流形回到 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 的位置，需由如下方程的解给出：

$$\Delta\mathscr{H} = \frac{\alpha}{\Gamma}(\theta_b - \theta_{q_0}) + \sin\theta_b - \sin\theta_{q_0} = 0 \tag{8.2.44}$$

其中 θ_b 被称为“起飞”角度。

根据以上讨论，我们得到关于鞍点 q_ε 的同宿轨道的存在性定理。

定理 8.2.3 选择参数使得 $M(\alpha,\Gamma,k,\theta_{q_0})$有简单零点且

$$\frac{\alpha}{\Gamma}(\theta_b-\theta_{q_0})+\sin\theta_b-\sin\theta_{q_0}=0$$

在 Melnikov 函数简单零点的一个 $O(1)$区间上取值，那么，对于 ε 充分小，存在连接 q_ε 的同宿轨道。

注：(1) 用文献[91,111]中相同的讨论，可以表明：对于适当的参数 α 和 Γ，定理的条件能够被满足。

(2) 采用相同的论述，能够得到关于不动点 p_ε 的同宿轨道的存在性。

8.3 扰动非线性 Schrödinger 耦合方程组的同宿轨道的不变性

8.3.1 预备性结果

考虑如下扰动非线性 Schrödinger 耦合方程组

$$\begin{cases} iq_{1t}=q_{1xx}+2[|q_1|^2+|q_2|^2-\omega^2]q_1+i\varepsilon(\boldsymbol{D}_1q_1-r_1)\\ iq_{2t}=q_{2xx}+2[|q_1|^2+|q_2|^2-\omega^2]q_2+i\varepsilon(\boldsymbol{D}_2q_2-r_2)\end{cases}\tag{8.3.1}$$

其中：常数 $\omega\in(\frac{1}{2},1)$；ε 是一个小的正常数；$\boldsymbol{D}_j(j=1,2)$是 Sobolev 空间 $H^1_{e,p}=\{\varphi\in H^1,\varphi$ 关于 x 为偶的 2π 周期函数$\}$上的有界耗散算子。

$$\boldsymbol{D}_1q_1=-\alpha_1q_1+\beta_1\hat{B}q_1$$

$$\boldsymbol{D}_2q_2=-\alpha_2q_2+\beta_2\hat{B}q_2$$

$\hat{B}$ 表示∂_{xx}的 Fouriev 截断

$$\hat{B}\cos(kx)=\begin{cases}-k^2\cos(kx), & k\leqslant K\\ 0, & k\geqslant K\end{cases}$$

$K,\alpha_j,\beta_j,r_j(j=1,2)$是正常数。有下面解存在定理。

定理8.3.1 Cauchy 问题：$\forall(q_{01},q_{02})\in H^1_{e,p}\times H^1_{e,p}$，$\forall t\in(-\infty,+\infty)$，存在方程组(8.3.1)的惟一解$(q_1(t,q_{01};\varepsilon),q_2(t,q_{02};\varepsilon))$在 $H^1_{e,p}\times H^1_{e,p}$中关于 t 连续，且$(q_1,q_2)|_{t=0}=(q_{01},q_{02})$；$(q_1(t,q_{01},\varepsilon),q_2(t,q_{02},\varepsilon))$光滑地依赖于$(q_{01},q_{02})$和 ε。

这个定理的证明用标准的能量估计方法，在此略去。

常数平面

$$\Pi_c=\{(q_1(x,t),q_2(x,t)):\partial_x(q_1,q_2)\overset{\text{def}}{=}0\}$$ 是一四维子空间。

在 Π_c 上，方程组(8.3.1)可写为

$$\begin{cases} iq_{1t}=2[|q_1|^2+|q_2|^2-\omega^2]q_1-i\varepsilon(\alpha_1q_1+r_1)\\ iq_{2t}=2[|q_1|^2+|q_2|^2-\omega^2]q_2-i\varepsilon(\alpha_2q_2+r_2)\end{cases}\tag{8.3.2}$$

取极坐标

$$q_j=\sqrt{I_j}\exp\theta_j,j=1,2$$

方程(8.3.2)变为

$$\begin{cases} I_{1t}=-2\varepsilon(\alpha_1I_1+r_1\sqrt{I_1}\cos\theta_1)\\ \theta_{1t}=-2[I_1+I_2-\omega^2]+\varepsilon r_1\sin\theta_1/\sqrt{I_1}\\ I_{2t}=-2\varepsilon(\alpha_2I_2+r_2\sqrt{I_2}\cos\theta_2)\\ \theta_{2t}=-2[I_1+I_2-\omega^2]+\varepsilon r_2\sin\theta_2/\sqrt{I_2}\end{cases}\tag{8.3.3}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，无扰动系统在 Π_c 上可写为

$$I_{jt}=0$$

$$\theta_{jt}=-2(I_1+I_2-\omega^2),\qquad j=1,2$$

对应未扰动轨线是包含不动点球$(S_\omega:I_1+I_2=\omega^2)$的环套。

当 $\varepsilon > 0$ 时,系统式(8.3.3)的不动点满足下列方程

$$\varepsilon\cos\theta_j = -\frac{\alpha_j}{r_j}\sqrt{I_j}\varepsilon$$

$$\varepsilon\sin\theta_j = 2\frac{1}{r_j}\sqrt{I_j}(I_1 + I_2 - \omega^2), j = 1,2$$

按摄动展开,解上面方程,我们有两个不动点 $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$。

$$\begin{cases} I_{p_j} = \delta_j\omega^2 + \dfrac{\varepsilon}{2r_j\omega}\sqrt{\delta_j(r_j^2 - \alpha_j^2\omega^2\delta_j)} + o(\varepsilon^2) \\ \theta_{p_j} = -\arctan\dfrac{\sqrt{r_j^2 - \alpha_j^2\omega^2\delta_j}}{\alpha_j\omega\sqrt{\delta_j}} - \pi + o(\varepsilon) \\ I_{q_j} = \delta_j\omega^2 - \dfrac{\varepsilon}{2r_j\omega}\sqrt{\delta_j(r_j^2 - \alpha_j^2\omega^2\delta_j)} + o(\varepsilon^2) \\ \theta_{q_j} = \arctan\dfrac{\sqrt{r_j^2 - \alpha_j^2\omega^2\delta_j}}{\alpha_j\omega\sqrt{\delta_j}} - \pi + o(\varepsilon) \end{cases} \tag{8.3.4}$$

其中 $j = 1,2$, $\delta_j > 0$ 且 $\delta_1 + \delta_2 = 1$,在点$(I_{q_1}, \theta_{q_1}, I_{q_2}, \theta_{q_2})$周围线性化方程(8.3.3),我们得到关于线性系统的 4×4 矩阵

$$\begin{bmatrix} -2\varepsilon\alpha_1 - \dfrac{r_1\varepsilon}{\sqrt{I_1}}\cos\theta_1 & 2r_1\varepsilon\sqrt{I_1}\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -2 - \dfrac{\varepsilon r_1}{2\sqrt{I_1^3}}\sin\theta_1 & \dfrac{\varepsilon r_1}{\sqrt{I_1}}\cos\theta_1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon\alpha_2 - \dfrac{r_2\varepsilon}{\sqrt{I_2}}\cos\theta_2 & 2r_2\varepsilon\sqrt{I_2}\sin\theta_2 \\ -2 & 0 & -2 - \dfrac{\varepsilon r_2}{2\sqrt{I_2^3}}\sin\theta_2 & \dfrac{\varepsilon r_2}{\sqrt{I_2}}\cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

得到不动点$(I_{q_1}, \theta_{q_1}, I_{q_2}, \theta_{q_2})$的增长率

$$\begin{cases} \sigma_{q_j} = \pm 2\sqrt{\varepsilon\omega}(\delta_j(r_j^2 - \alpha_j^2\omega^2\delta_j))^{1/4} - \varepsilon\alpha_j + o(\varepsilon^{3/2}) \\ \sigma_{p_j} = \pm 2i\sqrt{\varepsilon\omega}(\delta_j(r_j^2 - \alpha_j^2\omega^2\delta_j))^{1/4} - \varepsilon\alpha_j + o(\varepsilon^{3/2}) \\ \qquad j = 1,2 \end{cases} \tag{8.3.5}$$

于是对 $\varepsilon > 0$,球 S_ω 破裂,出现两不动点,一个是鞍点 $Q = (Q_1, Q_2)$,另一个是螺旋线的收缩点 $P = (P_1, P_2)$。它们分别具有增长率 σ_q 和 σ_p。

引入变元 $J = (J_1, J_2)$

$$J_k = I_k - \delta_k\omega^2, k = 1,2$$

方程(8.3.3)可写为

$$\begin{cases} J_{1t} = -2\varepsilon[\alpha_1(J_1 + \delta_1\omega^2) + r_1\sqrt{J_1 + \delta_1\omega^2}\cos\theta_1] \\ \theta_{1t} = -2(J_1 + J_2) + \dfrac{\varepsilon r_1}{\sqrt{J_1 + \delta_1\omega^2}}\sin\theta_1 \\ J_{2t} = -2\varepsilon[\alpha_2(J_2 + \delta_2\omega^2) + r_2\sqrt{J_2 + \delta_2\omega^2}\cos\theta_2] \\ \theta_{2t} = -2(J_1 + J_2) + \dfrac{\varepsilon r_2}{\sqrt{J_2 + \delta_2\omega^2}}\sin\theta_2 \end{cases} \tag{8.3.6}$$

为了描述 Q 点的稳定流形附近的流,作尺度坐标变换

$$\begin{aligned} \tau &= \nu t \\ J_k &= \nu j_k, \nu = \sqrt{\varepsilon}; j = 1,2 \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

在这些坐标下,方程(8.3.3)可写为

$$\begin{cases} j_{1\tau} = -2[\alpha_1(\delta_1\omega^2 + \nu j_1) + r_1\sqrt{\delta_1\omega^2 + \nu j_1}\cos\theta_1] \\ \theta_{1\tau} = -2(j_1 + j_2) + \dfrac{\nu r_1}{\sqrt{\delta_1\omega^2 + \nu j_1}}\sin\theta_1 \\ j_{2\tau} = -2[\alpha_2(\delta_2\omega^2 + \nu j_2) + r_2\sqrt{\delta_2\omega^2 + \nu j_2}\cos\theta_2] \\ \theta_{2\tau} = -2(j_1 + j_2) + \dfrac{\nu r_2}{\sqrt{\delta_2\omega^2 + \nu j_2}}\sin\theta_2 \end{cases} \tag{8.3.8}$$

记 $y = (j_1, \theta_1, j_2, \theta_2)^{\mathrm{T}}$

$$y = Y(y, \nu) \tag{8.3.9}$$

其中 Y 由方程(8.3.8)所确定。

不动点 Q 的坐标为 $y_q = (j_{q_1}, \theta_{q_1}, j_{q_2}, \theta_{q_2})$。其中

$$\begin{cases} j_{q_k} = -\dfrac{\nu}{2\omega r_k}\sqrt{\delta_k(r_k^2 - \alpha_k^2\omega^2\delta_R)} + o(\nu^3) \\ \theta_{q_k} = \arctan\dfrac{\sqrt{r_k^2 - \alpha_k^2\omega^2\delta_k}}{\alpha_k\omega\sqrt{\delta_k}} - \pi + o(\nu^2) \end{cases} \quad k = 1,2$$

在(y_q)处线性化方程(8.3.8),记 $\tilde{y} = y - y_q$,可得

$$\tilde{y}_\tau = \boldsymbol{Y}'(y_q, \nu)\tilde{y} + o(\tilde{y}^2)$$

$\boldsymbol{Y}'$ 是 4×4 的矩阵

$$\begin{bmatrix} -\nu[2\alpha_1 + r_1(\delta_1\omega^2 + \nu j_{q_1})^{-1/2}\cos\theta_{q_1} & 2r_1(\delta_1\omega^2 + \nu j_{q_1})^{1/2}\sin\theta_{q_1} & 0 & 0 \\ -2 - \frac{\varepsilon}{2}r_1(\delta_1\omega^2 + \nu j_{q_1})^{-3/2}\sin\theta_{q_1} & \nu r_1(\delta_1\omega^2 + \nu j_{q_1})^{-1/2}\cos\theta_{q_1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu[2\alpha_2 + r_2(\delta_2\omega^2 + \nu j_{q_2})^{-1/2}\cos\theta_{q_2} & 2r_2(\delta_2\omega^2 + \nu j_{q_2})^{1/2}\sin\theta_{q_2} \\ -2 & 0 & -2 - \frac{\varepsilon}{2}r_2(\delta_2\omega^2 + \nu j_{q_2})^{-3/2}\sin\theta_{q_2} & \nu r_2(\delta_2\omega^2 + \nu j_{q_2})^{-1/2}\cos\theta_{q_2} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Y}'(y_q, \nu)$的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{2\varepsilon\omega}}{2}[(\delta_1(r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1)]^{1/2} + [\delta_2(r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2)^{1/2}]^{1/4} - \frac{1}{2}\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2) + O(\varepsilon^2) \tag{8.3.10}$$

$$\mu_{3,4} = \frac{\sqrt{2\omega\varepsilon}}{2}[\delta_1(r_1^2 - \alpha_1\omega^2\delta_1)]^{1/2} + [\delta_2(r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2)^{1/2}]^{1/4} - \frac{1}{2}\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2) + O(\varepsilon^2) \tag{8.3.11}$$

对应特征向量分别为 $\boldsymbol{e}_1(\nu)$, $\boldsymbol{e}_2(\nu)$, $\boldsymbol{e}_3(\nu)$和 $\boldsymbol{e}_4(\nu)$。特征向量光滑地依赖于 ν。这显示了 $Q = (Q_1, Q_2)$或(y_{q_1}, y_{q_2})是鞍点。

从正则扰动理论和稳定流形定理有,对 ε 充分小,存在 Q 的开邻域,它与 ε 无关,使得 Q 在开邻域 U 中的稳定流形为 ν 的光滑函数。因此局部稳定流形的部分能用参数表示为

$$\begin{cases} y = y_*(s;\nu), \\ S = \exp(\lambda,\tau), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4); k = 1,2 \end{cases} \tag{8.3.12}$$

其中 $0 \leqslant s \leqslant s_* = \exp(\lambda\tau_*)$, s_* 是一个小的数,且与 ε 无关。为了解离开 Q 点的稳定流形,注意到 Q 为 $Q_0 = (j_{01}, \theta_{01}, j_{02}, \theta_{02})$点

$$j_{0k} = 0$$

$$\theta_{0k} = \arctan\frac{\sqrt{r_k^2 - \alpha_k^2\omega^2\delta_k}}{\alpha_k\omega\sqrt{\delta_k}} - \pi, k = 1,2$$

的 ν 阶扰动,方程(8.3.8)为守恒方程

$$j_{1\tau} = -2(\alpha_1\delta_1\omega^2 + r_1\omega\sqrt{\delta_1}\cos\theta_1)$$

$$\theta_{1\tau} = -2(j_1 + j_2)$$

$$j_{2\tau} = -2(\alpha_2\delta_2\omega^2 + r_2\omega\sqrt{\delta_2}\cos\theta_2)$$

$$\theta_{2\tau} = -2(j_1 + j_2)$$

的 $O(\nu)$阶扰动。因此,引入上面方程组的能量

$$\begin{cases} E_1(j_1,\theta_1) = \dfrac{1}{2}(j_1+j_2)^2 - \omega(\delta_1\alpha_1\theta_1\omega + r_1\sqrt{\delta_1}\sin\theta_1) \\ E_2(j_2,\theta_2) = \dfrac{1}{2}(j_1+j_2)^2 - \omega(\delta_2\alpha_2\theta_2\omega + r_2\sqrt{\delta_2}\sin\theta_2) \end{cases} \tag{8.3.13}$$

其中曲线 $E_k(j_k,\theta_k)=E_k(j_{0k},\theta_{0k})(k=1,2)$,为守恒方程组的稳定流形。用 C_0^s: $y_0(\tau)=(y_{01}(\tau),y_{02}(\tau))$表示,其中 $y_{0k}(\tau)=(j_{0k}(\tau),\quad \theta_{0k}(\tau))(k=1,2)$。如固定 $\tau_0<\tau_*$,则从正则扰动理论可得,对 $\tau_0<\tau<\tau_*$,Q 点的稳定流形为

$$y = y_0(\tau) + O(\nu)$$

进而,用 C_ε^s 表示对应 $\tau\in(\tau_0,\infty)$稳定流形的部分,C_ε^s 可用参数 $s\in[0,s_0]$表示

$$y = y_*(s,\nu)$$

$$s = \exp(\lambda\tau)$$

其中 y_* 是 s 和 ν 的光滑函数,曲线 y_* 为 $O(\nu)$阶逼近于 y_0。

为了描述 C_ε^s 附近的流,我们用类似文献[4]的方法,引进(m,s)坐标,其中 m 表示沿 C_ε^s 法方向距离的测度。在(m,s)坐标下,方程组(8.3.8)可写为

$$\begin{cases} m_\tau = a(s,\tau)m + O(m^2) \\ s_\tau = \lambda s + b(s,\nu)m + O(m^2) \end{cases} \tag{8.3.14}$$

其中 m,a 和 b 是(s,ν)的光滑函数,$0<s<s_0$。这些坐标下,C_ε^s 对应于 $m=0$,在 C_ε^s 上流为

$$s_\tau = \lambda s$$

因(e_1,e_2,e_3,e_4)在点 Q 上和 C_ε^s 相切,从式(8.3.10),式(8.3.11)我们有 $a(0,\nu)=\mu$。

虽然(m,s)方程比原来方程(8.3.8)更简单,但仍不是在 C_ε^s 附近描述流的方程,原因是在 s 的方程中出现了线性项 $b(s,\nu)$ m。为此,令

$$s = \eta + (h_0 + h_1\eta)m \tag{8.3.15}$$

其中常数 h_0,h_1 可选取为

$$h_0 = \frac{b_0}{\mu-\lambda}, h_1 = \frac{b_1 - h_0a_1}{\mu}$$

其中 $a=\mu+a_1s_1+O(s^2), b_0=b_0+b_1s+O(s^2)$

作为(m,η)的方程为

$$\begin{cases} m_\tau = a(\eta,\nu)m + O(m^2) \\ \eta_\tau = \lambda\eta + c(\eta,\nu)m + O(m^2) \end{cases} \tag{8.3.16}$$

其中$|c(\eta,\nu)|\leqslant c_0|\eta^2|$在 C_ε^s 上,$0\leqslant\eta\leqslant s_0$。

方程(8.3.16)的优点是,在 C_ε^s 上,即 $m=0$,且

$$\eta_* = \eta_0\exp(\lambda\tau)$$

$$\delta m_\tau = a_*\delta m$$

$$\delta\eta_\tau = \lambda\delta\eta + c_*\delta m$$

它和在 Q 点线性化方程所得到的扩展与收缩率是一致的。

8.3.2 S_ω 邻域的方程

为了研究在不动点球 S_ω 邻域非线性问题的动力学行为,我们引入新的坐标(J,θ,f),其中 J 为在平面上 Π_c 上 S_ω 的距离测度,θ 是 S_ω 上的角度,f 为 Π_c 的正交补。首先设 q 可写为

$$q_k \equiv [\rho_k(t) + f_k(x,t)]\exp i\theta_k(t),\quad k=1,2 \tag{8.3.17}$$

其中:ρ_k 和 θ_k 为平面 Π_c 上的极坐标:$f\in\Pi_c^\perp$,f 的空间均值为零。用$\langle\cdot\rangle$表一个周期上的空间均值。对 $\varepsilon=0$,流 L^2 模是运动常数,因此用 I_k 代替 $\rho_k(k=1,2)$。

$$I_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q_k\bar{q}_k\mathrm{d}x = \rho_k^2 + \langle f_k,\bar{f}_k\rangle,\quad k=1,2 \tag{8.3.18}$$

因 S_ω 对应于 $I=I_1+I_2=\omega^2$。为方便引入变量

$$J_k = I_k - \delta_k\omega^2,\quad k=1,2 \tag{8.3.19}$$

在这些变元下,我们将得到关于(J,θ,f)变元的方程。

首先,式(8.3.1)×$\bar{q}_1$ 作$\langle\cdot\rangle$运算并取虚部,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\alpha_1(\rho_1^2+\langle f_1 f_1\rangle) - \varepsilon\beta_1\langle f_1 f_{1x}\rangle - \varepsilon r_1\rho_1\cos\theta_1$$

其中 $\rho_1=\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2-\langle f_1\bar{f}_1\rangle}$,进而,有

$$\begin{aligned}J_{1t} = & -2\varepsilon\alpha_1(J_1+\delta_1\omega^2) - 2\varepsilon r_1\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}\cos\theta_1 + \\ & 2\varepsilon\beta_1\langle f_{1x} f_{1x}\rangle - 2\varepsilon r_1\rho_1\cos\theta_1 + 2\varepsilon r_1\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}\cos\theta_1 = \\ & -2\varepsilon[\alpha_1(J_1+\delta_1\omega^2)+r_1\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}\cos\theta_1] + \\ & \varepsilon\tilde{A}_1(J_1,\theta_1,f_1)\end{aligned} \qquad (8.3.20)$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1(J_1,\theta_1,f_1) = & 2[r_1\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}\cos\theta_1 - r_1\rho_1\cos\theta_1] - \\ & 2\beta_1\langle f_{1x},\bar{f}_{1x}\rangle = O(|f_1|^2)\end{aligned}$$

对小的 J_1 和 f_1,注意到用

$$q_{1t} = [(\rho_{1t}+f_{1t}) + i(\rho_1+f_1)\theta_{1t}]\mathrm{e}^{i\theta_1}$$

替换方程(8.3.1),有

$$\begin{aligned} & i(\rho_{1t}+f_{1t})\mathrm{e}^{i\theta_1} - (\rho_1+f_1)\theta_{1t}\mathrm{e}^{i\theta_1} = f_{1xx}\mathrm{e}^{i\theta_1} + \\ & 2[(\rho_1+f_1)(\rho_1+\bar{f}_1) + (\rho_2+f_2)(\rho_2+f_2) - \\ & \omega^2](\rho_1+f_1)\mathrm{e}^{i\theta_1} - i\varepsilon[\alpha_1(\rho_1+f_1)\mathrm{e}^{i\theta_1} + \\ & \beta_1\hat{B}(\rho_1+f_1)e^{i\theta_1} + r_1]\end{aligned} \qquad (8.3.21)$$

式(8.3.21)·exp$(-i\theta_1)$并取$\langle\cdot\rangle$运算,我们有

$$\begin{aligned} i\rho_{1t} - \rho_1\theta_{1t} = & 2[\rho_1^2+\langle f_1\bar{f}_1\rangle+\rho_2^2+\langle f_2\bar{f}_2\rangle-\omega^2]\rho_1 + \\ & 2\rho_1\langle(f_1+\bar{f}_1)f_1\rangle + 2\langle(f_1 f_1)f_1\rangle + \\ & 2\rho_2\langle(f_2+f_2)f_1\rangle + 2\langle f_2\bar{f}_2 f_1\rangle - \\ & i\varepsilon(\alpha_1\rho_1 + r_1\mathrm{e}^{-i\theta_1})\end{aligned} \qquad (8.3.22)$$

对上面方程取实部,有

$$\begin{aligned}\theta_{1t} = & -2(J_1+J_2) + \frac{\varepsilon r_1}{\rho_1}\sin\theta_1 - \frac{2}{\rho_1}\mathrm{Re}[\langle f_1\bar{f}_1 f_1\rangle + \\ & \langle f_2\bar{f}_2 f_2\rangle + \rho_1\langle(f_1+\bar{f}_1)f_1\rangle + \rho_2\langle(f_2+f_2)f_1\rangle] = \\ & -2(J_1+J_2) + \frac{\varepsilon r_1}{\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}}\sin\theta_1 + \boldsymbol{A}_2(J_1,\theta_1,f)\end{aligned} \qquad (8.3.23)$$

其中 $f=(f_1,f_2)$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}_2(J_1,\theta_1,f) = & \frac{\varepsilon r_1}{\rho_1}\sin\theta_1 - \frac{\varepsilon r_1}{\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}}\sin\theta_1 - \frac{2}{\rho_1}\mathrm{Re}[\langle f_1 f_1 f_1\rangle + \\ & \langle f_2\bar{f}_2 f_2\rangle + \rho_1\langle(f_1+\bar{f}_1)f_1\rangle + \rho_2\langle(f_2+f_2)f_1\rangle] = O(|f|^2)\end{aligned}$$

最后,式(8.3.21)×exp$(-i\theta_1)$−式(8.3.22)并取虚部,有

$$\begin{aligned} if_{1t} - f_1\theta_{1t} = & f_{1xx} + 2\rho_1[\rho_1(f_1+\bar{f}_1) + f_1\bar{f}_1 - \langle f_1 f_1\rangle + \\ & \rho_2(f_2+f_2) + f_2\bar{f}_2 - \langle f_2\bar{f}_2\rangle] + 2[\rho_1^2+\rho_2^2-\omega^2 + \\ & \rho_1(f_1+f_1) + f_1\bar{f}_1 + \rho_2(f_2+\bar{f}_2) + f_2 f_2]f_1 - \\ & \rho_1\langle(f_1+f_1)f_1\rangle - \langle f_1\bar{f}_1 f_1\rangle - 2\rho_2\langle(f_2+f_2)f_1\rangle - \\ & \langle f_2\bar{f}_2 f_1\rangle - i\varepsilon(\alpha_1 f_1 + \beta_1\hat{B}f_1)\end{aligned}$$

用 θ_{1t}替换上方程,我们得到

$$\begin{aligned} if_{1t} = & f_{1xx} - i\varepsilon(\alpha_1 f_1 + \beta_1\hat{B}f_1) + 2(J_1+\delta_1\omega^2 - \\ & \langle f_1 f_1\rangle)(f_1+\bar{f}_1) + 2\rho_1\rho_2(f_2+f_2) + 2\rho_1(f_1\bar{f}_1 - \langle f_1 f_1\rangle - \\ & \langle f_2\bar{f}_2\rangle + f_2 f_2) + 2[J_1+J_2-\langle f_1\bar{f}_1\rangle - \langle f_2 f_2\rangle + \\ & f_1 f_1 + f_2 f_2]f_1 + 2\rho_1(f_1^2 + f_1\bar{f}_1) + \\ & 2\rho_2(f_2 f_1 + \bar{f}_2 f_1) - 2\rho_1\langle f_1^2 + f_1 f_1\rangle - 2\rho_2\langle f_2 f_1 + \bar{f}_2 f_1\rangle - \\ & 2[\langle f_1\bar{f}_1 f_1\rangle + \langle f_2\bar{f}_2 f_1\rangle] + \frac{\varepsilon r_1 f_1}{\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}}\sin\theta_1 - \\ & 2(J_1+J_2)f_1 + \tilde{A}_2(J_1,\theta_1,f)f_1\end{aligned}$$

进而,有

$$if_{1t} = L_{1\varepsilon}f_1 + V_{1\varepsilon}f_1 + Q_3(f) + \tilde{A}_3(f) \qquad (8.3.24)$$

其中

$$L_{1\varepsilon}f_1 = f_{1xx} - i\varepsilon(\alpha_1 f_1 + \beta_1\hat{B}f_1 + 2\delta_1\omega^2(f_1 + \bar{f}_1))$$

$$V_{1\varepsilon}f_1 = 2J_1(f_1 + f_2) + \frac{\varepsilon r_1\sin\theta_1}{\sqrt{J_1 + \delta_1\omega^2}}f_1 + 2\rho_1\rho_2(f_2 + \bar{f}_2)$$

$$Q_3(f) = 4\rho_1(f_1\bar{f}_1 - \langle f_1\bar{f}\rangle) + 2\rho_1(f_1^2 - \langle f_1^2\rangle) + 2\rho_1(f_2\bar{f}_2 - \langle f_2\bar{f}_2\rangle) + 2\rho_2(f_2f_1 - \langle f_2f_1\rangle) + 2\rho_2(\bar{f}_2f_1 - \langle\bar{f}_2f_1\rangle) = O(|f|^2)$$

$$\hat{A}_3(f) = 2[f_1\bar{f}_1 - \langle f_1\bar{f}_1\rangle + f_2\bar{f}_2 - \langle f_2\bar{f}_2\rangle]f_1 - 2\langle f_1\bar{f}_1\rangle(f_1 + \bar{f}_1) - 2\langle f_1f_1\bar{f}_1\rangle - 2\langle f_2\bar{f}_2f_1\rangle + \tilde{A}_2(J_1,\theta_1,f)f_1 = O(J_1f^2 + f_3)$$

类似上面计算,可得方程组(8.3.1)的第二个方程的(J_2,θ_2,f_2)表示,于是方程组(8.3.1)可写为

$$\begin{cases} J_{1t} = -2\varepsilon[\alpha_1(J_1 + \delta_1\omega^2) + r_1\sqrt{J_1 + \delta_1\omega^2}\cos\theta_1] + \varepsilon\tilde{A}_1(J_1,\theta_1,f) \\ \theta_{1t} = -2(J_1 + J_2) + \dfrac{\varepsilon r_1}{\sqrt{J_1 + \delta_1\omega^2}}\sin\theta_1 + \tilde{A}_2(J_1,\theta_1,f) \\ if_{1t} = L_{1\varepsilon}f_1 + V_{1\varepsilon}f_1 + Q_3(f) + \tilde{A}_3(J_1,\theta_1,f) \\ J_{2t} = -2\varepsilon[\alpha_2(J_2 + \delta_2\omega^2) + r_2\sqrt{J_2 + \delta_2\omega^2}\cos\theta_2] + \varepsilon\tilde{B}_1(J_2,\theta_2,f) \\ \theta_{2t} = -2(J_1 + J_2) + \dfrac{\varepsilon r_2}{\sqrt{J_2 + \delta_2\omega^2}}\sin\theta_2 + \tilde{B}_2(J_2,\theta_2,f) \\ if_{2t} = L_{2\varepsilon}f_2 + V_{2\varepsilon}f_2 + \tilde{Q}_3(f) + \tilde{B}_3(J_2,\theta_2,f) \end{cases} \qquad (8.3.25)$$

其中

$$L_{2\varepsilon}f_2 = f_{2xx} - i\varepsilon(\alpha_2f_2 + \beta_2\hat{B}f_2) + 2\delta_2\omega^2(f_2 + \bar{f}_2)$$

$$V_{2\varepsilon}f_2 = 2J_2(f_2 + \bar{f}_2) + \frac{\varepsilon r_2}{\sqrt{J_2 + \delta_2\omega^2}}\sin\theta_2 f_2 + 2\rho_1\rho_2(f_1 + \bar{f}_1)。$$

对 $J_k,f_k(k=1,2)$在 O 的充分小的一个邻域内,方程(8.3.25)可看做式(8.3.6)的一个扰动。$\tilde{A}_j,\tilde{B}_j(j=1,2,3)$为 θ 的 2π 周期函数,具有阶数

$$\tilde{A}_1(J_1,\theta_1,f,\varepsilon) = O(\varepsilon f^2)$$

$$\tilde{A}_2(J_1,\theta_1,f,\varepsilon) = O(f^2)$$

$$\tilde{A}_3(J_1,\theta_1,f,\varepsilon) = O(Jf^2 + f^3)$$

$$\tilde{B}_1(J_2,\theta_2,f,\varepsilon) = O(\varepsilon f^2)$$

$$\tilde{B}_2(J_2,\theta_2,f,\varepsilon) = O(f^2)$$

$$\tilde{B}_3(J_2,\theta_2,f,\varepsilon) = O(Jf^2 + f^3)$$

其中 $J_k(k=1,2),f$ 为小量。

点 Q 为式(8.3.25)的临界点,为了构造在 Q 点的同宿轨道,必须估计 Q 点局部稳定流形的大小,变元(J,θ)的大小是由稳定流形和常数平面 Π_ε 的交 C_ε^s 所决定。为估计 f 的大小,必须利用方程(8.3.25),但在该方程组中出现了具有麻烦性质的平方项 $Q_3(f)$,为此必须利用规范形变换。

用类似文献[4]的讨论,我们得到如下命题。

命题 8.3.2 存在一个接近于恒等的平方型映照式,它将方程

$$i\partial f_1 = f_{1xx} + 2\omega^2(f_1 + \bar{f}_1) + \omega Q_3(f)$$

$$i\partial f_2 = f_{2xx} + 2\omega^2(f_2 + \bar{f}_2) + \omega\tilde{Q}_3(f)$$

变换为具有立方非线性的方程

$$i\partial_t g_1 = g_{1xx} + 2\omega^2(g_1 + \bar{g}_1) + O(g^3)$$

$$i\partial_t g_2 = g_{2xx} + 2\omega^2(g_2 + \bar{g}_2) + O(g^3)$$

其中 $g = f + K(f,\bar{f})$,$K(f,\bar{f})$是双线性映射,$f=(f_1,f_2)$,$g=(g_1,$

g_2)。

利用(J,θ,g)坐标,在 S_ω 附近可得方程

$$
\begin{cases}
J_{1t} = -2\varepsilon[\alpha_1(J_1+\delta_1\omega^2)+r_1\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}\cos\theta_1]+\\
\qquad N_1(J_1,\theta_1,g,\varepsilon)\\
\theta_{1t} = -2(J_1+J_2)+\dfrac{\varepsilon r_1}{\sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}}\sin\theta_1+\\
\qquad N_2(J_1,\theta_1,g,\varepsilon)\\
ig_{1t} = L_{1\varepsilon}g_1+V_{1\varepsilon}g_1+N_3(J_1,\theta_1,g,\varepsilon)\\
J_{2t} = -2\varepsilon[\alpha_2(J_2+\delta_2\omega^2)+r_2\sqrt{J_2+\delta_2\omega^2}\cos\theta_2]+\\
\qquad \tilde{N}_1(J_2,\theta_2,g,\varepsilon)\\
\theta_{2t} = -2(J_1+J_2)+\dfrac{\varepsilon r_2}{\sqrt{J_2+\delta_2\omega^2}}\sin\theta_2+\\
\qquad \tilde{N}_2(J_2,\theta_2,g,\varepsilon)\\
ig_{2t} = L_{2\varepsilon}g_2+V_{2\varepsilon}g_2+\tilde{N}_3(J_2,\theta_2,g,\varepsilon)
\end{cases}
\tag{8.3.26}
$$

其中 $N_1(J_1,\theta_1,g,\varepsilon)=O(\varepsilon g^2)$

$N_2(J_1,\theta_1,g,\varepsilon)=O(g^2)$

$N_3(J_1,\theta_1,g,\varepsilon)=O(J_1g^2+\varepsilon g^2+g^3)$

$\tilde{N}_1(J_2,\theta_2,g,\varepsilon)=O(\varepsilon g^2)$

$\tilde{N}_2(J_2,\theta_2,g,\varepsilon)=O(g^2)$

$\tilde{N}_3(J_2,\theta_2,g,\varepsilon)=O(J_1g^2+\varepsilon g^2+g^3)$

为了在 S_ω 邻域考虑实的流形,引入实坐标系

$$u_k=(\mathrm{Re}g_k,\mathrm{Im}g_k)^{\mathrm{T}},k=1,2$$

并设 $u=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$, $g=(g_1,g_2)^{\mathrm{T}}$。为此,上面方程可写为

$$
\begin{cases}
J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\delta\omega^2)+R\sqrt{J+\delta\omega^2}\cos\theta]+\\
\qquad K_1(J,\theta,u,\varepsilon)\\
\theta_t = -2CJ+\varepsilon R\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{J+\delta\omega^2}}+K_2(J,\theta,u,\varepsilon)\\
u_t = \tilde{L}_\varepsilon u+\tilde{V}_\varepsilon u+K_3(J,\theta,u,\varepsilon)
\end{cases}
\tag{8.3.27}
$$

其中 K_3 为具有两个分量的向量,且

$J=(J_1,J_2)^{\mathrm{T}}$,

$(J+\delta\omega^2)^{1/2}\cos\theta=((J_1+\delta_1\omega^2)^{1/2}\cos\theta_1,(J_2+\delta_2\omega^2)^{1/2}\cos\theta_2)^{\mathrm{T}}$

$(J+\delta\omega^2)^{-1/2}\sin\theta=((J_1+\delta_1\omega^2)^{-1/2}\sin\theta_1,(J_2+\delta_2\omega^2)^{-1/2}\sin\theta_2)^{\mathrm{T}}$

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}r_1 & 0\\ 0 & r_2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\tilde{L}_\varepsilon=\tilde{J}\partial_{xx}-\varepsilon(P+G\hat{B})-4\omega^2H$

$\tilde{V}_\varepsilon=-4JIS+\varepsilon Ig(J,\theta)\tilde{J}-4\rho_1\rho_2K$

其中

$$\tilde{J}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}\alpha_1&1&0&0\\0&\alpha_1&0&0\\0&0&\alpha_2&0\\0&0&0&\alpha_2\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}\beta_1&1&0&0\\0&\beta_1&0&0\\0&0&\beta_2&0\\0&0&0&\beta_2\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\\delta_1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\delta_2&0\end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$g(J,\theta) = [r_1\sin\theta_1(J_1+\delta_1\omega^2)^{-1/2}, r_1\sin\theta_1(J_1+\delta_1\omega^2)^{-1/2},$$
$$r_2\sin\theta_2(J_2+\delta_2\omega^2)^{-1/2}, r_2\sin\theta_2(J_2+\delta_2\omega^2)^{-1/2}]^{\mathrm{T}}$$

$$\rho_1 = \sqrt{J_1+\delta_1\omega^2}, \qquad \rho_2 = \sqrt{J_2+\delta_2\omega^2}$$

8.3.3 局部不变流形的存在性

在 S_ω 邻域，方程(8.3.27)可作为如下线性方程组的扰动

$$\begin{cases} J_t = 0 \\ \theta_t = -2CJ \\ u_t = \tilde{L}_\varepsilon u \end{cases} \tag{8.3.28}$$

为了研究非线性问题式(8.3.27)解的局部性态，我们必须分析算子 $\tilde{L}_\varepsilon$ 的谱性质。考虑特征值问题，$L_\varepsilon e = \lambda e$，利用 Fourier 分析，可将特征值 λ 的平方表示：

$$[\lambda + \varepsilon d_1(k)^2 + k^2(k^2-4\omega^2\delta_1)]$$
$$[(\lambda+\varepsilon d_2(k))^2 + k^2(k^2-4\omega^2\delta_2)] = 0$$

于是 $\lambda^{(1)} = -\varepsilon d_1(k) + ik\sqrt{k^2-4\omega^2\delta_1}$，$\lambda^{(2)} = -\varepsilon d_2(k) + ik\sqrt{k^2-4\omega^2\delta_2}$，其中 $k=1,2,3,\cdots$，且

$$d_i(k) = \begin{cases} \alpha_i + k^2\beta_i, & k < K, \\ \alpha_i, & k \geqslant K, \end{cases} \quad i = 1,2$$

表示 $\hat{D}_i$ 的符号，K 为某个正数。因 $\omega \in (\frac{1}{2},1)$，则对 $k=1$ 有

$$\begin{cases} \sigma_{1s,u}^\varepsilon = \pm\sigma_1 - \varepsilon d_1(1) \\ \sigma_{2s,u}^\varepsilon = \pm\sigma_2 - \varepsilon d_2(1) \\ \sigma_{s,u}^\varepsilon = (\sigma_{1s,u}^\varepsilon, \sigma_{2s,u}^\varepsilon)^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{8.3.29}$$

$$\sigma_i = \sqrt{4\omega^2\delta_i - 1}, i = 1,2$$

当 $\varepsilon=0$，对应于特征值 $\sigma_{1s,u}^\varepsilon$ 的特征向量分别为 e_s^i 和 e_u^i

$$e_{s,u} = (e_{s,u}^1, e_{s,u}^2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}(1, \mp\sigma_1, 1, \mp\sigma_2)^{\mathrm{T}}\cos x \tag{8.3.30}$$

对 $k \geqslant 2$，特征值为复共轭对，具有负的实部

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(1)} &= \pm i\Omega_k^1 - \varepsilon d_1(k) \\ \lambda_k^{(2)} &= \pm i\Omega_k^2 - \varepsilon d_2(k) \end{aligned} \tag{8.3.31}$$

其中 $\Omega_k^1 = k\sqrt{k^2-4\omega^2\delta_1} > 0$，$\Omega_k^2 = k\sqrt{k^2-4\omega^2\delta_2} > 0$。$u$ 具有零平均值，可用特征基表示

$$u(x) = v_u e_u(x) + v_s e_s(x) + v_0(x) \tag{8.3.32}$$

这里 v_u 和 v_s 都是实标量，且

$$v_0(x) \in [\mathrm{span}(\pi_c, e_u, e_s)]^\perp$$

作为这些变元，线性方程(8.3.28)分开写为

$$\begin{cases} J_t = 0 \\ \theta_t = -2CJ \\ v_{u,t} = \sigma_s^\varepsilon v_u \\ v_{s,t} = -\sigma_s^\varepsilon v_s \\ v_{0,t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 \end{cases} \tag{8.3.33}$$

于是可看到，对 $\varepsilon=0$，线性方程组具有一个不稳定方向(e_u)，一个稳定方向(e_s)和无穷多中心方向(J,θ,v_0)，利用这些中心变元 $v_c=(J,\theta,v_0)^{\mathrm{T}}$，方程(8.3.33)可写为

$$\begin{cases} v_{u,t} = \sigma_u^\varepsilon v_u \\ v_{s,t} = -\sigma_s^\varepsilon v_s \\ v_{c,t} = Av_c \end{cases} \tag{8.3.34}$$

其中 A 由方程(8.3.33)所定义。

在 S_ω 的 δ 邻域,非线性方程(8.3.27)可看做线性方程(8.3.28)的扰动。当 $\varepsilon=0$ 时,在该线性方程的流下 S_ω 具有二维稳定和不稳定的流形和具有余维数 4 的中心流形。我们集中注意力于中心流形 $E^c(S_\omega)$,以及中心稳定流形 $E^{cs}(S_\omega)$ 和中心不稳定流形 $E^{cu}(S_\omega)$:

$$E^{cs}(S_\omega) = \operatorname{span}\{e_u\}^{\perp}$$

$$E^{cu}(S_\omega) = \operatorname{span}\{e_s\}^{\perp}$$

$$E^{c}(S_\omega) = \operatorname{span}\{e_u, e_s\}^{\perp}$$

对 $\varepsilon>0$,我们将证明在 S_ω 的一邻域内,不变流形的不变性,为此,我们局部化方程(8.3.27)。给定一个充分大的整数 n_0,取 $\sigma = a/n_0^2$,a 是一个常数,与 ε 无关。引入局部化函数 ψ_σ:

$$\psi_\sigma: R \to R, \quad \psi_\sigma(s) = \psi(s/\sigma)$$

其中 $\psi \in C^\infty$,满足

$$\psi(s) = \begin{cases} 1, & |s| \leqslant 1 \\ 0, & |s| \geqslant 2 \end{cases}$$

我们将局部化函数作用在方程(8.3.27)中

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J_\sigma + \sigma\omega^2) + R\sqrt{J_\sigma + \delta\omega^2}\cos\theta] + \\ \qquad K_1(J_\sigma, \theta, u_\sigma, \varepsilon) \\ \theta_t = -2CJ_\sigma + \varepsilon R(J_\sigma + \delta\omega^2)^{-1/2}\sin\theta + K_2(J_\sigma, \theta, u_\sigma, \varepsilon) \\ u_t = \tilde{L}_\varepsilon u + [\tilde{V}_\varepsilon u_\sigma + K_3(J_\sigma, \theta, u_\sigma, \varepsilon)] \end{cases} \tag{8.3.35}$$

其中对任何变量 s,用 $s_\sigma = s\psi(s/\sigma)$ 代替。在方程(8.3.35)中的一切非线性项或者乘上 ε 或者至少含有 (J, u) 的平方项,落在原点 O 的 σ 领域中,因此方程(8.3.35)具有整体 Lipschitz 常数,它的阶为 $O(\varepsilon+\sigma)$:

令 $v=(v_u, v_s, v_c)^{\mathrm{T}}$,算子 A 由式(8.3.34)所定义,可写式(8.3.35)为

$$\begin{cases} v_{ut} = \sigma_u^\varepsilon v_u + R_u^\sigma(v;\varepsilon) \\ v_{st} = -\sigma_s^\varepsilon v_s + R_s^\sigma(v;\varepsilon) \\ v_{ct} = Av_c + R_c^\sigma(v;\varepsilon) \end{cases} \tag{8.3.36}$$

其中 $R^\sigma(v,\varepsilon)$ 及其一阶导数为 $O(\sigma+\varepsilon)$ 阶。

我们将证明局部化方程具有 C^l 不变流形,对于原来方程,这些流形在 S_ω 的 σ 领域中是局部不变的。

定理8.3.3 存在 S_ω 的一个 σ 领域 U_σ,$\varepsilon_0(\sigma)>0$ 和整数 $l>3$,使得 $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$,方程组(8.3.27)具有余维数为 2 的在 U_σ 中的局部不变流形

$$W_\varepsilon^{cs} = \{v \in H^1, v_u = h_u(v_s, v_c, \varepsilon)\} \tag{8.3.37}$$

其中函数 $h_u \in C^l$,对 θ 为 2π 的周期的,更进一步,当 $\varepsilon=0$ 时,W_0^{cs} 沿 S_ω 的切线和 E^{cs} 相交。

类似地,具有局部不变流形

$$W_\varepsilon^{cu} = \{v \in H^1, v_s = h_s(v_u, v_c;\varepsilon)\} \tag{8.3.38}$$

其中函数 $h_s \in C^l$,对 θ 为 2π 的周期的,对 $\varepsilon=0$,W_ε^{cu} 沿 S_ω 的切线和 E^{cu} 相交。

对余维数为 4 的慢流形 M_ε 的存在性有

推论8.3.4 设 M_ε 表示交集

$$M_\varepsilon = W_\varepsilon^{cs} \cap W_\varepsilon^{cu}$$

则 M_ε 为余维数为 4 的在 U_σ 中的不变流形

$$M_\varepsilon = \{v \in H^1, v_u = h_u^c(v_c;\varepsilon), v_s = h_s^c(v_c;\varepsilon)\} \tag{8.3.39}$$

其中函数 $h_{u,s}^c \in C^l$,θ 为 2π 周期的,对 $\varepsilon=0$,M_ε 沿 S_ω 切向和 E^c 相交。

附注:在 M_ε 上的流由以下方程给定

$$
\begin{cases}
J_t = -2\varepsilon[\alpha(J_\sigma + \delta\omega^2) + R\sqrt{J_\sigma + \delta\omega^2}\cos\theta] + \\
\qquad \tilde{K}_1(J_\sigma, \theta, v_{0\sigma}; \varepsilon) \\
\theta_t = -2CJ_\sigma + \varepsilon R(J_\sigma + \delta\omega^2)^{-1/2}\sin\theta + \tilde{K}_2(J_\sigma, \theta, v_{0\sigma}; \varepsilon) \\
v_{0t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + [\tilde{V}_\varepsilon v_{0\sigma} + \tilde{K}_3(J_\sigma, \theta, v_{0\sigma}; \varepsilon)]
\end{cases}
\tag{8.3.40}
$$

其中,如前所述,对任意变量 $s, s_\sigma = s\psi(s/\sigma)$,$\tilde{K}$ 是 K 在 M_ε 上的限制。

方程(8.3.40)可写成积分方程形式,定理 8.3.2 的证明是对积分方程应用不动点原理,详细过程可从文献[4]发现。在此不作陈述。

由于线性问题具有小的增长率,同宿轨道的整体结构 $t \in (-\infty, \infty)$ 是一个奇异摄动的问题。在有限维情况,Fenichel 引进了不变流形的纤维表示,这种纤维关于 ε 若干次可微,因而对奇异摄动的计算是很有用的。在无限维情况,我们用分析逼近的方法,给出不变流形的纤维表示。其结果可由下面定理描述。

定理8.3.5 对一切 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,$C^l$ 流形 W_ε^{cu} 具有 C^{l-2}坐标系

$$v_u = \xi_u, \xi_u \in [-\xi, \xi_0]$$

$$v_c = f^u(\xi_u, \xi_c; \varepsilon), \xi_c \in E^c$$

使得子流形 M_ε 对应于 $\xi_u = 0$,在 W_ε^{cu} 上的流具有不耦合的形式

$$\dot{\xi}_u = [\sigma_u^\varepsilon + \Gamma^\sigma(\xi_u, \xi_c; \varepsilon)]\xi_u$$

$$\dot{\xi}_c = A\xi_c + S_c^\sigma(\xi_c; \varepsilon)$$

其中 $\xi, \Gamma^\sigma, S_c^\sigma$ 和它们的导数为 $O(\varepsilon + \sigma)$阶。类似的结果对 W_ε^{cs} 成立。纤维存在性定理的证明可参考文献[4,11]。

下面考虑在 M_ε 中 Q 点的稳定流形。

对 $\alpha_1 < \dfrac{r_1}{\omega\sqrt{\delta_1}}, \alpha_2 < \dfrac{r_2}{\omega\sqrt{\delta_2}}$,点 Q 是定常的,可用(J, θ, u)表示:

$$
\begin{bmatrix} J_{1q} \\ J_{2q} \end{bmatrix} = -\frac{\varepsilon}{2\omega}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{r_1}\sqrt{\delta_1(Y_1 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1)} \\ \dfrac{1}{r_2}\sqrt{\delta_2(r_2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2)} \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2)
$$

$$
\begin{bmatrix} \theta_{1q} \\ \theta_{2q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\dfrac{\sqrt{r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1}}{\alpha_1\omega\sqrt{\delta_1}} \\ \arctan\dfrac{\sqrt{r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2}}{\alpha_2\omega\sqrt{\delta_2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \end{bmatrix} + O(\varepsilon)
$$

$$u = 0$$

在 Q 点线性化方程(8.3.35),可得 Q 为鞍点,具有四维不稳定流形和余维数为 4 的稳定流形。不稳定流形沿着曲线 C_ε^u 和常数平面相交,W_ε^{cu} 沿着曲线和v_u 方向相切。在 Q 点的稳定流形沿着曲线 C_ε^s 和Π_c 相交。因此交集 M_ε 是余维数为 2 的子流形。我们关心 $W = W^s(Q) \cap M_\varepsilon$ 的尺寸。

设在平面 Π_c 上 Q 点的稳定流形可表示为

$$C_\varepsilon^s = \{y = (j, \theta) \mid y = y_*(s, \nu)\}$$

其中 $\nu = \sqrt{\varepsilon}$ 且 $y_* = (y_{1*}, y_{2*})$由方程(8.3.12)给出。

$$j_{*\tau} = Y_1(j_*, \theta_*, v_*)$$

$$\theta_{*\tau} = Y_2(j_*, \theta_*, v_*)$$

其中 $s = \exp(\lambda\tau)$。在 M_ε 上的流由方程(8.3.40)中的(J, θ, v_0)表示,其中 $J = \nu j$:

$$
\begin{cases}
j_t = \nu y_1(j, \theta, v) + \tilde{K}_1(j, \theta, v_0; \nu) \\
\theta_t = \nu y_2(j, \theta, v) + \tilde{K}_2(j, \theta, v_0; \nu) \\
v_{0t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + \tilde{V}_\varepsilon v_0 + \tilde{K}_3(j, \theta, v_0; \nu)
\end{cases}
\tag{8.3.41}
$$

为了估计 $W = W^s(Q) \cap M_\varepsilon$ 的尺寸,利用平面 Π_c 上的坐标(η, m)。作为这些变量,在 M_ε 上的流在 C_ε^s 的邻域可用如下方程

给定：

$$\begin{cases} m_t = \nu a(\eta,\nu)m + O(\nu m^2 + v_0^2) \\ \eta_t = \nu\lambda\eta + \nu c(\eta,\nu)m + O(\nu m^2 + v_0^2) \\ v_{0t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + \tilde{V}_\varepsilon v_0 + O(\nu m^2 + v_0^3 + \nu m v_0) \end{cases} \qquad (8.3.42)$$

这里 a,c 为 (η,ν) 的光滑函数。

现在来构造含有 C_ε^s 的在 Q 点的稳定流形，在 C_ε^s 上

$$\eta_*(t,\nu) = \eta_0\exp[\nu\lambda t]$$

其中 $0\leqslant\eta_0<s_0, t>0$。引入变元

$$\gamma = \eta - \eta_*(t,\nu)$$

方程(8.3.42)能写成

$$\begin{cases} m_t = \nu a_*(t,\nu,\beta_0)m + \tilde{K}_{*1}(t,m,\gamma,v_0,\nu) \\ r_t = \nu\lambda r + \nu C_*(t,\nu,\beta_0)\gamma + \tilde{K}_{*2}(t,m,\gamma,v_0,\nu) \\ v_{0t} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + V_*(t,\nu,\beta_0)v_0 + \tilde{K}_{*3}(t,m,\gamma,v_0,\nu) \end{cases}$$

$$(8.3.43)$$

其中 $V_* = -4I\nu j_*(s,\nu)S + \nu^2 Ig(\nu j_*,\theta_*)\bar{J} - 4\rho_1\rho_2 K$

$$\tilde{K}_{*1} = O(\nu m^2 - \nu\gamma^2 + m v_0^2)$$

$$\tilde{K}_{*2} = O(\nu m^2 + \nu\gamma^2 + v_0^2)$$

$$\tilde{K}_{*3} = O(\nu m^2 + \nu\gamma^2 + \nu v_0^2 + v_0^3)$$

方程(8.3.43)的线性部分由耦合 ODE 和 PDE 组成，其系数依赖于 t。

ODE 估计。ODE 的基本解由 2×2 矩阵组成

$$\begin{bmatrix} A_*(t,s,\eta_0,\nu) & 0 \\ \Gamma_*(t,s,\eta_0,\nu) & \exp[\nu\lambda(t-s)] \end{bmatrix}$$

$$A_*(t,s,\eta_0,\nu) = \exp\left(\int_s^t \nu a_* \mathrm{d}s^1\right)$$

$$\Gamma_*(t,s,\eta_0,\nu) = \nu\int_s^t \exp[\nu\lambda(t-s^1)]c_*(s^1)A_*(s^1,s)\mathrm{d}s^1$$

为估计 A_*，注意到 a_* 可写为

$$a_* = \mu + \bar{a}$$

$$|\bar{a}| \leqslant C\eta_0\exp[\nu\lambda t] \leqslant Cs_0\exp[\nu\lambda t]$$

其中 μ 给定在式(8.3.10)中，由此可得 A_* 的如下估计 $(t,s>0)$：

$$C_1\exp[\nu\mu(t-s)] \leqslant A_* \leqslant C_2\exp[\nu\mu(t-s)]$$

其中 C_1, C_2 是常数，与 ε 无关，我们回忆

$$|c_*| \leqslant Cs_0^1\exp[2\nu\lambda t]$$

由此推出 $|\Gamma_*| \leqslant C\nu\left|\int_s^t \exp(\nu[\lambda(t-s^1) + 2\lambda s^1 + \mu(s^1 - s)])\mathrm{d}s^1\right|$。

因 $\lambda + \mu = -2\alpha\nu + O(\nu^2) < 0$

可得上面积分的有界性：

$$|\Gamma| \leqslant C\nu|t-s|\exp[\nu\lambda(t-s)], \quad \forall t,s \geqslant 0$$

其中 C 与 ε 无关。

PDE 估计。为了估计 PDE 基本解的增长率，为方便计，用线性算子的 Fourier 系数来表示 $\mathscr{L}(k)$：

$$A = \begin{bmatrix} -\varepsilon d_1(k) & -k^2+\varepsilon p_1 & 0 & 0 \\ k^2-4\delta_1\omega^2-4J_{*1}-\varepsilon p_1 & -\varepsilon d_1(k) & -4\rho_1\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon d_2(k) & -k^2+\varepsilon p_2 \\ -4\rho_1\rho_2 & 0 & k^2-4\delta_2\omega-4J_{*2}-\varepsilon p_2 & -\varepsilon d_2(k) \end{bmatrix}$$

其中 $p_1 = \dfrac{r_1\sin\theta_{*1}}{\sqrt{J_{*1}+\delta_1\omega^2}}$, $p_2 = \dfrac{r_2\sin\theta_{*2}}{\sqrt{J_{*2}+\delta_2\omega^2}}$,

$$\rho_1\rho_2 = \sqrt{J_{*1}+\delta_1\omega^2}\sqrt{J_{*2}+\delta_2\omega^2}$$

且 $J_{*i} = \nu j_{*i}(i=1,2)$，是 $\exp(\nu\lambda t)$ 和 ν, $d_i(k)\geqslant\alpha_i(i=1,2)$ 的光滑函数。这里 $k=2,3,\cdots$。算子 $\mathscr{L}(k)$ 具有特征值，满足方程

$$[(\lambda+\varepsilon d_1)^2 + (k^2+4\delta_1\omega^2+4J_{*1}+\varepsilon p_1)(k^2-\varepsilon p_1)]$$

$$[(\lambda+\varepsilon d_2)^2+(k^2+4\delta_2\omega^2+4J_{*2}+\varepsilon p_2)(k^2-\varepsilon p_2)]=$$

$$16(p_1p_2)^2(k^2-\varepsilon p_1)(k^2-\varepsilon p_2)$$

我们假设 $\varepsilon>0$ 充分小使得 $D_i(k)>0\quad(i=1,2)$，就能用 $U(k)$将 A 对角化

$$U(k)=\begin{bmatrix}1 & 1 & N_1Q_1 & \bar{N}_1\bar{Q}_1\\ -M_1 & M_1 & N_1 & \bar{N}_1\\ N_2Q_2 & \bar{N}_2\bar{Q}_2 & 1 & 1\\ N_2 & \bar{N}_2 & -M_2 & M_2\end{bmatrix}$$

其中 $M_1=\dfrac{iD_1}{k^2-\varepsilon p_1}$，$N_1=\dfrac{\rho}{a_2-a_1+iD_2}$，$\bar{N}_1=\dfrac{\rho}{a_2-a_1-iD_2}$，

$$Q_1=\frac{-(k^2-\varepsilon p_1)}{a_2-a_1-iD_2},\ \bar{Q}_1=\frac{-(k^2-\varepsilon p_1)}{a_2-a_1+iD_2},$$

$$a_i=\varepsilon d_i(k)\quad(i=1,2),$$

$$\rho=-4\sqrt{J_{*1}+\delta_1\omega^2}\sqrt{J_{*2}+\delta_2\omega^2}$$

$$M_2=\frac{iD_1}{k^2-\varepsilon p_2},\quad N_2=\frac{\rho}{a_1-a_2+iD_1},\quad \bar{N}_2=\frac{\rho}{a_1-a_2-iD_1}$$

$$Q_2=\frac{-(k^2-\varepsilon p_2)}{a_1-a_2+iD_1},\quad \bar{Q}_2=\frac{-(k^2-\varepsilon p_2)}{a_1-a_2-iD_1}$$

$\Lambda=U^{-1}AU$，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$，注意到 U 为空间$[\mathrm{span}\{\Pi_c,e_u,e_s\}]^{\perp}$的有界算子。如果作 v_0 到 w 的变元变换，其中 $\hat{v}_0=\bar{U}(k)\hat{w}(k)$，可得

$$\hat{w}_t(k)=\Lambda\hat{w}(k)-\bar{U}^{-1}\bar{U}_t\hat{w}(k)\tag{8.3.44}$$

项 $\bar{U}^{-1}\bar{U}_t$ 是有界的：

$$|\bar{U}^{-1}\bar{U}_t|\leqslant\frac{C(\delta)}{k^2}\varepsilon\exp[\nu\lambda t]$$

其中 C 与ε，k 无关。

事实上，令

$$E=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -M_1 & M_1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}N_1Q_1 & \bar{N}_1\bar{Q}_1\\ N_1 & \bar{N}_1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}N_2Q_2 & \bar{N}_2\bar{Q}_2\\ N_2 & \bar{N}_2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -M_2 & M_2\end{bmatrix},\quad \dot{E}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\dot{M}_1 & \dot{M}_1\end{bmatrix}$$

$$U_t=\begin{bmatrix}\dot{E} & \dot{B}\\ \dot{C} & \dot{D}\end{bmatrix}$$

$$\dot{M}_1=\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{iD_1}{k^2-\varepsilon\rho_1}\right]'=\frac{iD_1'(k^2-\varepsilon p_1)+iD_1\varepsilon p'}{(k^2-\varepsilon p_1)^2}$$

$$p_1'=\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\nu\lambda\exp[\nu\lambda t]\cdot\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}s}$$

$$|p_1'|\leqslant c\nu\exp[\nu\lambda t]$$

$$D_1'=\frac{1}{2D_1}[-\varepsilon p_1'(k^2-4\delta_1\omega^2-4J_{*1}-\varepsilon p_1)-$$

$$(k^2-\varepsilon p_1)(J_{*1}'+\varepsilon p_1')]$$

$$J_{*1}'=\frac{\mathrm{d}J_{*1}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}J_{*1}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=J_{*s}\nu\lambda\exp(\nu\lambda t)$$

$$|J_{*1}'|\leqslant C\nu\exp[\nu\lambda t]$$

其中 $\lambda=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_3|\}$，我们得到

$$|\dot{M}|\leqslant\frac{C(\delta)}{k^2}\varepsilon\exp(\nu\lambda t)$$

$$|\dot{E}|\leqslant\frac{C(\delta)}{k^2}\varepsilon\exp(\nu\lambda t)$$

类似 $\dot{E}$ 的估计，对$|\dot{B}|$，$|\dot{C}|$，$|\dot{D}|$成立。

于是$|\bar{U}^{-1}\bar{U}_t|\leqslant|\bar{U}^{-1}||\bar{U}_t|\leqslant\dfrac{C(\delta)}{k^2}\varepsilon\exp(\nu\lambda t)$

从方程(8.3.44)，我们得到积分方程

$$\hat{w}(k)=F(t,s,k)\hat{w}_0(k)-\int_s^t F(t,s',k)\bar{U}^{-1}\bar{U}_kw(k)\mathrm{d}s'$$

其中 $F(t,s;k)=\exp(\int_s^t \Lambda(\tau)\mathrm{d}\tau)$

对 $t\geqslant s>0$

$$|F(t,s;k)|\leqslant C(\delta)\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]$$

$$d(k)=\max\{d_1(k),d_2(k)\}$$

进而,我们有

$$|\hat{w}(k)|\leqslant C(\delta)\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)|+$$

$$C(\delta)\int_s^t \frac{\varepsilon}{k^2}\exp[-\varepsilon d(k)(t-s')\exp[\nu\lambda s']|\hat{w}|(k)|\mathrm{d}s'$$

由于 $\lambda<0$,这意味着对 $t\geqslant s>0$ 有

$$|\hat{w}(k)|\leqslant C(\delta)\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)|+$$

$$C(\delta)\int_s^t \varepsilon|\hat{w}(k)|\mathrm{d}s'$$

用 Gronwall's 不等式有

$$|\hat{w}(k)|\leqslant C(\delta)\exp[-\varepsilon d(k)(t-s)]|\hat{w}_0(k)|,\forall t\geqslant s>0$$

最后,如以 $\overline{U}(t,s)$表示 PDE 的基本解,则有

$$\|\overline{U}(t,s)v_{i0}\|_{H^1}\leqslant C(\delta)\exp[-\varepsilon\alpha(t-s)]\|v_{i0}\|_{H^1}$$

$$d(k)\geqslant\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$$

定理 8.3.6 在 Q 点存在 M_ε 中 C^1 的局部稳定流形。能用 (η,v_{i0})表示

$$W=\{(m,\eta,v_{i0}):m=f(\eta,v_{i0})\}$$

其中 $\eta\in[0,s_0]$, $\|v_{i0}\|_{H^1}\in[0,\varepsilon^{3/4}]$。且 $f(\eta,0)=0$, $|m|\leqslant C\varepsilon$。定理的证明类似文献[4]中定理 5.5。在此略去。

8.3.4 无扰动系统的同宿轨道

为证明扰动系统(8.3.1)的同宿轨道不变性,我们需用孤立子理论中 Hirota 双线性方法先获得未扰动系统的同宿轨。

当 $\varepsilon=0$ 时,系统(8.3.1)写为

$$\begin{cases} iq_{1t}=q_{1xx}+2[|q_1|^2+|q_2|^2-\omega^2]q_1 \\ iq_{2t}=q_{2xx}+2[|q_1|^2+|q_2|^2-\omega^2]q_1 \end{cases}\tag{8.3.45}$$

易看出系统(8.3.45)有一简单平面波解(q_{01},q_{02}):

$$\begin{cases} q_{01}=c_1\mathrm{e}^{-i[2(c_1^2+c_2^2-\omega^2)t-\gamma]}=c_1\mathrm{e}^{-i\theta(t)} \\ q_{02}=c_2\mathrm{e}^{-i[2(c_1^2+c_2^2-\omega^2)t-\gamma]}=c_2\mathrm{e}^{-i\theta(t)} \end{cases}$$

设

$$\begin{cases} q_1=Q_1c_1\mathrm{e}^{-i\theta(t)} \\ q_2=Q_2c_2\mathrm{e}^{-i\theta(t)} \end{cases}\tag{8.3.46}$$

其中 c_1,c_2 是常数,Q_1,Q_2 是复函数

将式(8.3.46)代入式(8.3.45),有

$$\begin{cases} iQ_{1t}-Q_{1xx}+2(c_1^2+c_2^2)Q_1-2[c_1|Q_1|^2+ \\ \quad c_2|Q_2|^2]Q_1=0 \\ iQ_{2t}-Q_{2xx}+2(c_1^2+c_2^2)Q_2-2[c_1|Q_1|^2+ \\ \quad c_2|Q_2|^2]Q_2=0 \end{cases}\tag{8.3.47}$$

引进变量变换

$$Q_1=G/F,Q_2=H/F$$

其中 G,H 是复函数,F 是实函数。系统(8.3.45)可变为下列双线性型

$$\begin{cases} (iD_t-D_x^2)G\cdot F=\lambda G\cdot F \\ (iD_t-D_x^2)H\cdot F=\lambda H\cdot F \\ D_x^2(F\cdot F)+2(c_1^2+c_2^2)F^2-\lambda F^2= \\ \qquad 2(c_1^2GG^*+c_2^2HH^*) \end{cases}\tag{8.3.48}$$

其中 λ 为一待定常数。Hirota 双线性算子 $\boldsymbol{D}_x^n\boldsymbol{D}_t^n$ 被定义为

$$D_x^nD_t^ma(x,t)b(x,t)=(\partial_x-\partial_{x'})^n(\partial_t-\partial_{t'})^m a(x,t)b(x',t')|_{x'=x,t'=t}$$

设

$$\begin{cases} G = 1 + (b_1 e^{ipx} + b_2 e^{-ipx}) e^{\Omega t + \gamma} + b_3 e^{2\Omega t + 2\gamma} \\ H = 1 + (b_4 e^{ipx} + b_5 e^{-ipx}) e^{\Omega t + \gamma} + b_6 e^{2\Omega t + 2\gamma} \\ F = 1 + b_7 (e^{ipx} + e^{-ipx}) e^{\Omega t + \gamma} + b_8 e^{2\Omega t + 2\gamma} \end{cases} \quad (8.3.49)$$

其中 $b_1 \sim b_6$ 是复数, p, Ω, b_7, b_8 是实数。

将式(8.3.49)代入式(8.3.48),导出下面常数关系式:

$$\lambda = 0$$

$$b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = \frac{\Omega i - p^2}{\Omega i + p^2} b_7 \quad (8.3.50)$$

$$b_3 = b_6 = \left(\frac{-p^2}{+p^2}\right)^2 b_8 \quad (8.3.51)$$

$$b_8 = \frac{p^4 + \Omega^2}{\Omega^2} b_7^2 \quad (8.3.52)$$

$$\beta^2 = p^2 [4(c_1^2 + c_2^2) - p^2] \quad (8.3.53)$$

进而,系统(8.3.45)有同宿解

$$q_1 = c_1 e^{-i\theta(t)} \frac{1 + b_1 (e^{ipx} + e^{-ipx}) e^{\Omega t + \gamma} + b_3 e^{2\Omega t + 2\gamma}}{1 + b_7 (e^{ipx} + e^{-ipx}) e^{\Omega t + \gamma} + b_8 e^{2\Omega t + 2\gamma}} \quad (8.3.54)$$

$$q_2 = c_2 e^{-i\theta(t)} \frac{1 + b_4 (e^{ipx} + e^{-ipx}) e^{\Omega t + \gamma} + b_6 e^{2\Omega t + 2\gamma}}{1 + b_7 (e^{ipx} + e^{-ipx}) e^{\Omega t + \gamma} + b_8 e^{2\Omega t + 2\gamma}} \quad (8.3.55)$$

其中 $b_1 \sim b_8, p, \Omega$ 满足式(8.3.50)~式(8.3.53)。如果 $p^2 < 4(c_1^2 + c_2^2)$,我们选择 $\Omega > 0$。

由式(8.3.54)和式(8.3.55)给出的解表示系统式(8.3.45)的同宿轨。

这是因为,当 $t \to -\infty$ 时, $q_1 \to c_1 e^{-i\theta(t)}, q_2 \to c_2 e^{-i\theta(t)}$;

当 $t \to +\infty$ 时, $q_1 \to c_1 e^{-i\theta(t)} \left(\frac{i\Omega - p^2}{i\Omega + p^2}\right)^2, q_2 \to c_2 e^{-i\theta(t)} \left(\frac{i\Omega - p^2}{i\Omega + p^2}\right)^2$。它们具有 -2φ 的相位差,其中 $\tan\varphi = \frac{2\Omega p^2}{p^4 - \Omega^2}$。

8.3.5 同宿轨道的不变性

本节,我们用局部不变流形和未扰动系统的同宿轨去构造鞍点 Q 的同宿轨道。论证分两步,即第一测试和第二测度。在第一测度里,我们构造一个距离函数 Δ,它的零点对应于这样的轨道,即不在常值平面 Π_c 中,于反向时间($t \to -\infty$)趋于鞍点 Q,而在正向时间($t \to +\infty$)趋于 M_ε。第二测试也构造一个函数 d,它的零点对应于第一测度中所得到轨道之一和纤维相交,纤维的基点在 Q 点的稳定流形之中。因此,从纤维的定义, Δ 和 d 同时为零,保证了 Q 点同宿轨道的存在性。

1. 第一(Melnikov)测度

扰动 CNLS 方程具有形式

$$q_{jt} = iDH_j(q_j) + \varepsilon G_j(q_j), j = 1,2 \quad (8.3.56)$$

其中 $H = \int_0^{2\pi} \{ |q_{1x}|^2 + |q_{2x}|^2 - [(|q_1|^2 + |q_2|^2)^2 - \omega^2(|q_1|^2 + |q_2|^2)] \} dx$

$$\begin{aligned} DH_j &= -q_{jxx} - 2[|q_1|^2 + |q_2|^2 - \omega^2] q_j, j = 1,2 \\ G_j(q_j) &= -\alpha_j q_j + \beta_j \hat{B} q_j - r_j, j = 1,2 \end{aligned} \quad (8.3.57)$$

论证从 Q 的稳定流形 $W^u(Q)$ 开始, $W^u(Q)$ 的维数为 2。在平面 $\Pi_c \subset M_\varepsilon$ 里有一个慢方向, Q 的不稳定流形为曲线 C_ε^u,它由能量式(8.3.13)控制,曲线 C_ε^u 位于不动点圆 C_ω 的附近,且可视为整个圆的一个图。即曲线 C_ε^u 能通过一个角度 θ_b 参数化。

因为 $W^u(Q)$ 是 W_ε^{cu} 的子流形。则

$$W^u(Q) = \bigcup_{q_b \in C_\varepsilon^u} \{ F_q^u(\cdot;\varepsilon) \}$$

其中 $F_q^u(\cdot;\varepsilon)$ 表示一条基点为 q_b 的不稳定纤维。特别地,我们在曲线 C_ε^u 上固定一个基点 q_b(对应角度 θ_b),考虑有同一基点的两

个不同的不稳定纤维——扰动纤维 $F^u_{q_b}(\cdot;\varepsilon)$ 和与它相邻的未扰动纤维 $F^u_{q_b}(\cdot;0)$。固定一个小的正数 δ,沿着这两条纤维,我们定义扰动和未扰动的"脱离点":$q_\varepsilon(0)=F^u_{q_b}(\delta;\varepsilon)$ 和 $q_h(0)=F^u_{q_b}(\delta;0)$,它们都是基点 q_b(对应角度 θ_b)的函数。接下来,我们考虑初始点在"脱离点"的两条轨道 $q_h(t)$ 和 $q_\varepsilon(t)$。因 $q_h(t)$ 是未扰动系统的同宿轨,肯定在前向时间趋于 Π_c。另外,轨道 $q_\varepsilon(t)$ 是扰动系统的一个解。我们的目的是确定是否可选择"脱离角度"θ_b,使保证 $q_\varepsilon(t)\to M_\varepsilon$(当 $t\to+\infty$)。

由式(8.3.54)、式(8.3.55)中 $q_h(t)$ 的显示表达式可知,存在一个时间 $T_*(\delta)$,使得 $\forall t\geqslant T_*$,有 $\mathrm{dist}(q_h(t),\Pi_c)\leqslant\delta$。在 T_* 处,我们定义"着陆"点

$$q_0=q_h(T_*),q_l=q_\varepsilon(T_*)$$

由有限时间扰动理论知,这个"着陆"点有一个 $O(\varepsilon)$ 阶的距离。因 $t\to+\infty,q_h\to\Pi_c$,则 $q_0\in W^{cs}_0$。我们希望选择 θ_b,使 $q_l\in W^{cs}_\varepsilon$。

流形 W^{cs}_ε 是余维数 2 的且与 W^{cs}_0 有 $O(\varepsilon)$ 阶距离。我们定义

$$\Delta\equiv\langle DH(q_0),q_l-q_s\rangle$$

其中 $DH(\cdot)$ 由式(8.3.57)给出。

作为 q_l 与 q_s 之间的距离测度,这里 q_s 表示经过 q_l 沿 W^{cs}_0 在点 q_0 处法方向的直线与 W^{cs}_ε 的交点。

为计算 Δ,定义轨道

$$q_*(t)+q_h(t+T_*)$$
$$q_u(t)=q_\varepsilon(t+T_*),\quad t\leqslant 0$$

类似地,对 $t\geqslant 0$,定义 $q_s(t)$ 为扰动问题关于初值 q_s 的解。并把 $q_*(t)$ 的定义扩展到 $t\in(-\infty,+\infty)$。

由此,我们引入距离测度

$$\Delta^-(t)\equiv\langle DH(q_*(t)),q_u(t)-q_*(t)\rangle,\quad t\leqslant 0$$
$$\Delta^+(t)\equiv\langle DH(q_*(t)),q_s(t)-q_*(t)\rangle,\quad t\geqslant 0$$

$$\Delta=\Delta^-(0)-\Delta^+(0)$$

对 $\forall v\in H^1$,有

$$\langle DH(q),v\rangle=-\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{2}[q_{jxx}+2(|q_1|^2+|q_2|^2-\omega^2)q_j]\bar{v}\,\mathrm{d}x$$

同有限维的情形一样[11],通过微分 $\Delta^-(t)$ 和 $\Delta^+(t)$,能让我们借助于 Melnikov 积分来估计距离 Δ。

命题8.3.7 距离 Δ_j 给定为

$$\Delta=\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\langle DH(q_*(t)),G(q_*(t))\rangle\mathrm{d}t+O(\varepsilon^2)$$

命题的详细证明可参考文献[4]。

设 q_ω 表示未扰动系统同宿到不动点圆 C_ω 的同宿轨道,则它与同宿轨 $q_*(t)$ 有一个$\sqrt{\varepsilon}$的距离。利用 G 的显式并借助于 $q_\omega(t)$ 得到:

推论 8.3.8 距离 Δ_j 关于 ε 的表达式如下

$$\Delta_j=\varepsilon M(\alpha_j,\beta_j,r_j,\theta_{jb})+O(\varepsilon^{3/2})$$

$$M_j(\alpha_j,\beta_j,r_j,\theta_{jb})=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle DH_j(q_{j*}(t)),G_j(q_{j*}(t))\rangle\mathrm{d}t=-[\alpha_jM_{\alpha j}+\beta_jM_{\beta j}+r_jM_{j0}]$$

这里

$$M_{\alpha j}=\int_{-\infty}^{\infty}\langle DH_j(q_{j*}(t)),q_{j*}(t)\rangle\mathrm{d}t=-\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}i\partial_t q_{jh}(t,\theta)\bar{q}_{jh}(t,\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\omega_j^2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}i\partial_t q_{\omega j}(t)\bar{q}_{\omega j}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$M_{\beta j}=-\omega_j^2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}i\partial_{tx}q_{\omega j}(t)\partial_x q_{\omega j}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$M_{j0} = -\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i\langle \partial_t q_{jh}(t,\theta)\rangle \mathrm{d}t =$$

$$-2\pi \operatorname{Re} i(q_{jh}(+\infty,\theta_j) - q_{jh}(-\infty,\theta_j)) =$$

$$-2\pi\omega(\sin\theta_j - \sin(\theta_j - 2\varphi_0))$$

其中

$$q_{\omega j} = \frac{1 + b_1(e^{ip_0x} + e^{-ip_0x})e^{\Omega_0 t+\gamma} + b_2 e^{2\Omega_0 t+2\gamma}}{1 + b_7(e^{ip_0x} + e^{-ip_0x})e^{\Omega_0 t+\gamma} + b_8 e^{2\Omega_0 t+2\gamma}}$$

$$\cdot\ \omega_j e^{i(\theta_{jb}-2\varphi_0)},\quad j = 1,2$$

且

$$\tan\varphi_0 = \frac{2\Omega_0 p_0^2}{p_0^4 - \Omega_0^2}$$

$$\Omega_0^2 = p_0^2[4(\omega_1^2 + \omega_2^2) - p_0^4],\ \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2$$

b_1, b_2, b_7, b_8 满足式(8.3.54)~式(8.3.55)。

当 $t \to \pm\infty$，$q_{\omega j}$同宿到$\omega_j e^{i(\theta_{jb}-2\varphi_0)}$具有 $-2\varphi_0$ 的相位差。假如 $M_{\alpha j}, M_{\beta j}, M_{j0}$之一不等于零，则函数

$$M_j(\alpha_j, \beta_j, \gamma_{jb}, \theta_{jb}) = \alpha_j M_{\alpha j} + \beta_j M_{\beta j} + \gamma_j M_{j0} = 0 \tag{8.3.58}$$

有非退化零点。这意味着，我们可选择参数，使得 $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0$，即

$$q_l = q_s \in W_\varepsilon^{cs}$$

2. 第二测度

我们可以选择"脱离"角 θ_b 使"着陆"点 $q_l \in W_\varepsilon^{cs}$，从而轨道 $q_l(t)$趋近于 M_ε 但不知道它是否趋于鞍点 Q。为保证 $q_l(t)$同到 Q 点，必须实施第二测度。

在第二测度里，我们使用 Fenichel 纤维进行打靶论证。当 $W^s(Q_j)$作为全空间的子流形时，其余维数为 4，而作为 W_ε^{cs} 的子流形，余维数为 2。

我们用 $q_{l,b}$和 $q_{0,b}$分别表示扰动和未扰动情况下"着陆"纤维的基点。

$$q_{0,b} \in \mathscr{F}_{q_{0,b}}(\cdot;0)$$

$$q_{l,b} \in \mathscr{F}_{q_{l,b}}(\cdot;\varepsilon)$$

其中 $\mathscr{F}_{q0,b}(\cdot;0)$和 $\mathscr{F}_{ql,b}(\cdot;\varepsilon)$是未扰动和扰动下的稳定"着陆"纤维。已知未扰动纤维的基点 $q_{0,b} \in \Pi_c$，由于纤维关于 ε 的光滑性，则基点 q_{lb}和 $q_{0,b}$是 ε 接近的。

问题是，基点 $q_{l,b}$是否落在稳定流形 $W = W^s(Q) \cap M_\varepsilon$ 上。为此，我们给出如下命题。

命题 8.3.9 从"着陆"基点 $q_{l,b}$到稳定流形 W 的距离 d 能够用"脱离"角 θ_b 来测度

$$\begin{aligned} d_j &= \omega[2r_j\sqrt{\delta_j}\sin 2\varphi_0\cos(\theta_{jb} - 2\varphi_0) + \\ &\quad 4\alpha_j\delta_j\omega\varphi_0] + O(\sqrt{\varepsilon}),\ j = 1,2 \\ d &= d_1 + d_2 \\ \delta_1 &+ \delta_1 = 1 \end{aligned} \tag{8.3.59}$$

命题 8.3.9 的证明主要包括：

(1) 利用纤维的光滑性得到扰动和未扰动的基点是充分逼近的；

(2) 能量式(8.3.13)用于测度在 Π_c 上的距离；

(3) 稳定流形 W 可视为一条"纤维带"，由前面对 $W^s(Q)$的大小的估计可知，这条带的宽度保证有轨道能进入带内，从而准确地捕捉"着陆"点；

(4) 可积系统轨道的相移显式表明了"着陆"点是脱离角 θ_b 的函数。

关于第二测度的详细讨论参见文献[4]。

假若我们定义

$$\tilde{d}_j = 2r_j\sqrt{\delta_j}\sin 2\varphi_0\cos(\theta_{jb} - 2\varphi_0) + 4\alpha_j\delta_j\omega\varphi_0$$

$$j = 1,2 \tag{8.3.60}$$

并设 $\tilde{d}_j$ 有非退化零点，那么，我们能再次选择参数使得 $d = d_1 +$

$d_2=0$。

3. 同宿轨道的存在性

定理 8.3.10 如果参数$(\omega,\alpha_j,\beta_j,\gamma_j)$和$\theta_{jb}$满足下列条件

(1) $\omega\in(\frac{1}{2},1)$

(2) $\alpha_j,\beta_j,\gamma_j>0,\qquad j=1,2$

(3) $\tilde{\alpha}_j=\frac{\alpha_j}{\gamma_j}\in(0,a_0),\quad a_0=\min\{\frac{1}{\omega},\frac{\sin2\varphi_0}{2\omega\varphi_0\sqrt{\delta_1}},\frac{\sin2\varphi_0}{2\omega\varphi_0\sqrt{1-\delta_1}}\}$

(4) $\cos(\theta_{jb}-2\varphi_0)=\frac{-2\tilde{\alpha}_j\sqrt{\delta_j}\omega\varphi_0}{\sin2\varphi_0},\quad \theta_{jb}\in(\theta_{j,\min},\theta_{j0})$

其中

$$\theta_{j0}=\arctan\frac{\sqrt{\gamma_j-\alpha_j^2\delta_j\omega^2}}{\alpha_j\sqrt{\delta_j}\omega}-\pi,\qquad j=1,2$$

$$\sin\theta_{j,\min}+\tilde{\alpha}_j\sqrt{\delta_j}\omega\theta_{j,\min}=\sin\theta_{j0}+\tilde{\alpha}_j\sqrt{\delta_j}\omega\theta_{j0},\quad \theta_{j,\min}<\theta_{j0}$$

(5) $M_{\alpha_j},M_{\beta_j},M_{j0}$不为零,而且

$$\alpha_jM_{\alpha j}+\beta_jM_{\beta_j}-M_{j0}\cos(\theta_{jb}-2\varphi_0)=0$$

那么,对于充分小的正数 ε,方程(8.3.1)存在一对同宿轨道。

证明:为方便计算,我们固定参数$(\alpha_j,\omega_j,\gamma_j)$,且让 $M_{\beta_j}\neq0$,则 M_j 和 $\tilde{d}_j$ 便是θ_{jb}和β_j 的函数。

为了证明 Q 的同宿轨道存在性,只要 M_j 和 $\tilde{d}_j$ 同时存在非退化零点即可,其中 $\beta_j>0$ 且 $\theta_{jb}\in(\theta_{j,\min},\theta_{j0})$,这里$(\theta_{j,\min},\theta_{j0})$是平面 Π_c 上对未扰动同宿轨道而言 θ_j 的取值范围。

当 $M_{\beta_j}\neq0$ 时,我们能求解 $\tilde{d}_j=0$ 和 $M_j=0$ 而得到

$$\cos(\theta_{jb}-2\varphi_0)=\frac{-2\tilde{\alpha}_j\sqrt{\delta_j}\omega\varphi_0}{\sin2\varphi_0}\tag{8.3.61}$$

$$\beta_j=\frac{-[\alpha_jM_{\alpha j}+\frac{2\alpha_j\sqrt{\delta_j}\omega\varphi_0}{\sin2\varphi_0}M_{j0}]}{M_{\beta_j}},\quad j=1,2\tag{8.3.62}$$

利用隐函数定理,对 ε 充分小,能够在由式(8.3.61),式(8.3.62)所得点(θ_{jb},β_j)的一个小邻域内求解 $\Delta=d=0$。由于 $\Delta=d=0$,则点 $q_l\in W_\varepsilon^{cs}$,进而有 q_l 位于基点为 $q_{l,b}\in W$ 的一条纤维上,也即 Q 的稳定流形的一条纤维上。因此,轨道 $q_s(t)$在 $t\geqslant0$ 时仍然在 C_ω 的一个小邻域内,这意味着 $q_s(t)$是原方程的解。且

$$q(t)=\begin{cases}q_u(t), & t\leqslant0\\ q_s(t), & t\geqslant0\end{cases}$$

是 Q 的同宿轨道。

8.4 具有导数项非线性 Schrödinger 方程在小扰动下同宿轨道的不变性

8.4.1 预备性结果

我们考虑扰动非线性 Schrödinger 方程(DNLS)

$$iq_t=q_{xx}+2(|q|^2-\omega^2)q-i(|q|^2q)_x+i\varepsilon(\boldsymbol{D}q-\boldsymbol{\Gamma})\tag{8.4.1}$$

其中,q 是关于x 为2π 周期的复函数,$\omega\in(0,\frac{1}{3}\sqrt{-6+3\sqrt{7}})$是一常数,$\varepsilon>0$是一小扰动参数,$\boldsymbol{D}$ 是有界耗散算子。假设 $\boldsymbol{D}$ 取如下形式:

$$\boldsymbol{D}q=-\alpha q+\beta\hat{\boldsymbol{B}}q\tag{8.4.2}$$

其中,α,β 是正常数,$\hat{B}$ 是∂_{xx}的 Fourier 截断。

$$\boldsymbol{B}[\cos(kx)+i\sin(kx)]=\begin{cases}-k^2[\cos(kx)+i\sin(kx)], & k<K\\ 0, & k\geqslant K\end{cases}\tag{8.4.3}$$

定理8.4.1 对于 $q_0=q(t)|_{t=0}\in H_{e,p}^1$和 $t\in(-\infty,+\infty)$,方程(8.4.1)在空间 $H_{e,p}^1$中存在惟一解 $q(t,\varepsilon)$,且 $q(t,\varepsilon)$关于 t 连续,进而 $q(t,\varepsilon)$连续依赖于 q_0 和 ε。其中 $H_{e,p}^1=\{q\in H^1|q(x+2\pi)=q(x)\}$是通常的 Sobolv 空间。

这个定理的证明应用标准的能量方法,参考文献[1]。

8.4.2 常数平面上的解分析

常数平面 $\Pi_c \equiv \{q(x,t) | \partial_x q(x,t)=0\}$ 是方程(8.4.1)的一个不变平面。在 Π_c 平面上,方程(8.4.1)可写为如下形式:

$$iq_t = 2(|q|^2-\omega^2)q - i\varepsilon(\alpha q+\Gamma) \qquad (8.4.4)$$

令 $q=\sqrt{I}\exp\{\theta\}$,式(8.4.4)的极坐标方程为

$$I_t = -2\varepsilon(\alpha I+\Gamma\sqrt{I}\cos\theta)$$

$$\theta_t = -2(I-\omega^2)+\varepsilon\Gamma\sin\theta/\sqrt{I} \qquad (8.4.5)$$

当 $\varepsilon=0$ 时,由式(8.4.5)可知,方程(8.4.1)具有不动点——圆 C_ω: $I=\omega^2$,系统在无扰动时的轨道是围绕 C_ω 的一族圆套。当 $\varepsilon>0$ 时,圆套破裂,扰动系统在 C_ω 附近出现两不动点:鞍点 Q 和焦点 P。式(8.4.5)按摄动展开,可求出 P,Q 的坐标

$$\begin{cases} I_p = \omega^2+\dfrac{\varepsilon}{2\Gamma\omega}\sqrt{\Gamma^2-\alpha^2\omega^2}+O(\varepsilon^2) \\ \theta_p = -\arctan\dfrac{\sqrt{\Gamma^2-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}-\pi+O(\varepsilon) \\ I_q = \omega^2-\dfrac{\varepsilon}{2\Gamma\omega}\sqrt{\Gamma^2-\alpha^2\omega^2}+O(\varepsilon^2) \\ \theta_q = \arctan\dfrac{\sqrt{\Gamma^2-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}-\pi+O(\varepsilon) \end{cases} \qquad (8.4.6)$$

将式(8.4.5)分别在 P,Q 处线性化,可获得增长率

$$\sigma_q = \pm 2\sqrt{\varepsilon\omega}(\Gamma^2-\alpha^2\omega^2)^{1/4}-\varepsilon\alpha+O(\varepsilon^{3/2})$$

$$\sigma_p = \pm 2i\sqrt{\varepsilon\omega}(\Gamma^2-\alpha^2\omega^2)^{1/4}-\varepsilon\alpha+O(\varepsilon^{3/2})$$

令 $J=I-\omega^2$,方程(8.4.5)变为

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2)+\Gamma\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] \\ \theta_t = -2J+\dfrac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta \end{cases} \qquad (8.4.7)$$

为了描述鞍点 Q 的稳定流形,我们引进尺度坐标

$$\tau=\nu t, \qquad J=\nu j, \qquad \nu=\sqrt{\varepsilon}$$

方程(8.4.5)变为

$$\begin{cases} j_\tau = -2[\alpha(\omega^2+\nu j)+\Gamma\sqrt{\omega^2+\nu j}\cos\theta] \\ \theta_\tau = -2j+\dfrac{\nu\Gamma}{\sqrt{\omega^2+\nu j}}\sin\theta \end{cases} \qquad (8.4.8)$$

令 $y=(j,\theta)^{\mathrm{T}}$,则式(8.4.8)写为

$$y_\tau = Y(y,\nu) \qquad (8.4.9)$$

$Y=(Y_1,Y_2)^{\mathrm{T}}$ 由方程(8.4.8)定义。在这些变量下,平衡点 Q 的坐标为 $y_q=(j_q,\theta_q)$,其中

$$j_q = -\frac{\nu}{2\omega\Gamma}\sqrt{\Gamma^2-\alpha^2\omega^2}+O(\nu^3)$$

$$\theta_q = \arctan\frac{\sqrt{\Gamma^2-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}-\pi+O(\nu^2)$$

在 y_q 处线性化方程(8.4.8),并记 $\tilde{y}=y-y_q$,有

$$\tilde{y}_\tau = Y'(y_q,\nu)\tilde{y}+O(\tilde{y}^2)$$

$Y'(y_q,\nu)$的特征值为

$$\begin{cases} \lambda = -2\sqrt{\omega}(\Gamma^2-\alpha^2\omega^2)^{1/4}-\nu\alpha+O(\nu^2) \\ \mu = 2\sqrt{\omega}(\Gamma^2-\alpha^2\omega^2)^{1/4}-\nu\alpha+O(\nu^2) \end{cases} \qquad (8.4.10)$$

对应于 λ,μ 的特征向量分别为 $e_1(\nu)$ 和 $e_2(\nu)$,且

$$e_1(0)=(-\frac{\sigma}{2},1)^{\mathrm{T}}$$

$$e_2(0)=(\frac{\sigma}{2},1)^{\mathrm{T}}$$

$$\sigma=2\sqrt{\omega}(\Gamma^2-\alpha^2\omega^2)^{1/4}$$

这表明平衡点 Q 为一鞍点。从扰动理论和稳定流形理论,当 ε 充分小,存在 Q 点的一个与 ε 无关的邻域U,使得 Q 点的局部稳定

流形能参数化。

$$\begin{cases} y = y_*(s,\nu) \\ s = \exp(\lambda,\tau) \end{cases} \tag{8.4.11}$$

其中 $0 \leqslant s \leqslant s_* = \exp(\lambda\tau_*)$，$s_*$ 很小且与 ε 无关。

Q 点是 $Q_0 = (j_0, \theta_0)$ 的 $O(\nu)$ 阶扰动。

$$j_0 = 0$$

$$\theta_0 = \arctan \frac{\sqrt{\Gamma^2 - \alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} - \pi$$

方程(8.4.8)是下面保守系统的 $O(\nu)$ 阶扰动。

$$\begin{aligned} j_\tau &= -2(\alpha\omega^2 + \Gamma\omega\cos\theta) \\ \theta_\tau &= -2j \end{aligned} \tag{8.4.12}$$

式(8.4.12)的能量为

$$E(j,\theta) = \frac{1}{2}j^2 - \omega(\alpha\omega\theta + \Gamma\sin\theta) \tag{8.4.13}$$

且曲线 $E(j,\theta) = E(j_0,\theta_0)$ 是无扰动系统式(8.4.12)的稳定流形。我们用 C_0^s 表示：

$$C_0^s: y_0(\tau) = (j_0(\tau), \theta_0(\tau))$$

如果固定 $\tau_0 < \tau_*$，对 $\forall\, \tau, \tau_0 < \tau < \tau_*$，由正则扰动定理，$Q$ 点的稳定流形为

$$y = y_0(\tau) + O(\nu)$$

进而，用 C_ε^s 表示 Q 点的稳定流形($\tau \in (0, +\infty)$)，则 C_ε^s 能用 $s \in (0, s_0)$ 参数化如下：

$$y = y_*(s,\nu)$$
$$s = \exp(\lambda\tau)$$

其中 $y_*(s,\nu)$ 是关于 s 和 ν 光滑的函数。y_* 是 y_0 的 $O(\nu)$ 阶逼近。

为了描述 C_ε^s 附近的流，参考文献[2]，我们引进坐标(m, s)，其中 m 是曲线 C_ε^s 法向的一个距离测度。在(m, s)坐标下，方程(8.4.8)可写为

$$\begin{cases} m_\tau = a(s,\nu)m + O(m^2) \\ s_\tau = \lambda s + b(s,\nu)m + O(m^2) \end{cases} \tag{8.4.14}$$

其中 m, a, b 是关于(s, ν)($0 < s < s_0$)的光滑函数。

为了描述 C_ε^s 周围的线性化流，设

$$s = \eta + (h_0 + h_1\eta)m$$

其中常数 h_0, h_1 选择为

$$h_0 = \frac{b_0}{\mu - \lambda}, \qquad h_1 = \frac{b_1 - h_0 a_1}{\mu}$$

且 $a = \mu + a_1 s + O(s^2)$，$b = b_0 + b_1 s + O(s^2)$

式(8.4.14)关于坐标(m, η)的方程变为

$$\begin{aligned} m_\tau &= a(\eta,\nu)m + O(m^2) \\ \eta_\tau &= \lambda\eta + c(\eta,\nu)m + O(m^2) \end{aligned} \tag{8.4.15}$$

其中 $|c(\eta,\nu)| \leqslant c_0|\eta|^2$，对应于 C_ε^s 上的流：$0 \leqslant \eta \leqslant s_0$。方程(8.4.15)关于 C_ε^s 的线性化流

$$\eta_* = \eta_0\exp(\lambda\tau)$$
$$\delta m_\tau = a_*\delta m$$
$$\delta\eta_\tau = \lambda\delta\eta + C_*\delta m$$

与 C_ε^s 周围的线性化流有相同的增长率和压缩率。

8.4.3 C_ω 邻域的方程

为了研究 C_ω 领域内解的动力性态，方程(8.4.1)用坐标(J, θ, f)表示。设

$$q \equiv (\rho(t) + f(x,t))\exp i\theta(t) \tag{8.4.16}$$

其中 ρ 和 θ 是平面 Π_c 上的极坐标，$f \in \Pi_c^{\perp}$，且

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

令

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q\bar{q}\,\mathrm{d}x = \rho^2 + \langle f\bar{f}\rangle$$

$$J = I - \omega^2$$

方程(8.4.1)可写为

$$
\begin{cases}
J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \Gamma\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] + Q_1(J,\theta,f) \\
\theta_t = -2J + \dfrac{\varepsilon\Gamma\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}} + Q_2(J,\theta,f) \\
f_t = L_\varepsilon f + V_\varepsilon f - i\rho Q_3(J,\theta,f) - iQ_4(J,\theta,f)
\end{cases}
\tag{8.4.17}
$$

其中

$$L_\varepsilon f = -if_{xx} - \varepsilon(\alpha f - \beta f_{xx}) - 2i\omega^2(f+f) - \omega^2(2f_x + \bar{f}_x)$$

$$V_\varepsilon f = -2iJ(f+\bar{f}) - J(2f_x + \bar{f}_x) - i\frac{\varepsilon\Gamma\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}}f$$

$$
\begin{aligned}
Q_1 = {} & 2\mathrm{Re}(\rho\langle f\bar{f}\bar{f}_x\rangle + \langle f^2\bar{f}\bar{f}_x\rangle) - 2\varepsilon\beta\langle f_x f_x\rangle - \\
& 2\varepsilon\Gamma\cos\theta(\sqrt{J+\omega^2} - \sqrt{J+\omega^2-\langle f\bar{f}\rangle}) = \\
& O(|f|^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2 = {} & \varepsilon\Gamma\left(\frac{1}{\sqrt{J+\omega^2-\langle f\bar{f}\rangle}} - \frac{1}{\sqrt{J+\omega^2}}\right)\sin\theta - 2\mathrm{Re}[\langle f^2 + \\
& f\bar{f}\rangle - i\langle \bar{f}f_x + f_x f + f_x f\rangle] - \frac{1}{\rho}\mathrm{Re}[2\langle f\bar{f}f\rangle - \\
& i\langle f\bar{f}f_x\rangle - i\langle f^2\bar{f}_x\rangle] = \\
& O(|f|^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_3 = {} & 2i[f_x\bar{f} + ff_x + \bar{f}f_x - \langle f_x f + ff_x + \bar{f}f_x\rangle] + \\
& 4(f\bar{f} - \langle f\bar{f}\rangle) + 2(f^2 - \langle f^2\rangle) = O(|f|^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_4 = {} & i\langle f\bar{f}\rangle(2f_x + \bar{f}_x) - 2i(f\bar{f}f_x - \langle f\bar{f}f_x\rangle) - \\
& i(\bar{f}f_x - \langle ff_x\rangle) - 4\langle f\bar{f}\rangle f - 2\langle ff\rangle\bar{f} + Q_2 f = \\
& O(|f|^3)
\end{aligned}
$$

对于 $i\partial_t f = f_{xx} + 2\omega^2(f+\bar{f}) + \omega Q_3(f)$,引进规范变换:

$$i\partial_t g = g_{xx} + 2\omega^2(g+g) + O(g^3)$$

其中 $g = f + K(f,\bar{f})$,$K(f,\bar{f})$是有界双线性映射。方程(8.4.17)变为

$$J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \Gamma\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] + N_1(J,\theta,g,\varepsilon)$$

$$\theta_t = -2J + \frac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta + N_2(J,\theta,g,\varepsilon)$$

$$ig_t = L_\varepsilon g + V_\varepsilon g + N_3(J,\theta,g,\varepsilon)$$

其中 $N_1(J,\theta,g,\varepsilon) = O(\varepsilon g^2)$

$N_2(J,\theta,g,\varepsilon) = O(g^2)$

$N_3(J,\theta,g,\varepsilon) = O(Jg^2 + \varepsilon g^2 + g^3)$

令 $u = (\mathrm{Re}g, \mathrm{Im}g)^{\mathrm{T}}$,上面方程变为

$$
\begin{cases}
J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \Gamma\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] + \\
\qquad \tilde{N}_1(J,\theta,u,\varepsilon) \\
\theta_t = -2J + \dfrac{\varepsilon\Gamma}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta + \tilde{N}_2(J,\theta,u,\varepsilon) \\
u_t = \tilde{L}_\varepsilon u + \tilde{V}_\varepsilon u + \tilde{N}_3(J,\theta,u,\varepsilon)
\end{cases}
\tag{8.4.18}
$$

其中 $\tilde{N}_3$ 为一个二元向量。

$$\tilde{L}_\varepsilon = \tilde{J}\partial_{xx} - \omega^2 P\partial_x - 4\omega^2 S - \varepsilon(\alpha I - \beta I\partial_{xx})$$

$$V_\varepsilon = -4JS + \frac{\varepsilon\Gamma\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}}\tilde{J} - JP\partial_x$$

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.4.4 不变流形

在 C_ω 的邻域内,方程(8.4.18)被视为下面线性系统的扰动

$$
\begin{cases}
J_t = 0 \\
\theta_t = -2J \\
u_t = \boldsymbol{L}_\varepsilon u
\end{cases}
\tag{8.4.19}
$$

为了研究方程(8.4.19)解的局部行为,必须分析算子 L_ε 的谱。我们考虑特征值问题

$$L_\varepsilon e(x) = \lambda e(x)$$

用 Fourier 展开,$\tilde{L}_\varepsilon$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda+\varepsilon(\beta k^2+\alpha) & 3\omega^2 k & k^2 & 0 \\ -3\omega^2 k & \lambda+\varepsilon(\beta k^2+\alpha) & 0 & k^2 \\ -(k^2-4\omega^2) & 0 & \lambda+\varepsilon(\beta k^2+\alpha) & \omega^2 k \\ 0 & -(k^2-4\omega^2) & -\omega^2 k & \lambda+\varepsilon(\beta k^2+\alpha) \end{vmatrix}$$

L_ε 的特征值为

$$\lambda_k^\pm = -\varepsilon[\beta k^2+\alpha] \pm \Omega_k$$

$$\mu_k^\pm = -\varepsilon[\beta k^2+\alpha] \pm i\tilde{\Omega}_k$$

其中

$$\Omega_k = \sqrt{-k^2(k^2+\omega^2(-4+5\omega^2+4\sqrt{k^2-4\omega^2+\omega^4}))}$$

$$\tilde{\Omega}_k = \sqrt{-k^2(k^2+\omega^2(-4+5\omega^2-4\sqrt{k^2-4\omega^2+\omega^4}))}$$

$$a = k^2(k^2-4\omega), \quad b = (\omega^2 k)^2$$

由于 $\omega \in (0, \frac{1}{3}\sqrt{3\sqrt{7}-6})$,只有 $\lambda_1^\pm$ 是实数,$\lambda_k^\pm(k>1)$ 和 $\mu_k^\pm(k \geqslant 1)$是虚数。令

$$\sigma = 4\sqrt{\omega^2(1-4\omega^2+\omega^4)} - (1-4\omega^2+5\omega^4)$$

则 $\lambda_1^\pm = \pm\sigma - \varepsilon(\beta+\alpha)$。

正的特征值 λ_1^+ 表示线性化方程以指数率 σ 强增长,负的特征值 λ_1^- 表示以指数率 σ 强衰减。它们有特征向量

$$e_{s,u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}(1, \mp\sigma)^{\mathrm{T}}(\cos x + \sin x)$$

这些特征向量属于 C_ω 附近轨道的稳定方向和不稳定方向。因此,u 可表示为

$$u(x) = v_u e_u(x) + v_s e_s(x) + v_0(x) \tag{8.4.20}$$

其中 v_u 和 v_s 是实标量,且

$$v_0(x) \in [\mathrm{span}\{\Pi_c, e_u, e_s\}]^\perp$$

于是方程(8.4.19)分解为

$$\begin{cases} J_t = 0 \\ \theta_t = -2J \\ v_{u,t} = \lambda_1^+ v_u \\ v_{s,t} = \lambda_1^- v_s \\ v_{0,t} = L_\varepsilon v_0 \end{cases} \tag{8.4.21}$$

可清楚地看到,当 $\varepsilon=0$ 时,线性化方程有一个不稳定方向 $\{e_u\}$ 和一个稳定方向 $\{e_s\}$,无穷多个中心方向 (J,θ,v_0)。记 $v_c = (J,\theta,v_0)^{\mathrm{T}}$,方程(8.4.21)能写为

$$\begin{cases} v_{u,t} = \lambda_1^+ v_u \\ v_{s,t} = \lambda_1^- v_s \\ v_{c,t} = A v_c \end{cases} \tag{8.4.22}$$

其中 A 由式(8.4.21)定义。

当 $\varepsilon=0$ 时,C_ω 有一维稳定流形和一维不稳定流形,还有余维数为 2 的中心流形,我们注意的是中心稳定、中心不稳定及中心流形:

$$E^{cs}(C_\omega) = [\mathrm{span}\{e_u\}]^\perp$$

$$E^{cu}(C_\omega) = [\mathrm{span}\{e_s\}]^\perp$$

$$E^{c}(C_\omega) = [\mathrm{span}\{e_s, e_u\}]^\perp$$

我们将证明在 C_ω 的领域内,当 $\varepsilon>0$ 时,不变流形的持续性,为此,需局部化式(8.4.18)。引进局部化函数 ψ_δ:

$$\psi_\delta: R \to R, \psi_\delta(s) = \psi(s/\delta)$$

ψ 是 C^{∞} 的,且满足

$$\psi(s)=\begin{cases}1, & |s|\leqslant 1\\ 0, & |s|\geqslant 2\end{cases}$$

局部化方程(8.4.18)为

$$\begin{cases}J_t=-2\varepsilon[(J_\delta+\omega^2)+\Gamma\sqrt{J_\delta+\omega^2}\cos\theta]+\\ \qquad \tilde{N}_1(J_\delta,\theta,u_\delta,\varepsilon)\\ \theta_t=-2J_\delta+\varepsilon\Gamma(J_\delta+\omega^2)^{-1/2}\sin\theta+\tilde{N}_2(J_\delta,\theta,u_\delta,\varepsilon)\\ u_t=\tilde{L}_\varepsilon u+[\tilde{V}_\varepsilon u_\delta+\tilde{N}_3(J_\delta,\theta,u_\delta,\varepsilon)]\end{cases}\tag{8.4.23}$$

对任意变量 $s, s_\delta=s\psi(s/\delta)$。

方程(8.4.23)有 $O(\varepsilon+\delta)$阶整体 Lipschitz 常数。用变量 $v=(v_u,v_s,v_0)^{\mathrm{T}}$ 和算子 A,方程组(8.4.23)写为

$$\begin{cases}v_{u,t}=\lambda_1^+v_u+R_s^\delta(v,\varepsilon)\\ v_{s,t}=\lambda_1^-v_s+R_s^\delta(v,\varepsilon)\\ v_{c,t}=Av_c+R_c^\delta(v,\varepsilon)\end{cases}\tag{8.3.24}$$

其中 $R^\delta(v,\varepsilon)$的一阶微分是 $O(\delta+\varepsilon)$阶的。

定理 8.4.2 存在 C_ω 的一个 δ 邻域 U_δ,存在一个 $\varepsilon_0(\delta)>0$ 和一个整数 $l>3$,使得 $\forall\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$,方程(8.4.18)在 U_δ 中有余维数为 1 的局部不变流形:

$$W_\varepsilon^{cs}=\{v\in H^1\mid v_u=h_u(v_s,v_c;\varepsilon)\}\tag{8.4.25}$$

其中,函数 h_u 关于其所有标量是 C^l 的,关于 θ 是 2π 周期的。进而,当 $\varepsilon=0$ 时,W_0^{cs} 沿 C_ω 与 E^{cs}切向相交。

$$W_\varepsilon^{cu}=\{v\in H^1\mid v_s=h_s(v_u,v_c;\varepsilon)\}\tag{8.4.26}$$

其中,函数 h_s 关于其所有标量是 C^l 的,关于 θ 是 2π 周期的。进而,当 $\varepsilon=0$ 时,W_0^{cu} 沿 C_ω 与 E^{cu}切向相交。

推论 8.4.3 设 $M_\varepsilon=W_\varepsilon^{cs}\cap W_\varepsilon^{cu}$,则 M_ε 是方程(8.4.18)在 U_δ 中余维数为 2 的局部不变流形,且

$$M_\varepsilon=\{v\in H^1\mid v_u=h_u^c(v_c;\varepsilon),v_s=h_s^c(v_c;\varepsilon)\}\tag{8.4.27}$$

其中,函数 h_u^c,h_s^c 关于其所有标量是 C^l 的,关于 θ 是 2π 周期的。当 $\varepsilon=0$ 时,M 沿 C_ω 与 E^c切向相交。

定理 8.4.2 及推论 8.4.3 的证明是将方程(8.4.24)化为积分方程,然后应用不动点原理。参考文献[2],由于方法是标准的,在此略去。

附注:在 M_ε 上的流,由下面方程给出:

$$\begin{cases}J_t=-2\varepsilon[\alpha(J_\delta+\omega^2)+\Gamma\sqrt{J_\delta+\omega^2}\cos\theta]+\\ \qquad \bar{N}_1(J_\delta,\theta,v_{0\delta};\varepsilon)\\ \theta_t=-2J_\delta+\varepsilon\Gamma(J_\delta+\omega^2)^{-1/2}\sin\theta+\bar{N}_2(J_\delta,\theta,v_{0\delta};\varepsilon)\\ v_{0t}=\tilde{L}_\varepsilon v_0+[\tilde{V}_\varepsilon v_{0\delta}+\bar{N}_3(J_\delta,\theta,v_{0\delta},\varepsilon)]\end{cases}\tag{8.4.28}$$

其中,$\bar{N}$ 是 $\tilde{N}$ 通过 h_u^c,h_s^c 在 M_ε 上的限制。

不变流形 W_ε^{cu} 的纤维表示由下面定理给出。

定理 8.4.4 $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, C^l 流形 W_ε^{cu} 充许一个 C^{l-2}坐标系统

$$v_u=\xi_u,\quad \xi\in(-\xi_0,\xi_0)$$
$$v_c=f^u(\xi_u,\xi_c;\varepsilon),\quad \xi_u\in E^c$$

使得 W_ε^{cu} 的子流形 M_ε 对应于 $\xi_u=0$,且在 W_ε^{cu} 上的流有下面不耦合形式:

$$\xi_{u,t}=[\lambda_1^++\Lambda^\delta(\xi_u,\xi_c;\varepsilon)]\xi_u$$
$$\xi_{c,t}=A\xi_c+S_c^\delta(\xi_c;\varepsilon)$$

其中 $\xi_u,\xi_c,\Lambda^\delta,S^\delta$ 的一阶导数是 $O(\varepsilon+\delta)$阶的。

纤维定理的证明可参考文献[2,5]。

·在流形 M_ε 上 Q 点的稳定流形

对 $\alpha<\dfrac{\Gamma}{\omega}$,点 Q 是方程(8.4.1)的不动点,在(J,θ,u)坐标下

表为

$$J_q = -\frac{\varepsilon}{2\Gamma\omega}\sqrt{\Gamma^2 - \alpha^2\omega^2} + O(\varepsilon^2)$$

$$\theta_q = \arctan\frac{\sqrt{\Gamma^2 - \alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} - \pi + O(\varepsilon)$$

$$u = 0$$

由方程(8.4.23)在 Q 点处线性化,我们可知点 Q 是全空间中鞍点,有二维不稳定流形 $W^u(Q)$ 和余维数为 2 的稳定流形 $W^s(Q)$。$W^u(Q)$沿曲线 C_ε^u 与常数平面 Π_c 相交,沿 v_u 切向与 W_ε^{cu} 相交。$W^s(Q)$沿曲线 C_ε^s 与平面 Π_c 相交,其交是 M_ε 的余维数为 1 的子流形。

下面我们要估计 $W = W^s(Q)\cap M_\varepsilon$ 的尺寸。

前面已经讨论过,在 Π_c 平面上 Q 点的稳定流形可参数化表示:

$$C_\varepsilon^s = \{y = (j,\theta) \mid y = y_*(s,v)\}$$

y_* 由方程(8.4.11)给出。用 $J = \nu j$ 代入方程(8.4.28),并利用式(8.4.11)有

$$\begin{cases} j_t = \nu Y_1(j,\theta,\nu) + \bar{N}_1(j,\theta,v_0;\nu) \\ \theta_t = \nu Y_2(j,\theta,\nu) + \bar{N}_2(j,\theta,v_0;\nu) \\ v_{ot} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + \tilde{V}_\varepsilon v_0 + \bar{N}_3(j,\theta,v_0;\nu) \end{cases} \tag{8.4.29}$$

在 C_ε^s 的一个邻域中,M_ε 上的流在坐标(m,η)下变为

$$\begin{cases} m_t = \nu a(\eta,\nu)m + O(\nu m^2 + v_0^2) \\ \eta_t = \nu\lambda\eta + \nu c(\eta,\nu)m + O(\nu m^2 + v_0^2) \\ v_{ot} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + \tilde{V}_\varepsilon v_0 + O(\nu m^2 + v_0^3 + \nu m v_0) \end{cases} \tag{8.4.30}$$

其中 a 和 c 是关于 η,ν 光滑的函数。

设
$$r = \eta - \eta_*(t,\nu)$$

其中 $\eta_*(t,\nu) = \eta_0\exp(\nu\lambda t),\qquad 0\leqslant\eta_0\leqslant s_0, t\geqslant 0$

方程(8.4.29)可写为

$$\begin{cases} m_t = \nu a_*(t,\nu,\eta_0)m + \bar{N}_{*1}(t,m,r,v_0,\nu) \\ r_t = \nu\lambda r + \nu c_*(t,\nu,\eta_0)r + \bar{N}_{*2}(t,m,r,v_0,\nu) \\ v_{ot} = \tilde{L}_\varepsilon v_0 + V_*(t,\nu,\eta_0)v_0 + \bar{N}_{*3}(t,m,r,v_0,\nu) \end{cases} \tag{8.4.31}$$

其中 $V_* = -4\nu j_*(s,\nu)S + \dfrac{\nu^2\Gamma\sin(\theta_*(s,\nu))}{\sqrt{\omega^2 + \nu j_*(s,\nu)}}\tilde{J} - \nu j_*(s;\nu)P$

$$\bar{N}_{*1} = O(\nu m^2 + \nu r^2 + m v_0^2)$$

$$\bar{N}_{*2} = O(\nu m^2 + \nu r^2 + v_0^2)$$

$$\bar{N}_{*3} = O(\nu m^2 + \nu r^2 + \nu v_0^2 + v_0^3)$$

·方程(8.4.31)线性流的估计

容易看出,方程(8.4.31)的线性部分是由一常微方程和一偏微方程耦合而成。

首先,我们估计常微方程,其基解由 2×2 矩阵给出

$$\begin{bmatrix} A_*(t,s,\eta_0,\nu) & 0 \\ \Gamma_*(t,s,\eta_0,\nu) & \exp(\nu\lambda(t-s)) \end{bmatrix}$$

其中
$$A_*(t,s,\eta_0,\nu) = \exp\left(\int_s^t \nu a_*\,\mathrm{d}s'\right)$$

$$\Gamma_*(t,s,\eta_0,\nu) = \nu\int_s^t \exp[\nu\lambda(t-s')]c_*(s')A_*(s',s)\mathrm{d}s'$$

注意到 $a_* = \nu + \hat{a}, |\hat{a}| \leqslant C\eta_0\exp(\nu\lambda t) \leqslant Cs_0\exp(\nu\lambda t)$

μ 由式(8.4.10)给出。这意味着 A_*有如下估计,对 $t,s\geqslant 0$,有

$$C_1\exp[\nu\mu(t-s)] \leqslant A_* \leqslant C_2\exp[\nu\mu(t-s)]$$

其中 C_1, C_2 是不依赖于 ε 的常数。

由于$|C_*| \leqslant Cs_0\exp[2\nu\lambda t]$,于是

$$|\Gamma_*| \leqslant C\nu\left|\int_s^t \exp(\nu[\lambda(t-s') + 2\lambda s' + \mu(s'-s)])\mathrm{d}s'\right|$$

C 是独立于 ε 的常数。

其次,估计偏微分方程。记 $\mathscr{L}(k) = \boldsymbol{L}_\varepsilon + V_*$,则 $\mathscr{L}(k)$ 的

Fourier 系数由下面矩阵给出

$$A=\begin{bmatrix} -\varepsilon(\beta k^2+\alpha) & -3k(\omega^2+J) & -k^2+p & 0 \\ 3k(\omega^2+J_*) & -\varepsilon(\beta k^2+\alpha) & 0 & -k^2+p \\ k^2-4\omega^2-4J_*-p & 0 & -\varepsilon(\beta k^2+\alpha) & -k(\omega^2+J_*) \\ 0 & k^2-4\omega^2-4J_*-p & k(\omega^2+J_*) & -\varepsilon(\beta k^2+\alpha) \end{bmatrix}$$

其中 $p=\dfrac{\varepsilon\Gamma\sin\theta_*}{\sqrt{J_*+\omega^2}}$，$J_*=\nu j_*$ 是 $\exp[\nu\lambda t]$ 和 ν 的光滑函数，$k=2,3,\cdots$。算子 $\mathscr{L}(k)$ 的特征值为

$$\lambda_{1,2}=-\varepsilon(\beta k^2+\alpha)\pm D_1$$

$$\lambda_{3,4}=-\varepsilon(\beta k^2+\alpha)\pm iD_2$$

其中，$D_1=\sqrt{(5a_*+b_*)-2\sqrt{4a_*^2+a_*b_*}}$，$D_2=\sqrt{(5a_*+b_*)+2\sqrt{4a_*^2+a_*b_*}}$，这里 $a_*=k^2(\nu j_*+\omega^2)$，$b_*=(k^2-p)(p-k^2+4\omega^2+4\nu j_*)$。

我们假设 $\varepsilon>0$ 充分小，使得 $D_i(k)>0(i=1,2)$，则 $\mathscr{L}(k)$ 能用矩阵 $U(k)$ 对角化，$U^{-1}AU=\Lambda$，Λ 为对角线上元素为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 的对角阵。

注意到 U 是空间 $[\mathrm{span}\{\Pi_c,e_s,e_u\}]^\perp$ 中的一有界算子，如果 $v_0\to w$，$\hat{v}_0=U(k)\hat{w}(k)$，则有

$$\hat{w}_t=\Lambda\hat{w}(k)-U^{-1}U_t\hat{w}(k) \tag{8.4.32}$$

且 $U^{-1}U_t$ 有界

$$|U^{-1}U_t|\leqslant\frac{C}{k^2}\varepsilon\exp[\nu\lambda t]\qquad(C\text{ 与 }\varepsilon\text{ 和 }k\text{ 无关})$$

对方程(8.4.32)积分

$$\hat{w}(k)=F(t,s;k)\hat{w}_0(k)-\int_s^t F(t,s';k)U^{-1}U_t\hat{w}(k)\mathrm{d}s'$$

$$F(t,s;k)=\exp\int_s^t\Lambda(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad t\geqslant s\geqslant 0$$

$$|F(t,s;k)|\leqslant C\exp[-\varepsilon(\beta k^2+\alpha)(t-s)]$$

进而，我们有

$$|\hat{w}(k)|\leqslant C\exp[-\varepsilon(\beta k^2+\alpha)(t-s)]|\hat{w}_0(k)|+$$

$$C\int_s^t\frac{\varepsilon}{k^2}\exp[-\varepsilon(\beta k^2+\alpha)(t-s')\exp(\nu\lambda s')]|\hat{w}(k)|\mathrm{d}s'$$

由于 $\lambda<0$，这意味着，对 $t\geqslant s\geqslant 0$，有

$$|\hat{w}(k)|\leqslant C\exp[-\varepsilon(\beta k^2+\alpha)(t-s)]|\hat{w}_0(k)|+$$

$$C\int_s^t\varepsilon|\hat{w}(k)|\mathrm{d}s'$$

由 Gronwall's 不等式，有

$$|\hat{w}(k)|\leqslant C\exp[-\varepsilon(\beta k^2+\alpha)(t-s)]|\hat{w}_0(k)|$$

最后，如果用 $U(t,s)$ 表示偏微分方程的基解，则有估计：

$$\|U(t,s)v_{io}\|_{H^1}\leqslant C\exp[-\varepsilon\alpha(t-s)]\|v_{io}\|_{H^1}$$

定理 8.4.5 点 Q 存在在 M_ε 中的 C^1 局部稳定流形能由 (η,v_{io}) 参数化：$\forall\,\eta\in[0,s_0]$

$$W=\{(m,\eta,v_{io}\mid m=f(\eta,v_{io})\}$$

且 $\|v_{io}\|_{H^1}\in[0,\varepsilon^{3/4}]$。进而 $f(\eta,0)=0$，$|m|\leqslant C\varepsilon$。

定理的证明类似于文献[2]中定理 5.5。

8.4.5 同宿轨道

1. 无扰动系统的同宿轨道

当 $\varepsilon=0$ 时，无扰动 DNLS 方程是空间 $H^1_{e,p}$ 上的 Hamilton 系统

$$-iq_t=DH_0 \tag{8.4.33}$$

其中

$$DH_0=-q_{xx}+i(|q|^2q)_x-2(|q|^2-\omega^2)q \tag{8.4.34}$$

式(8.4.33)是一个完全可积系统，它具有 Lax 对

$$\begin{cases}\phi_x = U(q,\bar{q},\lambda)\phi \\ \phi_t = V(q,\bar{q},\lambda)\phi\end{cases} \tag{8.4.35}$$

其中 $U = \begin{bmatrix} \lambda & q \\ i\bar{q}\lambda - \bar{q} & -\lambda \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} v_1 & -2iq\lambda - v_2 \\ (2\bar{q}\lambda^2 + v_3\lambda + \bar{v}_2) & -v_1 \end{bmatrix}$

$v_1 = -2i\lambda^2 - |q|^2\lambda - i|q|^2 + i\omega^2$

$v_2 = iq_x + |q|^2 q$

$v_3 = -\bar{q}_x - i|q|^2\bar{q} + 2i\bar{q}$

上面待定系统相容($\partial_t\phi_x = \partial_x\phi_t$),当且仅当系数 q 满足无扰动 DNLS 方程,因此,能用线性系统式(8.4.35)来获得无扰动 DNLS 方程的解 $q(x,t)$。

设 $q_0(t) = re^{-i\theta} = r\exp\{-i[2(r^2-\omega^2)t-\gamma]\}$,是无扰动 DNLS 方程空间一致的周期解,其中 r 和 γ 是任意实常数。

式(8.4.35)的两个线性无关解为

$$\begin{bmatrix}\psi_1^{\pm}(q_0,\lambda) \\ \psi_2^{\pm}(q_0,\lambda)\end{bmatrix} = e^{A_\pm(\lambda)x + B_\pm(\lambda)t}\begin{bmatrix} re^{-\frac{1}{2}i\theta} \\ \Pi_\pm(\lambda)e^{\frac{1}{2}i\theta}\end{bmatrix} \tag{8.4.36}$$

其中

$\Pi_\pm(\lambda) = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - (1-i\lambda)r^2}$

$A_\pm(\lambda) = \Pi_\pm(\lambda) + \lambda = \pm\sqrt{\lambda^2-(1-i\lambda)r^2}$

$B_\pm(\lambda) = (-2i\lambda - r^2)(\Pi_\pm(\lambda)+\lambda) =$

$\qquad \mp(2i\lambda + r^2)\sqrt{\lambda^2 - (1-i\lambda)r^2}$

设 $\psi(q_0,\lambda) = (\psi_1(q_0,\lambda), \psi_2(q_0,\lambda))^{\mathrm{T}} = C_+\psi^+(q_0,\lambda) + C_-\psi^-(q_0,\lambda)$,其中 C_+, C_- 是任意常数。取特征值 $\lambda = -i\sigma$(σ 为非零实数),且 $\sigma - 1 > 0$。

用 Darboux 变换,我们得到方程(8.4.33)的一个解:

$$\tilde{q} = \frac{(\psi_2(q_0,\lambda))^2}{(\sigma-1)|\psi_1(q_0,\lambda)|^2}q_0e^{i\eta} + \frac{2\lambda\bar{\psi}_2(q_0,\lambda)}{(\sigma-1)(\bar{\psi}_1(q_0,\lambda))} \cdot \exp[i\eta] \quad (\eta \text{ 为任意实数}) \tag{8.4.37}$$

其中 $\psi_1(q_0,\lambda) = r[C_+\exp[\rho x - (2\sigma + r^2)\rho t] + C_-\exp[-\rho x + (2\sigma + r^2)\rho t]\exp[-\frac{1}{2}i\theta]$;

$\psi_2(q_0,\lambda) = r\{C_+\Pi_+(\lambda)\exp[\rho x - (2\sigma + r^2)\rho t] + C_-\Pi_-(\lambda)\exp[-\rho x + (2\sigma + r^2)\rho t]\}\exp[\frac{1}{2}i\theta]$

取 $\rho = (\lambda^2 - (1-i\lambda)r^2)^{1/2} = (-\sigma^2 + (\sigma-1)r^2)^{1/2}$

$C_+ = \left[\frac{r(-i\sigma+\rho)}{\sqrt{\sigma-1}}\right]^{1/2}$, $\quad C_- = \left[\frac{r(-i\sigma-\rho)}{\sqrt{\sigma-1}}\right]^{1/2}$

$\eta = -\pi + 2p$

用式(8.4.37)通过直接计算,就获得无扰动系统(8.4.33)同宿到 q_0 的同宿轨道

$$q_h^{\pm}(t) = [\cos(\pi+2p) + i\sin(\pi+2p)\tanh 2\tau \mp \cos(\pi + 2p)\mathrm{sech}2\tau]/[1 \pm \cos(\pi+2p)\mathrm{sech}2\tau] \tag{8.4.38}$$

其中 $\tau = \rho x - (2\sigma + r^2)\rho t$, $p = \arctan\frac{\sigma}{\rho}$, $\sigma \in R^+$

易看出,当 $t \to \pm\infty$ 时,$q_h^{\pm}(t) \to q_0(t)$。

2. 扰动系统 DNLS 的同宿轨道

方程(8.4.1)写为下列形式

$$q_t = iDH_0 + \varepsilon G(q) \tag{8.4.39}$$

其中,H_0 是无扰动系统的 Hamilton 量,且有

$DH_0 = -q_{xx} + i(|q|^2q)_x - 2(|q|^2 - \omega^2)q$

$G(q) = \beta q_{xx} - \alpha q - \Gamma$

为了用无扰动系统的同宿轨去构造扰动系统的同宿轨道,我们需引进两个测度:

·第一测度

由于 $W^u(Q)$ 是 $W_\varepsilon^{cu}(Q)$ 的子流形,它继承 C_ε^u 上的纤维表示

$$W^u(Q) = \bigcup_{q_b \in C_\varepsilon^u}\{F_{q_b}^u(\cdot;\varepsilon)\}$$

其中，$F^u_{q_b}(\cdot;\varepsilon)$表示基点是 q_b 的不稳定纤维。我们固定基点 q_b（对应幅角 θ_b）在曲线 C^u_ε 上，在 q_b 点引出两条纤维：扰动纤维 $F^u_{q_b}(\cdot;\varepsilon)$，无扰动纤维 $F^u_{q_b}(\cdot;0)$。取定两纤维间的距离 $\delta>0$ 适当小，定义 $q_h(0)=F^u_{q_b}(\delta,0)$和 $q_\varepsilon(0)=F^u_{q_b}(\delta,\varepsilon)$为无扰动和扰动纤维的"脱离"点。$q_h(0)$，$q_\varepsilon(0)$都是点 $q_b(\theta_b)$的函数。

考虑初始点在"脱离"点的两轨道 $q_h(t)$和 $q_\varepsilon(t)$，$q_h(t)$是无扰动系统的同宿轨道，它一定渐近到平面 Π_c（当 $t\to+\infty$）。我们的目标是如何选择 θ_b，使 $q_\varepsilon(t)\to M_\varepsilon(t\to+\infty)$？为此，定义"着陆"点

$$q_m = q_h(T_*)$$
$$q_l = q_\varepsilon(T_*)$$

由于 $q_h(t)$是无扰动系统的同宿轨道，所以存在 $T_*(\delta)$，使 $\mathrm{dist}(q_h(t),C_\omega)\leqslant\delta,(t\geqslant T_*)$，即保证了 T_*的存在。据有限时间的扰动原理，q_l 与 q_m 是 $O(\varepsilon)$阶逼近的。流形 $W^{cs}_\varepsilon(Q)$是余维数为 1 且 $O(\varepsilon)$阶逼近 $W^{cs}_0(\omega e^{-i\theta})$。我们定义

$$\Delta \equiv \langle DH_0(q_m), q_l - q_s\rangle$$

为 q_l 与 q_s 之间的一个距离测度，其中 q_s 表示过点 q_l，沿 W^{cs}_0 上 q_m 点的法向的直线与 W^{cs}_ε 的交点。

我们定义 $t\leqslant 0$ 的轨道

$$\left.\begin{aligned} q_*(t) &= q_h(t+T_*),\\ q_u(t) &= q_\varepsilon(t+T_*),\end{aligned}\right\} t\leqslant 0$$

当 $t\geqslant 0$ 时，设 $q_s(t)$为扰动系统具有初值为 q_s 的解，并扩充 $q_*(t)$的定义到 $t\in R$，这允许我们引进距离函数

$$\Delta^-(t) \equiv \langle DH_0(q_*(t)), q_u(t)-q_*(t)\rangle, \quad t\leqslant 0$$

$$\Delta^+(t) \equiv \langle DH_0(q_*(t)), q_s(t)-q_*(t)\rangle, \quad t\geqslant 0$$

$$\Delta = \Delta^-(0) - \Delta^+(0)$$

命题 8.4.6 距离 Δ 由下式给出

$$\Delta = \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\langle DH_0(q_*(t)), G(q_*(t))\rangle \mathrm{d}t + O(\varepsilon^2)$$

若用 q_ω 表同宿到 C_ω 的同宿轨道，则 q_ω 是$\sqrt{\varepsilon}$阶逼近同宿轨道 $q_*(t)$，距离函数 Δ 有下列关于ε 的展开式。

推论 8.4.7 距离 Δ 关于ε 的展式为

$$\Delta = \varepsilon M(\alpha,\beta,\Gamma,\theta_b) + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$M(\alpha,\beta,\Gamma,\theta_b) = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle DH_0(q_*(t)), G(q_*(t))\rangle \mathrm{d}t =$$

$$-[\alpha M_\alpha + \beta M_\beta + \Gamma M_0]$$

$$M_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle DH_0(q_*(t)), q_*(t)\rangle \mathrm{d}t =$$

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} i\partial_t q_h(t,\theta)\bar{q}_h(t,\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$\omega^2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} i\partial_t q_\omega(t)\bar{q}_\omega(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$M_\beta = \omega^2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} i\partial_{tx}q_\omega(t)\partial_x\bar{q}_\omega(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$M_0 = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi\langle\partial_t q_h(t,\theta)\rangle \mathrm{d}t = 2\pi\omega(\sin\theta - \sin(\theta-4p_\omega))$$

其中 $q_\omega = \dfrac{1+i\cot p_\omega\tanh 2\tau \pm r\csc p_\omega\cos 2p_\omega\,\mathrm{sech}2\tau}{1+i\cot p_\omega\tanh 2\tau \mp r\csc p_\omega\,\mathrm{sech}2\tau}q_0(t)$

由上面推论，令 $\Delta=0$，寻找 $M(\alpha,\beta,\theta_b)$的非退化零点，然后用隐函数定理，选择参数 θ_b，使

$$q_l = q_s \in W^{cs}_\varepsilon$$

·第二测度

作为第一测度的结果，"脱离"角 θ_b 的选取，使 $q_l\in W^{cs}_\varepsilon$。因此，轨道 $q_\varepsilon(t)$渐近到 M_ε，但 $q_\varepsilon(t)$是否渐近到 $W^s(Q)(t\to+\infty)$还未知，为此，我们引进第二测度。

$W^s(Q)$是全空间的余维数为 2 的子流形，是 W^{cs}_ε 余维数为 1

的子流形，因此 $W^s(Q)$ 继承了 W_ε^{cs} 的纤维表示，设 $q_{o,b}$，$q_{l,b}$ 分别是无扰动与扰动时"着陆"点 q_m 与 q_l 所属稳定纤维的基点。即：

$$q_{o,b} \in \mathscr{F}_{q_{ob}}(\cdot;o)$$

$$q_{l,b} \in \mathscr{F}_{q_{lb}}(\cdot;\varepsilon)$$

已知 $q_{o,b} \in \Pi_c$，限制 $q_{l,b} \in M_\varepsilon$。由于纤维关于 ε 的光滑性，我们知道 $q_{l,b}$ 是 ε 阶逼近 $q_{o,b}$ 的，结果是否有 $q_{l,b} \in W = W^s(Q) \cap M_\varepsilon$，由下面测度决定。

命题 8.4.8 从"着陆"基点 $q_{l,b}$ 到稳定流形 W 的距离 d 能用"脱离"角 θ_b 的一个函数测量

$$d = \omega[2\Gamma\sin 2p_\omega\cos(\theta_b - 2p_\omega) + 4\alpha\omega p_\omega] + O(\sqrt{\varepsilon})$$

定义

$$\tilde{d} = 2\Gamma\sin 2p_\omega\cos(\theta_b - 2p_\omega) + 4\alpha\omega p_\omega$$

如果 $\tilde{d}$ 有一非退化零点，我们可选取参数，使 $d = 0$。

·同宿轨道的存在性

定理 8.4.9 假设参数 $(\omega,\alpha,\beta,\Gamma)$ 和 θ_b 满足下列条件：

(1) $\omega \in (0, \frac{1}{3}\sqrt{-6+3\sqrt{7}})$

(2) $\Gamma > \alpha\omega$

(3) $\cos(\theta_b - 2p_\omega) = \dfrac{-2\alpha\omega p_\omega}{\Gamma\sin 2p_\omega}$，　　$\theta_b \in (\theta_{\min}, \theta_0)$

其中　$\theta_0 = \arctan\dfrac{\sqrt{\Gamma^2 - \alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} - \pi$

$$\sin\theta_{\min} + \frac{\alpha}{\Gamma}\omega\theta_{\min} = \sin\theta_0 + \frac{\alpha}{\Gamma}\omega\theta_0, \quad \theta_{\min} < \theta_0$$

(4) $\forall\, M_\alpha, M_\beta, M_0$ 非零

$$\alpha M_\alpha + \beta M_\beta - \Gamma M_0 = 0$$

则对一个小的 ε，方程(8.4.1)有同宿轨道对称对。

证明：我们固定参数 $(\omega,\alpha,\beta,\Gamma)$ 满足条件(1)～条件(3)，且设 $M_\beta \neq 0$，考虑 $M(\alpha,\beta,\Gamma,\theta_b)$ 和 $\tilde{d}$ 作为 θ_b 和 β 的函数

$$-M(\alpha,\beta,\Gamma) = \alpha M_\alpha + \beta M_\beta + \Gamma M_0$$

$$\tilde{d} = 2\Gamma\sin 2p_\omega\cos(\theta_b - 2p_\omega) + 4\alpha\omega p_\omega$$

为证 Q 点的同宿轨道存在，只需对 $\beta > 0$，$\theta_b \in (\theta_{\min}, \theta_0)$ 时，$M(\alpha,\beta,\Gamma,\theta_b)$ 和 $\tilde{d}$ 有非退化零点。如果 $M_\beta \neq 0$，我们能解 $\tilde{d} = 0$ 和 $M(\alpha,\beta,\Gamma,\theta_b) = 0$，在点

$$\cos(\theta_b - 2p_\omega) = \frac{-2\alpha}{\Gamma\sin 2p_\omega}$$

$$\beta = -\left[\alpha M_\alpha + \frac{2\alpha\omega p_\omega}{\sin 2p_\omega M_0}\right] / M_\beta$$

由于点 $q_{l,b}$ 在基点 $q_{l,b} \in W$ 的稳定纤维上，因而，轨道 $q_s(t)$ 当 $t \geq 0$ 留在 C_ω 的一个小邻域内。这表明 $q_s(t)$ 是初始方程的解。且轨道

$$q_\varepsilon(t) = \begin{cases} q_u(t), & t \leq 0 \\ q_s(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

同宿到 Q 点。由于无扰动方程有两同宿轨道 $q_h^\pm$，所以扰动系统有两对称的同宿轨道 $q_\varepsilon^\pm(t)$。

第九章　扰动非线性 Schrödinger 方程的同宿轨道

在第五章中，我们已经证明了具扰动的非线性 Schrödinger 方程

$$iq_t = q_{xx} + 2(|q|^2 - \omega^2)q + i\varepsilon(\boldsymbol{D}q - \Gamma)$$

同宿轨道的不变性，其中

$$\boldsymbol{D}q = -\alpha q - \beta \boldsymbol{B} q$$

这里 $\boldsymbol{B}$ 具有符号

$$b(k) = \begin{cases} k^2, & k < K \\ 0, & k \geq K \end{cases}$$

这一章，我们要研究的是

$$\boldsymbol{D}q = -\alpha q + \beta q_{xx}$$

其中 α,β 为正数。二者在定性上是有很大差别的，前者是有界算子，由此所确定的半群算子定义在一切 $t \in (-\infty,\infty)$ 上，而后者仅定义在 $t \geq 0$ 上，且只有在 $t>0$ 时的光滑性。前者所形成的半群对 ε 和 q 是光滑的，而后者形成的半群算子 $S_\varepsilon^t(q)$ 仅对 ε 是连续的且 $D_u S_\varepsilon^t$ 对 ε 不连续。因此，我们得采用更为细致的估计方法。在第五章中，我们使用了规范变换，而这里，我们采用与之不同的 Lyapunov 泛函方法，也得到了预期的结果。

9.1　主要定理和基本方程组的建立

现考虑如下扰动的非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t = u_{xx} + 2(|u|^2 - \omega^2)u + i\varepsilon(u_{xx} - \alpha u - \beta) \qquad (9.1.1)$$

其中 u 为 2π 周期函数且对 x 是偶的，常数 α,β,ω 满足 $\omega \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，$0<\alpha\omega<\beta$，$\varepsilon>0$ 为耗散参数。以下记 H^n 为偶的 2π 周期函数构成的 H^n 空间。方程(9.1.1)定义半流 $S_\varepsilon:[0,\infty)\times H^n \to H^n$，其中 $S_\varepsilon^t(u)$ 对所有变元是连续的。更进一步，对任何 $n \geq 1$，$S_\varepsilon^t \in C^2(H^n)$，这里的 ε, t 固定。因此，我们可把式(9.1.1)视为一个 H^n 的动力系统($\varepsilon \geq 0$)。我们的目的是要建立关于式(9.1.1)的不动点的非平凡同宿轨道的存在性($\varepsilon>0$)。

首先，注意到常值平面

$$\Pi_c = \{u(x) \mid u_x = 0\}$$

在(9.1.1)作用下是不变的。在 Π_c 上可将式(9.1.1)改写为

$$iu_t = 2(|u|^2 - \omega^2)u - i\varepsilon(\alpha u + \beta) \qquad (9.1.2)$$

记

$$u = \sqrt{J+\omega^2}\,e^{i\theta}$$

在此坐标下，式(9.1.2)具有形式

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \beta\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] \\ \theta_t = -2J + \dfrac{\varepsilon\beta}{\sqrt{J+\omega^2}}\sin\theta \end{cases} \qquad (9.1.3)$$

当 $\varepsilon=0$ 时，所有中心在原点的圆(除 $J=0$ 外)为周期轨道，而 $J=0$ 对应于不动点圆。当 $\varepsilon>0$ 时，在 Π_c 上的这些轨道发生了很大的变化。首先，仅存在三个不动点 O_ε、P_ε 和 Q_ε，其中 O_ε 是原点的变形，而 P_ε、Q_ε 则由 $J=0$ 对应的不动点圆变成。为了更好地观察这些扰动轨道在 $J=0$ 的邻域内的状态，引入

$$J = \nu j, \quad \tau = \nu t$$

这里 $\nu=\sqrt{\varepsilon}$，则式(9.1.3)化为

$$\begin{cases} j_\tau = -2[\alpha(\nu j+\omega^2)+\beta\sqrt{\nu j+\omega^2}\cos\theta] \\ \theta_\tau = -2j + \dfrac{\nu\beta}{\sqrt{\nu j+\omega^2}}\sin\theta \end{cases} \tag{9.1.4}$$

式(9.1.4)在 $\nu\to 0$ 时为

$$\begin{cases} j_\tau = -2(\alpha\omega^2+\beta\omega\cos\theta) \\ \theta_\tau = -2j \end{cases} \tag{9.1.5}$$

因 $\alpha\omega<\beta$,方程组(9.1.5)具有两个不动点,中心 P_0 具有坐标

$$\begin{cases} j = 0 \\ \hat{\theta} = \pi - \arctan\dfrac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} \end{cases} \tag{9.1.6}$$

和鞍点 Q_0 坐标

$$\begin{cases} j = 0 \\ \theta_0 = \pi + \arctan\dfrac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega} \end{cases} \tag{9.1.7}$$

鞍点 Q_0 具有特征值

$$\lambda_0^\pm = \pm 2\sqrt{\omega}(\beta^2-\alpha^2\omega^2)^{1/4} \tag{9.1.8}$$

当 $\nu>0$ 时,鞍点 Q_0 对于方程(9.1.4)是不变的,$Q_\varepsilon=(j_\varepsilon,\theta_\varepsilon)=Q_0+O(\nu)$,具有特征值 $\lambda_\varepsilon^\pm=\lambda_0^\pm+O(\nu)$。这里的鞍点 Q_ε 对应于方程(9.1.1)的鞍点(限制在不变平面 Π_c 上)。我们将证明以下主要定理。

定理 对任何 $\varepsilon>0$,ω、$\alpha>0$ 在某个区间内变化,则存在 $\beta(\epsilon,\alpha)$使得方程(1.1)具有同宿于 Q_ε 的同宿轨道。

对于常值平面 Π_c 上的解,当 $\varepsilon=0$ 时,方程(9.1.5)具有首次积分

$$E(j,\theta) = \frac{1}{2}j^2 - \omega(\beta\sin\theta+\alpha\omega\theta) \tag{9.1.9}$$

因此,Q_0 的不稳定曲线与稳定曲线一致,是与 Q_0 连结的水平集 $E(j,\theta)=E(Q_0)$的一部分,即曲线

$$\frac{1}{2}j^2 = \omega[\alpha\omega(\theta-\theta_0)+\beta(\sin\theta-\sin\theta_0)]$$

这条曲线与 $j=0$ 轴的另一交点是$(0,\tilde{\theta})$,这里 $\tilde{\theta}\in(\theta_0-2\pi,\hat{\theta})$满足

$$\alpha\omega(\tilde{\theta}-\theta_0)+\beta(\sin\tilde{\theta}-\sin\theta_0) = 0$$

于是,存在两个函数 $\phi_\nu^u,\phi_\nu^s:[\tilde{\theta}+\delta,\infty)\to R$,其中 $\delta>0$ 为任意小的不依赖于 ε 的常数,使得 ϕ_ν^u,ϕ_ν^s 的图 P_ε^u 和 P_ε^s 分别为 Q_ε 的不稳定曲线与稳定曲线的子集。进一步,有

$$\phi_0^u(\theta) = -\frac{\theta-\theta_0}{|\theta-\theta_0|}\{2\omega[\alpha\omega(\theta-\theta_0)+ \beta(\sin\theta-\sin\theta_0)]\}^{1/2} \tag{9.1.10}$$

$$\phi_0^s(\theta) = \frac{\theta-\theta_0}{|\theta-\theta_0|}\{2\omega[\alpha\omega(\theta-\theta_0)+ \beta(\sin\theta-\sin\theta_0)]\}^{1/2} \tag{9.1.11}$$

且 ϕ_ν^u,ϕ_ν^s 关于θ,ν 是光滑的。同时,对于 $\theta_1\in(\hat{\theta},\theta_0)$,$\theta_2\in(\theta_0,\hat{\theta}+2\pi)$有$(\phi_\nu^s)'>0$,$(\phi_\nu^u)'<0$,这里 $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$。今后,我们设 ϕ_ν^u 和 ϕ_ν^s 均在区间$[\theta_1,\theta_2]$上。

对于方程(9.1.1),我们讨论在不动点圆 C_ω 邻域内的解,令

$$\begin{aligned} u(x) &= (\rho+f(x))e^{i\theta} \\ J &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u|^2dx - \omega^2 = \rho^2+\langle f\bar{f}\rangle-\omega^2 \end{aligned} \tag{9.1.12}$$

其中 ρ 为正实数,且

$$\langle f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx = 0$$

注意在常值平面 Π_c 上,J 和前面的定义是一致的。用(J,θ,f)坐标表示函数 u,方程(9.1.1)具有形式

$$\begin{cases} J_t = -2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \beta\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] + \varepsilon Q_1(f,J,\theta) \\ \theta_t = -2J + \varepsilon\beta\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}} + Q_2(f,J,\theta) \\ f_t = L_\varepsilon f + V_\varepsilon(J,\theta)f - iQ_3(f,J,\theta) - iQ_4(f,J,\theta) \end{cases} \tag{9.1.13}$$

其中

$$L_\varepsilon f = -if_{xx} + \varepsilon(-\alpha f + f_{xx}) - 2i\omega^2(f+\bar f) \tag{9.1.14}$$

$$V_\varepsilon(J,\theta)f = -2iJ(f+\bar f) - i\frac{\varepsilon\beta\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}}f \tag{9.1.15}$$

$$Q_1(f,J,\theta) = -2\langle f_x, \bar f_x\rangle - 2\beta\cos\theta\left(\sqrt{J+\omega^2-\langle f\bar f\rangle} - \sqrt{J+\omega^2}\right) = O(|f|^2) \tag{9.1.16}$$

$$Q_2(f,J,\theta) = -\langle (f+\bar f)^2\rangle - \frac{\langle f\bar f(f+\bar f)\rangle}{\rho} + \varepsilon\beta\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{J+\omega^2-\langle f\bar f\rangle}} - \frac{1}{\sqrt{J+\omega^2}}\right) = O(|f|^2) \tag{9.1.17}$$

$$Q_3(f,J,\theta) = \rho[4(f\bar f - \langle f\bar f\rangle) + 2(f^2 - \langle f^2\rangle)] = O(|f|^2) \tag{9.1.18}$$

$$Q_4(f,J,\theta) = -\langle f^2+\bar f^2+6f\bar f\rangle f + 2(f\bar f f - \langle f\bar f f\rangle) - \frac{1}{\rho}\langle f\bar f(f+f)\rangle f - 2\langle f\bar f\rangle\bar f + \varepsilon\beta\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{J+\omega^2-\langle f\bar f\rangle}} - \frac{1}{\sqrt{J+\omega^2}}\right)f = O(|f|^3) \tag{9.1.19}$$

用$|\cdot|$或$|\cdot|_1$表示 H^1 模,上述估计在$|J|,|f|^2 < \frac{1}{4}\omega^2$ 时成立,且 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 对它们的变元是光滑的。方程组(9.1.13)是下面我们所讨论的基本方程组。

9.2 不变流形和不变叶片

常值平面 Π_c 在式(9.1.1)下是不变的,它的 H^1 中的正交补空间

$$\{u \in H^1 \mid \langle u\rangle = 0\}$$

关于式(9.1.1)沿着 Π_c 中任何解的线性化方程是不变的。我们首先研究沿着不动点圆 C_ω 的线性化方程。

考虑式(9.1.13)关于 f 方程中的线性算子 L_ε 的谱,L_ε 的特征值为

$$\lambda_k^\pm = -\varepsilon(\alpha+k^2) \pm k\sqrt{4\omega^2-k^2}, \quad k=1,2,\cdots, \tag{9.2.1}$$

因为 $\omega\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,则 $\lambda_1^\pm$ 是实的,$\lambda_k^\pm(k>1)$是复的。令

$$\sigma = \sqrt{4\omega^2-1}$$

则

$$\lambda_1^\pm = \pm\sigma - \varepsilon(\alpha+1)$$

正特征值 λ_1^+ 表示线性化方程具有强指数增长率 σ,而 λ_1^- 表示强指数衰减率 σ,它们有特征函数

$$e^\pm(x) = \frac{1\pm i\sigma}{2\sqrt{\pi\omega}}\cos x$$

这些特征函数近似于沿靠近 C_ω 的任何轨线的强稳定和不稳定方向。对任何 $k>1$,复数对 $\lambda_k^\pm$ 的特征空间是 $E_k = \mathrm{span}\{\cos kx\}\subset H^1$,它是复二维的。当 $\varepsilon=0$ 时,$\lambda_k^\pm$ 为纯虚数,它们表示具不同频率的振荡。当 $\varepsilon>0$ 时,一切 $\lambda_k^\pm(k>1)$具有负实部,它们提供了具有从 $O(\varepsilon)$到∞的指数衰减率的线性稳定性,这里的扰动是无界的。

基于 L_ε 特征值的贡献,我们可以构造 C_ω 的余维 1 的局部中心稳定流形和通过 Π_c 里 C_ω 的一个邻域内的点参数化的一维不稳

定纤维。

我们指出,扰动方程组(9.1.1)形成的半流不是未扰动方程的 C^1 扰动,这是由于这里的扰动是无界的。

记 $u(x)=(\rho+f(x))e^{i\theta}$,令 $f(x)=\gamma^+e^+(x)+\gamma^-e^-(x)+h(x)$,其中 $\gamma^\pm$ 为实数,$e^\pm(x)$ 为 $\lambda_1^\pm$ 的特征函数,$\langle h(x)\rangle=\langle h(x)\cos x\rangle=0$。由方程组(9.1.13)得

$$h_t = L_\varepsilon h + V(J,\theta)h - iQ_{3*} - iQ_{4*} \tag{9.2.2}$$

$$\gamma_t^+ = \sigma\gamma^+ - \varepsilon(\alpha+1)\gamma^+ + \frac{2}{\sigma}J(\gamma^+ + \gamma^-) - \frac{\varepsilon\beta\sin\theta}{2\sigma\sqrt{J+\omega^2}}\cdot$$
$$[(\sigma^2-1)\gamma^+ - (\sigma^2+1)\gamma^-] - Q_{3,1}^+ - Q_{4,1}^+ \tag{9.2.3}$$

$$\gamma_t^- = -\sigma\gamma^- - \varepsilon(\alpha+1)\gamma^- - \frac{2}{\sigma}J(\gamma^+ + \gamma^-) - \frac{\varepsilon\beta\sin\theta}{2\sigma\sqrt{J+\omega^2}}\cdot$$
$$[(\sigma^2+1)\gamma^+ - (\sigma^2-1)\gamma^-] - Q_{3,1}^- - Q_{4,1}^- \tag{9.2.4}$$

其中 $Q_{3,1}^+$、$Q_{4,1}^+$、$Q_{3,1}^-$、$Q_{4,1}^-$、Q_{3*} 和 Q_{4*} 为 Q_3、Q_4 分别到相应子空间的投影,它们具有类似于 Q_3 和 Q_4 的估计。我们经常用 $(J,\theta,\gamma^+,\gamma^-,h)$ 作为函数 u 的坐标。

对 $\delta>0$,令

$$B_\Pi(\delta) = \{z=(J,\theta)\in\Pi_c, |J|\leqslant\delta\}$$

即 $B_\Pi(\delta)$ 为 C_ω 在 Π_c 中的一个 δ 邻域。处理 H^n 作为一个实 Hilbert 空间,设

$$E_n^{cs} = \{u=(J,\theta,\gamma^+,\gamma^-,h)\in H^n \mid \gamma^+=0\}$$

显然,E_n^{cs} 为 H^n 中余维 1 的闭子流形。

命题 9.2.1 对任何 $m\geqslant 1$,存在 $\varepsilon_0,\delta>0$,使得对任何 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ 和 $z\in B_\Pi(\delta)$,有一个映照 $g_\varepsilon^u(z,\cdot):[-\delta,\delta]\to E_m^{cs}$,且 $g_\varepsilon^u(z,s)$ 关于 z、α、β、ε 和 s 是 C^1 的。对于 $z=(J,\theta)\in B_\Pi(\delta)$,令

$$W_\varepsilon^{uu}(J,\theta) = \{(J,\theta,\gamma^+,0,0) + g_\varepsilon^u(J,\theta,\gamma^+) \mid \gamma^+\in[-\delta,\delta]\}$$

则映照 $g_\varepsilon^u(z)$ 满足:

(1) $\forall z\in B_\Pi(\delta)$,$g_\varepsilon^u(z,0)=0$,且对于 $z=(0,\theta)\in C_\omega$,$D_sg_0^u(0,\theta,0)=0$。

(2)设 $t>0$,z,$z_1=S_\varepsilon^t(z)\in B_\Pi(\delta)$,则有

$$S_\varepsilon^t:(S_\varepsilon^t)^{-1}(W_\varepsilon^{uu}(z_1))\cap W_\varepsilon^{uu}(z)\to W_\varepsilon^{uu}(z_1)$$

为一个微分同胚。

我们称 $W_\varepsilon^{uu}(z)$ 为具有基点 z 的不稳定纤维,(2)为不稳定纤维的局部不变性。因此,对任何 $z\in B_\Pi(\delta)$ 和 $\gamma^+\in[-\delta,\delta]$,当向后轨线 $\{z(t)\mid t\in[-T,0]\}\subset B_\Pi(\delta)$ 时,向后轨线 $S_\varepsilon^t(u)$ $(u=(z,\gamma^+,0,0)+g_\varepsilon^u(z,\gamma^+))$ 在 $t\in[-T,0]$ 上存在且满足 $S_\varepsilon^t(u)\in W_\varepsilon^{uu}(z(t))$。注意,虽然 S_ε^t 关于 ε 不是 C^1 的,但 $g_\varepsilon^u\in C^1(\varepsilon)$。

我们用 Lyapunov-Perron 方法证明命题 9.2.1,一个惟一的强不稳定叶片能够用一个外溢不变流形上的基点来构造。因此,我们首先截断方程组(9.1.13)而使 $B_\Pi(3\delta)$ 为截断方程组的外溢不变流形。

设 $\eta\in C^\infty(R,R)$ 满足 $\operatorname{supp}\eta\subset(-4,4)$,在 $(-2,2)$ 上,$\eta=0$;在 $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ 上,$\eta=1$;在 $\left(-\frac{7}{2},-\frac{5}{2}\right)$ 上,$\eta=-1$,并且 $|\eta'|<4$。让 $\eta_\delta=\eta(\cdot/\delta)$,对于小的常数 δ(待定),J 在式(9.1.13)的截断方程组中为

$$J_t = 5\varepsilon\beta\omega\eta_\delta(J) - 2\varepsilon[\alpha(J+\omega^2) + \beta\sqrt{J+\omega^2}\cos\theta] +$$
$$\varepsilon Q_1(f,J,\theta) \tag{9.2.5}$$

注意到 $B_\Pi(3\delta)$ 在截断方程组下是负不变的,它对于 $|J|\leqslant 2\delta$ 是不变的。

对任何 $(J_0,\theta_0)\in B_\Pi(3\delta)$,令 $(J_0(t),\theta_0(t))$ $(t\leqslant 0)$ 为截断方程组具初值 (J_0,θ_0) 的向后轨线,则对任何 $t\leqslant 0$,$(J_0(t),\theta_0(t))\in B_\Pi(3\delta)$。设 $(J_0(t)+J(t),\theta_0(t)+\theta(t),\gamma^+(t),\gamma^-(t),h(t))$ 为截断方程组的一个解,让

$$v^c = (J,\theta,\gamma^-,h),\ |v^c|_n = |J| + |\theta| + |\gamma^-| + |h|_{H^n}$$

则 $\gamma^+(t)$和 $v^c(t)$满足

$$\begin{cases} \gamma_t^+ = \sigma\gamma^+ + A^+(J_0(t),\theta_0(t),\gamma^+,v^c) \\ v_t^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_\varepsilon \end{pmatrix} v^c + A^c(J_0(t),\theta_0(t),\gamma^+,v^c) \end{cases} \tag{9.2.6}$$

这里 A^+和 $A^c = (A^J, A^\theta, A^-, A^h)$是剩余项,有

$$A^+ = -\varepsilon(\alpha+1)\gamma^+ + \frac{2}{\sigma}(J_0(t)+J)(\gamma^+ + \gamma^-) - \frac{\varepsilon\beta\sin(\theta_0(t)+\theta)}{2\sigma\sqrt{J_0(t)+J+\omega^2}}[(\sigma^2-1)\gamma^+ - (\sigma^2+1)\gamma^-] - Q_{3,1}^+ - Q_{4,1}^+ \tag{9.2.7}$$

$$A^J = 5\varepsilon\beta\omega[\eta_\delta(J_0(t)+J) - \eta_\delta(J_0(t))] - 2\varepsilon[\alpha J + \beta(\sqrt{J_0(t)+J+\omega^2}\cos(\theta_0(t)+\theta) - \sqrt{J_0(t)+\omega^2}\cos\theta_0(t))] + \varepsilon Q_1 \tag{9.2.8}$$

$$A^\theta = \varepsilon\beta\left[\frac{\sin(\theta_0(t)+\theta)}{\sqrt{J_0(t)+J+\omega^2}} - \frac{\sin\theta_0(t)}{\sqrt{J_0(t)+\omega^2}}\right] + Q_2 \tag{9.2.9}$$

$$A^- = -\varepsilon(\alpha+1)\gamma^- - \frac{2}{\sigma}(J_0(t)+J)(\gamma^+ + \gamma^-) - \frac{\varepsilon\beta\sin(\theta_0(t)+\theta)}{2\sigma\sqrt{J_0(t)+J+\omega^2}}[(\sigma^2+1)\gamma^+ + (1-\sigma^2)\gamma^-] - Q_{3,1}^- - Q_{4,1}^- \tag{9.2.10}$$

$$A^h = V_\varepsilon(J_0(t)+J, \theta_0(t)+\theta)h - iQ_{3*} - iQ_{4*} \tag{9.2.11}$$

因为$(J_0(t),\theta_0(t))$为截断方程组的解,显然有

$$A^+(J_0(t),\theta_0(t),0,0) = 0$$

$$A^c(J_0(t),\theta_0(t),0,0) = 0$$

进一步,A^+、A^c 为光滑的。当 $\varepsilon < \delta^2, \delta \ll 1, |\gamma^+| + |v^c|_n < 5\delta$,$n \geqslant 1$,我们有如下估计:

$$|A^+| + |A^c|_n \leqslant C\left(\delta + \frac{\varepsilon}{\delta} + |v^c|_n + |\gamma^+|\right)(|v^c|_n + |\gamma^+|) \leqslant C\delta(|v^c|_n + |\gamma^+|) \tag{9.2.12}$$

$$|D_yA^+| + |D_yA^c|_n \leqslant C\left(\delta + \frac{\varepsilon}{\delta} + |v^c|_n + |\gamma^+|\right) \leqslant C\delta \tag{9.2.13}$$

$$|D_{\hat{y}}A^+| + |D_{\hat{y}}A^c|_n \leqslant C\varepsilon(|v^c|_n + |\gamma^-|_n + |J|/\delta) \tag{9.2.14}$$

$$|D_{\tilde{y}}A^+| + |D_{\tilde{y}}A^c|_n \leqslant C(\varepsilon|J|/\delta^2 + |v^c|_n + |\gamma^+|) \tag{9.2.15}$$

$$|D_\varepsilon A^+| + |D_\varepsilon A^c|_n \leqslant C(|v^c|_n + |\gamma^+| + |J|/\delta) \tag{9.2.16}$$

$$|D_{y_1}D_{y_2}A^+| + |D_{y_1}D_{y_2}A^c|_n + |D_yD_{\hat{y}}A^+| + |D_yD_{\hat{y}}A^c|_n < C \tag{9.2.17}$$

$$|D_{\tilde{y}}D_yA^+| + |D_{\tilde{y}}D_yA^c|_n \leqslant C\varepsilon/\delta \tag{9.2.18}$$

$$|D_\varepsilon D_yA^+| + |D_\varepsilon D_yA^c|_n \leqslant C/\delta \tag{9.2.19}$$

$$|D_{\tilde{y}}D_{\hat{y}}A^+| + |D_{\tilde{y}}D_{\hat{y}}A^c|_n \leqslant C\varepsilon(|v^c|_n + |\gamma^+| + |J|/\delta^2) \tag{9.2.20}$$

$$|D_{\hat{y}_1}D_{\hat{y}_2}A^+| + |D_{\hat{y}_1}D_{\hat{y}_2}A^c|_n \leqslant C\varepsilon(|v^c|_n + |\gamma^+| + J/\delta^2) \tag{9.2.21}$$

$$|D_{\tilde{y}}D_\varepsilon A^+| + |D_{\tilde{y}}D_\varepsilon A^c|_n \leqslant C(|v^c|_n + |\gamma^+| + |J|/\delta) \tag{9.2.22}$$

$$|D_{\hat{y}}D_\varepsilon A^+| + |D_{\hat{y}}D_\varepsilon A^c|_n \leqslant C(|v^c|_n + |\gamma^+| + |J|/\delta^2) \tag{9.2.23}$$

这里,y_1、y_2、$y \in \{J, \theta, \gamma^+, \gamma^-, h\}$,$\hat{y}_1$、$\hat{y}_2$、$\hat{y} \in \{J_0(t), \theta_0(t)\}$,$\tilde{y} \in \{\alpha, \beta\}$,$C$ 为仅与 n, α, β和ω 有关的常数。$|D_yA^+|$和$|D_yA^c|$分别为

$$|D_yA^+| = \sup_{|\tilde{y}|_1=1} |D_yA^+\tilde{y}|$$

$$|D_yA^c|_n = \sup_{|\tilde{y}|_n=1} |D_yA^c\tilde{y}|_n$$

这里 y 为变元之一，$\tilde{y}$ 为相应 H^n 中的数量或向量，$|\tilde{y}|_n$ 为绝对值或 H^n 模。

令 B^c 为方程组(9.2.6)的矩阵算子，对 $t \geqslant 0$，有

$$|e^{B^c t} v^c|_n \leqslant C(1+t)|v^c|_n \tag{9.2.24}$$

固定 $\lambda \in \left(5\delta, \frac{\sigma}{5}\right)$ 待定，设

$$\Gamma^u_{\lambda,n} = \{g(t) = (\gamma^+(t), v^c(t)) \mid t \in (-\infty, 0), g(t) \text{ 对 } t \text{ 连续}, \|g\|_{\lambda,n} = \sup_{t \leqslant 0} e^{-\lambda t}(|\gamma^+(t)| + |v^c(t)|_n) < \infty\} \tag{9.2.25}$$

容易看到，在模 $\|\cdot\|_{\lambda,n}$ 下，$\Gamma_{\lambda,n}$ 是一个 Banach 空间。令 $B_{\lambda,n}(\cdot)$ 为 $\Gamma^u_{\lambda,n}$ 中的球，固定 $\gamma_0^+ \in [-\delta, \delta]$，如果 $g(t) \in \overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$，$(J_0(t), \theta_0(t), 0, 0, 0) + g(t)$ 为方程组(9.2.6)的一个解且具有 $\gamma^+(0) = \gamma_0^+$，那么，对任何 $t \leqslant t_0 < 0$ 有

$$\begin{cases} \gamma^+(t_0) = e^{\sigma t_0}\gamma_0^+ + \displaystyle\int_0^{t_0} e^{\sigma(t_0 - s)} A^+(J_0(s), \theta_0(s), g(s))\mathrm{d}s \\ v^c(t_0) = e^{B^c(t_0 - t)} v^c(t) + \displaystyle\int_t^{t_0} e^{B^c(t_0 - t)} A^c(J_0(s), \theta_0(s), g(s))\mathrm{d}s = \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} e^{B^c(t_0 - t)} A^c(J_0(s), \theta_0(s), g(s))\mathrm{d}s \end{cases} \tag{9.2.26}$$

作为在 $\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$ 上的不动点问题，我们将求解方程组(9.2.26)。

对任何 $g(t) = (\gamma^+(t), v^c(t)) \in \overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$，$\forall t \leqslant 0$，令

$$\gamma_1^+(t) = e^{\sigma t_0}\gamma_0^+ + \int_0^t e^{\sigma(t-s)} A^+(J_0(s), \theta_0(s), g(s))\mathrm{d}s \tag{9.2.27}$$

$$v_1^c(t) = \int_{-\infty}^t e^{B^c(t-s)} A^c(J_0(s), \theta_0(s), g(s))\mathrm{d}s \tag{9.2.28}$$

并让：

$$F(g) = (\gamma_1^+, v_1^c)$$

F 具有参数 $\gamma_0^+, \alpha, \beta, J_0, \theta_0, \varepsilon$ 和 ω。因为线性算子半群 $e^{B^c t}$ 对 t 是强连续的，则在式(9.2.28)中的积分对 t 是连续的。令

$$C_1(\lambda) = \max\left\{1, \frac{1}{\sigma - \lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right\}$$

引理 9.2.2 当

$$0 < CC_1(\lambda)\delta < \frac{1}{2} \tag{9.2.29}$$

时，F 在 $\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$ 是 $C^{1,1}$ 可压缩的，其常数 C 仅依赖于 n, α, β 和 ω。

证明：首先，我们证 F 映照 $\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$ 为它自己。从 A^+ 的连续性可知 γ^+ 对 t 的连续性，写

$$v_1^c(t) = \int_0^\infty e^{B^c s} A^c(J_0(t-s), \theta_0(t-s), g(t-s))\mathrm{d}s$$

v_1^c 对 t 的连续性可从 A^c 的连续性和控制收敛定理得到。对任何 $t \leqslant 0$，从式(9.2.12)和式(9.2.24)有

$$\begin{aligned} |\gamma_1^+(t)e^{-\lambda t}| &\leqslant e^{(\sigma-\lambda)t}|\gamma_0^+| + \int_t^0 e^{(\sigma-\lambda)(t-s)}|A^+(J_0(s), \theta_0(s), g(s))|\mathrm{d}s \leqslant \\ & e^{(\sigma-\lambda)t}|\gamma_0^+| + C\delta\int_t^0 e^{(\sigma-\lambda)(t-s)} e^{-\lambda s}(|v^c(s)|_1 + |\gamma^+(s)|)\mathrm{d}s \leqslant \\ & \delta + \frac{C\delta}{\sigma - \lambda}\|g\|_{\lambda,1} \end{aligned} \tag{9.2.30}$$

和

$$\begin{aligned} |v_1^c(t)e^{-\lambda t}|_n &\leqslant \int_{-\infty}^t C(1 + t - s)e^{-\lambda t} |A^c(J_0(s), \theta_0(s), g(s))|_n \mathrm{d}s \leqslant \\ & C\delta\int_{-\infty}^t (1 + t - s)e^{-\lambda(t-s)} e^{-\lambda s}(|v^c(s)|_n + |\gamma^+(s)|)\mathrm{d}s \leqslant \\ & C\delta\|g\|_{\lambda,n}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right) \end{aligned} \tag{9.2.31}$$

因此，变换 F 是确定的且映照$\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$为它自己，其中 $0<CC_1(\lambda)\delta<\frac{1}{2}$。

其次，对 F 形式微分。对 $g_1=(\gamma_1^+,v_1^c)\in\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$ 和 $g=(\gamma^+,v^c)\in\Gamma_{\lambda,n}^u$，设 $\tilde{g}_1=(\tilde{\gamma}_1^+,\tilde{v}_1^c)=DF(g_1)g$。从式(9.2.27)和式(9.2.28)得，对任何 $t\leqslant 0$，有

$$\tilde{\gamma}_1^+(t)=\int_0^t e^{\sigma(t-s)}DA^+(J_0(s),\theta_0(s),g_1(s))g(s)ds \quad (9.2.32)$$

$$\tilde{v}_1^c(t)=\int_{-\infty}^t e^{B^c(t-s)}DA^c(J_0(s),\theta_0(s),g_1(s))g(s)ds \quad (9.2.33)$$

其中 DA^+ 和 DA^c 表示对 γ^+ 和 v^c 的导数。为完成引理的证明，只要证明 $DF(g_1)$在 $\Gamma_{\lambda,n}^u$上是有界算子，且对 g_1 是 Lip 的。由估计式(9.2.13)有

$$\begin{aligned}|\tilde{\gamma}_1^+(t)|e^{-\lambda t}&\leqslant\int_t^0 e^{(\sigma-\lambda)(t-s)}e^{-\lambda s}|DA^+\cdot\\&(J_0(s),\theta_0(s),g_1(s))||g(s)|_1ds\leqslant\\&C\delta\|g\|_{\lambda,1}\int_t^0 e^{(\sigma-\lambda)(t-s)}ds\leqslant\\&\frac{C\delta}{\sigma-\lambda}\|g\|_{\lambda,1}\end{aligned} \quad (9.2.34)$$

$$\begin{aligned}|\tilde{v}_1^c(t)e^{-\lambda t}|_n&\leqslant\int_{-\infty}^t C(1+t-s)e^{-\lambda(t-s)}e^{-\lambda s}\cdot\\&|DA^c(J_0(s),\theta_0(s),g_1(s))|_n|g(s)|_nds\leqslant\\&C\delta\|g\|_{\lambda,n}\int_{-\infty}^t(1+t-s)e^{-\lambda(t-s)}ds\leqslant\\&C\delta\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\|g\|_{\lambda,n}\end{aligned} \quad (9.2.35)$$

这就推出 $DF(g_1)$在 $\Gamma_{\lambda,n}^u$上是有界算子，且

$$\|DF(g_1)g\|_{\lambda,n}\leqslant CC_1(\lambda)\delta\|g\|_{\lambda,n} \quad (9.2.36)$$

因此，F 为压缩的。对任何 $g_2=(\gamma^+,v_2^c)\in\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$，设 $\tilde{g}_2=(\tilde{\gamma}_2^+,\tilde{v}_2^c)=DF(g_2)g$，从式(9.2.17)可得

$$\begin{aligned}|\tilde{\gamma}_1^+(t)-\tilde{\gamma}_2^+(t)|e^{-2\lambda t}&\leqslant\int_t^0 e^{(\sigma-2\lambda)t-\sigma s}|DA^+(J_0(s),\theta_0(s),g_1(s))-\\&DA^+(J_0(s),\theta_0(s),g_2(s))|\cdot|g(s)|_1ds\leqslant\\&C\|g\|_{\lambda,1}\int_t^0 e^{(\sigma-2\lambda)(t-s)-\lambda s}|g_2(s)-g_1(s)|_1ds\leqslant\\&\frac{C}{\sigma-2\lambda}\|g\|_{\lambda,1}\|g_2-g_1\|_{\lambda,1}\end{aligned} \quad (9.2.37)$$

$$\begin{aligned}|\tilde{v}_1^c(t)-\tilde{v}_2^c(t)|_n e^{-2\lambda t}&\leqslant\int_{-\infty}^t C(1+t-s)e^{-2\lambda t}\\&|DA^c(J_0(s),\theta_0(s),g_1(s))-\\&DA^c(J_0(s),\theta_0(s),g_2(s))|_n\cdot|g(s)|_nds\leqslant\\&C\|g\|_{\lambda,n}\int_{-\infty}^t(1+t-s)e^{-2\lambda(t-s)}e^{-\lambda s}|g_2(s)-g_1(s)|_nds\leqslant\\&C\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\|g\|_{\lambda,n}\|g_2-g_1\|_{\lambda,n}\end{aligned} \quad (9.2.38)$$

$\lambda\in\left(5\delta,\frac{\sigma}{5}\right)$，有

$$\begin{aligned}\|DF(g_2)-DF(g_1)\|_{L(\Gamma_{\lambda,n}^u)}&\leqslant\|DF(g_2)-\\&DF(g_1)\|_{L(\Gamma_{\lambda,n}^u,\Gamma_{2\lambda,n}^u)}\leqslant\\&CC_1(\lambda)\|g_2-g_1\|_{\lambda,n}\end{aligned} \quad (9.2.39)$$

由此推出 F 在$\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$上为 $C^{1,1}$。

引理 9.2.2 推出存在惟一在$\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$上的 F 不动点，今后我们将设条件式(9.2.29)成立(选取 δ 适当小)，令 $g_0\in\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$为 F 的不动点，它依赖参数 $\gamma_0^+,J_0,\theta_0,\alpha,\beta$ 和 ε。在讨论 g_0 对于这些参数的连续性之前，我们指出，如果式(9.2.29)成立，$n=1,2,\cdots,n_0$，则 g_0 与 n 无关，$g_0\in\overline{B_{\lambda,n_0}(2\delta)}$这是由不动点的惟一性以及 $\Gamma_{n_1,\lambda_1}^u\subset\Gamma_{n_2,\lambda_2}^u(n_1\geqslant n_2,\lambda_1\geqslant\lambda_2)$推出的。

首先，由于映照 F 对 γ_0^+ 是连续的，由一致压缩映照原则，g_0

亦然。且由式(9.2.30)和直接计算易知

$$\| D_{\gamma_0^+} g_0 \|_{\lambda,n} \leqslant 2 \tag{9.2.40}$$

为了证明 g 是其他参数的 C^1 函数,我们定义

$$\Lambda_\delta^u = \{z(t) = (J_0(t), \theta_0(t))\}_{t \leqslant 0}, z \text{ 为 } t \text{ 的连续函数},$$

$$|z|_* = \sup(|J_0(t)| + |\theta_0(t)|) < \infty\} \tag{9.2.41}$$

$$\widetilde{\Lambda}_\delta^u = \{z \in \Lambda_\delta^u \mid z(t) \in B_\Pi(3\delta), t \leqslant 0\} \tag{9.2.42}$$

容易看到,Λ_δ^u 在模 $|\cdot|_*$ 下为 Banach 空间,$\widetilde{\Lambda}_\delta^u$ 为 Λ_δ^u 的凸闭子集。对任何 $(J_0, \theta_0) \in B_\Pi(3\delta)$,令 $l(J_0, \theta_0) = (J_0(t), \theta_0(t)), t \leqslant 0$,为截断方程在 Π_c 中具初值 (J_0, θ_0) 的向后轨线;显然轨线 $l(J_0, \theta_0) \in \widetilde{\Lambda}_\delta^u$。我们考虑 F 具有参数 $z(t) \in \widetilde{\Lambda}_\delta^u$ 取代 $(J_0, \theta_0) \in B_\Pi(3\delta)$。

引理 9.2.3 映照 l 将 $(J_0, \theta_0) \in B_\Pi(3\delta)$ 映照为轨线 $l(J_0, \theta_0) \in \widetilde{\Lambda}_\delta^u$,$l$ 对于初始点 (J_0, θ_0) 和参数 $\alpha, \beta, \varepsilon$ 是光滑的。

证明:开始考虑在 (J_0, θ_0) 上对 $(J_0(t), \theta_0(t))$ 的依赖性,在平面 Π_c 上,沿 $(J_0(t), \theta_0(t))$ 的第一变分为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \Delta J_0 \\ \Delta\theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\Delta J_0 \end{pmatrix} + \varepsilon H(t)\begin{pmatrix} \Delta J_0 \\ \Delta\theta_0 \end{pmatrix} \tag{9.2.43}$$

其中

$$H(t) = \begin{pmatrix} 5\beta\omega\eta_\delta'(J_0(t)) - 2\alpha - \dfrac{\beta\cos\theta_0(t)}{\sqrt{J_0(t) + \omega^2}} & 2\beta\sqrt{J_0(t) + \omega^2}\sin\theta_0(t) \\ -\dfrac{\beta\sin\theta_0(t)}{2(J_0(t) + \omega^2)^{3/2}} & \dfrac{\beta\cos\theta_0(t)}{\sqrt{J_0(t) + \omega^2}} \end{pmatrix}$$

因 $|\eta_\delta'| \leqslant C/\delta$,$|J_0(t)| \leqslant 3\delta$,我们有 $|H| \leqslant C/\delta$。从常数变分公式,对任何 $t \leqslant 0$ 有

$$\begin{pmatrix} \Delta J_0(t) \\ \Delta\theta_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta J_0(0) \\ \Delta\theta_0(0) \end{pmatrix} +$$

$$\int_0^t \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2(t-\delta) & 1 \end{pmatrix} H(s)\begin{pmatrix} \Delta J_0(s) \\ \Delta\theta_0(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s \tag{9.2.44}$$

推出

$$\begin{aligned} |\Delta J_0(t)| + |\Delta\theta_0(t)| &\leqslant (1-2t)(|\Delta J_0(0)| + |\Delta\theta_0(0)|) + \\ &\frac{C\varepsilon}{\delta}\int_t^0 (1+s-t)(|\Delta J_0(s)| + |\Delta\theta_0(s)|)\mathrm{d}s \leqslant \\ &(1-2t)(|\Delta J_0(0)| + |\Delta\theta_0(0)|) + \\ &\sqrt{\frac{C\varepsilon}{\delta}}\int_t^0 \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{C\varepsilon}{\delta}}(s-t)}(|\Delta J_0(s)| + |\Delta\theta_0(s)|)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{9.2.45}$$

由 Gronwall 不等式推出

$$|\Delta J_0(t)| + |\Delta\theta_0(t)| \leqslant \left(1 - 2t + \sqrt{\frac{C\varepsilon}{\delta}}(-t + t^2)\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{C\varepsilon}{\delta}}t}\right) \cdot (|\Delta J_0(0)| + |\Delta\theta_0(0)|) \tag{9.2.46}$$

利用这个估计以及常数变分公式,我们能证 l 对 $J_0, \theta_0, \alpha, \beta$ 和 ε 是光滑的,且当 $\varepsilon < \delta^5$,有如下估计

$$|D_\varepsilon l|_* \leqslant \frac{C}{\delta^2}, \quad |D_z l|_* \leqslant \frac{C}{\delta}, \quad |D_w l|_* \leqslant \frac{C\varepsilon}{\delta^2} \tag{9.2.47}$$

其中 $z = (J_0, \theta_0)$,$w \in \{\alpha, \beta\}$。

现考虑 F 作为参数 $\alpha, \beta, \varepsilon, z \in \widetilde{\Lambda}_\delta^u$ 的函数,令 $y \in Y = \{(\varepsilon, \alpha, \beta, z) \mid \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), z \in \widetilde{\Lambda}_\delta^u, 0 < \alpha\omega < \beta, \beta \in (0, M)\}$,其中 $\varepsilon_0 < \delta^5$,M 为参数 β 的上界,令

$$|Y|_* = |\varepsilon| + |\alpha| + |\beta| + |z|_*$$

设条件式(9.2.29)对一切参数 $y \in Y$ 满足,因此 F 对一切 $y \in Y$ 是 C^1 压缩。

引理 9.2.4 对 $n \geqslant 5$

$F: \overline{B_{\lambda,n}(2\delta)} \times Y \to \Gamma_{\lambda-2\delta,n-4}^u$ 为 C^1 且 F 的一切导数对 g 是 Lip 的。

证明:对任何 $y_1 = (\varepsilon_1, \alpha_1, \beta_1, z_1) \in Y$,$g_1 = (\gamma_1^+, v_1^c) \in \overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$,令 $\bar{g}_1 = (\hat{\gamma}_1^+, \hat{v}_1^c) = F(g_1, y_1)$。对一切 $t \leqslant 0$,从式(9.2.14)

有

$$|(D_\beta\hat{\gamma}_1^+)(t)|e^{-\lambda t} \leqslant \int_t^0 e^{(\sigma-\lambda)(t-s)}e^{-\lambda s}|D_\beta A^+(y_1(s),g_1(s))|ds \leqslant$$

$$\frac{C\varepsilon}{\delta}\int_t^0 e^{(\sigma-\lambda)(t-s)}e^{-\lambda s}|g_1(s)|_1 ds \leqslant$$

$$\frac{C\varepsilon}{\delta(\sigma-\lambda)}\|g_1\|_{\lambda,1}$$

$$|(D_\beta v_1^c)(t)|_n e^{-\lambda t} \leqslant \int_{-\infty}^t (1+t-s)e^{-\lambda s}|D_\beta A^c(y_1(s),g_1(s))|_n ds \leqslant$$

$$\frac{C\varepsilon}{\delta}\int_{-\infty}^t (1+t-s)e^{-\lambda(t-s)}e^{-\lambda s}|g_1(s)|_n ds \leqslant$$

$$\frac{C\varepsilon}{\delta}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\|g_1\|_{\lambda,n}$$

由此推出：

$$\|D_\beta F(g_1,y_1)\|_{\lambda,n} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\delta}C_1(\lambda)\|g_1\|_{\lambda,n} \quad (9.2.48)$$

为了估计 D_α，我们必须首先估计 $D_\alpha e^{B^c t}$，从式(9.2.6)和式(9.1.14)可得

$$D_\alpha B^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$D_\alpha e^{B^c t} = tD_\alpha B^c e^{B^c t}$$

$$D_{\alpha\alpha} e^{B^c t} = t^2(D_\alpha B^c)^2 e^{B^c t}$$

因此对 $t \geqslant 0$,

$$\|D_\alpha e^{B^c t}\|_n \leqslant Ct\varepsilon, \qquad \|D_{\alpha\alpha}e^{B^c t}\|_n \leqslant Ct^2\varepsilon^2$$

对 $\lambda \in \left(5\delta, \frac{\sigma}{5}\right)$，类似于式(9.2.48)的估计可得

$$\|D_\alpha F(g_1,y_1)\|_{\lambda,n} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\delta}C_1(\lambda)\|g_1\|_{\lambda,n} \quad (9.2.49)$$

因含有奇性扰动项 εu_{xx}，对 ε 的微分可能导致正则性的损失。事实上，我们有

$$D_\varepsilon B^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+\partial_{xx} \end{pmatrix}, \quad D_\varepsilon e^{B^c t} = tD_\varepsilon B^c e^{B^c t}$$

因此，对任何 v^c 和 $t \geqslant 0$，有

$$|D_\varepsilon e^{B^c t}v^c|_{n-2} \leqslant Ct|v^c|_n, \qquad |D_{\varepsilon\varepsilon}e^{B^c t}v^c|_{n-4} \leqslant Ct^2|v^c|_n,$$

于是从不等式(9.2.16)可得

$$\|D_\varepsilon F(g_1,y_1)\|_{\lambda,n-2} \leqslant \frac{C}{\delta}C_1(\lambda)\|g_1\|_{\lambda,n} \quad (9.2.50)$$

对任何 $z \in \Lambda_\delta^u$，从不等式(9.2.15)，类似于(9.2.48)的估计可得

$$\|D_z F(g_1,y_1)z\|_{\lambda-\delta,n} \leqslant C\left(\frac{1}{\lambda-\delta}+\frac{1}{(\lambda-\delta)^2}+\frac{1}{\sigma-\lambda+\delta}\right)|z|_*\|g_1\|_{\lambda,n} \leqslant$$

$$CC_1(\lambda)|z|_*\|g_1\|_{\lambda,n}, \lambda > 5\delta \quad (9.2.51)$$

最后，我们由估计二阶导数而得到导数的连续性，一阶导数的 Lip 常数为二阶导数模的界，利用估计式(9.2.17)和式(9.2.23)，能证 D^2F 为从$(\Gamma_{\lambda,n}^u \otimes \Lambda_\delta^u)^2$ 到 $\Gamma_{\lambda-2\delta,n-4}^u$的有界双线性映照。我们有

$$\|D_{gz}F(g_1,y_1)\| \leqslant CC_1(\lambda)$$

$$\|D_{g\varepsilon}F(g_1,y_1)\| \leqslant \frac{CC_1(\lambda)}{\delta} \quad (9.2.52)$$

$$\|D_{g\alpha}F(g_1,y_1)\| \leqslant \frac{CC_1(\lambda)\varepsilon}{\delta} \quad (9.2.53)$$

其中 $w \in \{\alpha, \beta\}$。依式(9.2.39),给出 DF 对 g 的 Lip 常数。

引理 9.2.5 对任何 $\lambda_1 < \lambda$, $F: \overline{B_{\lambda,n}(2\delta)} \times Y \to \Gamma^u_{\lambda_1,n}$ 是连续的。

证明:由引理 9.2.4,不等式(9.2.48)和式(9.2.49)推出 F 对 g, α 和 β 是 Lip 的。这对证明 F 对 ε 和 z 的连续性是充分的。对任何 $g \in \overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$, $y_k = (\varepsilon_k, \alpha, \beta, z_k) \in Y$, $k = 0, 1$,令 $g_k = (\gamma_k^+, v_k^c) = F(g, y_k)$,我们有

$$\sup_{t \leqslant 0}\{|\gamma_1^+(t) - \gamma_0^+(t)| e^{-\lambda_1 t}\} \leqslant \sup_{t \leqslant 0}\left\{\int_t^0 e^{(\sigma-\lambda_1)(t-s)} e^{-\lambda_1 s} \cdot |A^+(y_1(s), g(s)) - A^+(y_0(s), g(s))| ds\right\} \leqslant$$

$$\frac{C}{\delta} \sup_{t \leqslant 0} \int_t^0 e^{-\lambda_1 s}(|z_1(s) - z_0(s)| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_0|) |g(s)|_1 ds \leqslant \frac{C}{\delta} \| g \|_{\lambda,1} \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda-\lambda_1)s}(|z_1(s) - z_0(s)| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_0|) ds \qquad (9.2.54)$$

因 $e^{(\lambda-\lambda_1)s}$ 指数衰减, $|z_1(s) - z_0(s)| \leqslant 6\delta$, $\forall s \leqslant 0$, $z_1(s) \to z_0(s)$ 局部一致($|z_1 - z_0| \to 0$),推出

$$\sup_{t \leqslant 0}\{|\gamma_1^+(t) - \gamma_0^+(t)| e^{-\lambda_1 t}\} \to 0, \quad |y_1 - y_0|_* \to 0$$

另一方面

$$\sup_{t \leqslant 0}\{|v_1^c(t) - v_0^c(t)|_n e^{-\lambda_1 t}\} \leqslant \sup_{t \leqslant 0}\left\{\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 t}[C(1 + t - s) \cdot |A^c(y_1(s), g(s)) - A^c(y_0(s), g(s))|_n + |(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1} - e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0}) A^c(y_0(s), g(s))|_n] ds\right\} \leqslant$$

$$\sup_{t \leqslant 0}\left\{\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 t}[\frac{C}{\delta}(1 + t - \delta)(|z_1(s) - z_0(s)| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_0|) |g(s)|_n + |(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1} - e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0}) A^c(y_0(s), g(s))|_n] ds\right\} \leqslant$$

$$\frac{Ce^{\lambda_1 - 1}}{\delta\lambda_1} \| g \|_{\lambda,n} \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda-\lambda_1)s}(|z_1(s) - z_0(s)| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_0|) ds + \sup_{t \leqslant 0}\left\{\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 s} |(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1} - e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0}) A^c(y_0(s), g(s))|_n ds\right\} \qquad (9.2.55)$$

类似于 γ^- 的估计,右端的第一部分当 $|y_1 - y_0|_* \to 0$ 时,它是收敛于零的。

最后,我们证明对任何给定 $\xi > 0$,

$$\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 s} |(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1} - e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0}) \cdot A^c(y_0(s), g(s))|_n ds < \xi \qquad (9.2.56)$$

$\forall t \leqslant 0$,且 $|\varepsilon_1 - \varepsilon_0|$ 充分小。注意到

$$|e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1} - e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0}| \leqslant C$$

因此,对任何 $t_0 < 0$, $t_1 = \min\{t_0, t\}$,

$$\int_{-\infty}^{t_1} e^{-\lambda_1 s} |(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1} - e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0}) A^c(y_0(s), g(s))|_n ds \leqslant C\delta \| g \|_{\lambda,n} \int_{-\infty}^t e^{(\lambda-\lambda_1)s} ds \leqslant \frac{C\delta}{\lambda - \lambda_1} \| g \|_{\lambda,n} e^{(\lambda-\lambda_1)t_0} \qquad (9.2.57)$$

因此,存在 $t_0 < 0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{t_1} e^{-\lambda_1 s} |(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1} - e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0}) A^c(y_0(s), g(s))|_n ds \leqslant \frac{\xi}{2}$$

于是,为了证明式(9.2.56),只须证明

$$\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 s} |(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1} - e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0}) \cdot$$

$$A^c(y_0(s),g(s))|_n \mathrm{d}s < \frac{\xi}{2} \tag{9.2.58}$$

$\forall t\in[t_0,0]$。固定 ε_0，$(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1}-e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0})A^c(y_0(s),g(s))$ 对 $\varepsilon_1,t\in[t_0,0],s\in[t_0,t]$ 是连续的。当 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$，它等于零。因此，当 $|\varepsilon_1-\varepsilon_0|$ 充分小，对一切 $t\in[t_0,0],s\in[t_0,t]$，有

$$|(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_1}-e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon=\varepsilon_0})A^c(y_0(s),g(s))|_n \mathrm{d}s \le -\frac{\xi}{2t_0}e^{\lambda_1 t_0}$$

由此推出式(9.2.58)和

$$\sup_{t\le 0}\{|v_1^c(t)-v_0^c(t)|_n e^{-\lambda_1 t}\}\to 0,\quad |y_1-y_0|_*\to 0$$

因此，我们已证当 $|y_1-y_0|_*\to 0$ 时，$\|F(g,y_1)-F(g,y_0)\|_{\lambda_1,n}\to 0$，利用已有的工作，我们能证 $F(\cdot,y)$ 的不动点 $g_0(y)\in\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$ 对于 $y=(\varepsilon,\alpha,\beta,z)$ 的 C^1 光滑性。

引理 9.2.6 $g_0(y):Y\to\Gamma^u_{\lambda-3\delta,n-4}$ 对一切 $y\in Y$ 是 C^1 函数。

证明：选取 $g_1(y)=0\in\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)}$，$\forall y\in Y$。令

$$g_{k-1}(y)=F(g_k(y),y)\in\overline{B_{\lambda,n}(2\delta)},k=1,2,\cdots$$

因 $F(\cdot,y)$ 对一切 $y\in Y$ 是压缩的。当 $k\to\infty$ 时，$g_k(y)$ 局部一致收敛于 $g_0(y)$。因此从引理 9.2.1 ~ 引理 9.2.3，如 $g_k:Y\to\Gamma^u_{\lambda-3\delta,n-4}$ 是 C^1 的，则

$$D_y g_{k-1}(y)=D_gF(g_k(y),y)D_yg_k(y)+D_yF(g_k(y),y) \tag{9.2.59}$$

从 Y 到 $\Gamma^u_{\lambda-3\delta,n-4}$ 是连续的，$g_{k-1}:Y\to\Gamma^u_{\lambda-3\delta,n-4}\in C^1$，我们也证明 D_yg_k 一致收敛。

为简单化，记 $\|D_yg_k(y)\|,\|D_gF\|,\|D_yF\|$ 分别表示在 $L(Y,\Gamma^u_{\lambda-3\delta,n-4}),L(\Gamma^u_{\lambda-3\delta,n-4}),L(Y,\Gamma^u_{\lambda-3\delta,n-4})$ 上的模。从引理 9.2.1 并注意到 $\frac{\sigma}{5}>\lambda>5\delta$，$\|D_gF\|\le CC_1(\lambda)\delta$，我们有

$$\begin{aligned}\|D_yg_k(y)\| &\le \|D_yF(g_{k-1}(y),y)\|+\\ &\|D_gF(g_{k-1}(y),y)\|\,\|D_yg_{k-1}(y)\|\le\\ &\|D_yF(g_{k-1}(y),y)\|+CC_1(\lambda)\delta\|D_yg_{k-1}(y)\|\le\\ &\sum_{m=1}^{m=k-1}(CC_1(\lambda)\delta)^{k-1-m}\|D_yF(g_m(y),y)\|\end{aligned} \tag{9.2.60}$$

因此从不等式(9.2.48)、式(9.2.51)，对于 δ 充分小，可得

$$\|D_\varepsilon g_k(y)\|\le CC_1(\lambda),\quad \|D_zg_k(y)\|\le CC_1(\lambda)\delta \tag{9.2.61}$$

$$\|D_wg_k(y)\|\le CC_1(\lambda)\varepsilon \tag{9.2.62}$$

其中 $w\in\{\alpha,\beta\}$。

其次，证明 D_yg_k 为 Cauchy 序列，事实上，由式(9.2.39)、式(9.2.52)和式(9.2.61)可推出

$$\begin{aligned}\|D_yg_{k+1}(y)-D_yg_k(y)\| &\le \|D_yF(g_k(y),y)-\\ &D_yF(g_{k-1}(y),y)+(D_gF(g_k(y),y)-\\ &D_gF(g_{k-1}(y),y)D_yg_k(y)+D_gF(g_{k-1}(y),y)(D_yg_k(y)-\\ &D_yg_{k-1}(y))\|\le\|D_{yg}F\|\,\|g_k(y)-g_{k-1}(y)\|_{\lambda,n}+\\ &CC_1(\lambda)\delta\|D_yg_k(y)-D_yg_{k-1}(y)\|+\\ &CC_1(\lambda)\|g_k(y)-g_{k-1}(y)\|_{\lambda-3\delta,n-4}\|D_yg_k(y)\|\le\\ &C\delta(CC_1(\lambda)\delta)^{k-2}(\|D_{yg}F\|+C_1(\lambda)\|D_yg_k(y)\|)+\\ &CC_1(\lambda)\delta\|D_yg_k(y)-D_yg_{k-1}(y)\|\le\\ &CC_1(\lambda)(1+C_1(\lambda)\delta)(CC_1(\lambda)\delta)^{k-2}+\\ &CC_1(\lambda)\delta\|D_yg_k(y)-D_yg_{k-1}(y)\|\le\\ &(CC_1(\lambda)\delta)^{k-1}\|D_yg_2(y)\|+(k-1)CC_1(\lambda)(1+\\ &C_1(\lambda)\delta)(CC_1(\lambda)\delta)^{k-2}\le\\ &kCC_1(\lambda)(1+C_1(\lambda)\delta)(CC_1(\lambda)\delta)^{k-2}\end{aligned} \tag{9.2.63}$$

其中用到了

$$\|g_k(y)-g_{k-1}(y)\|_{\lambda,n}\le C\delta(CC_1(\lambda)\delta)^{k-2}$$

的事实。因此 $D_y g_k$ 是一个 Cauchy 序列,从而 $g_0(y)\in C^1: Y\to\Gamma^u_{\lambda-3\delta,n-4}$, $D_y g_0$ 满足估计式(9.2.61)。

因此,对固定 $n_0>5,\lambda_0=\frac{\sigma}{10}$,选取 $\delta\in\left(\sigma,\frac{\lambda_0}{10}\right)$ 使得条件式(9.2.29)满足,对一切 $\lambda\in[\lambda_0-5\delta,\lambda_0+5\delta]$, $n=1,2,\cdots,n_0$,则所有以上估计成立,$\varepsilon<\delta^5$, $n\leqslant n_0$。基于引理 9.2.3, $g_0\in C^1$,对于 $\gamma_0^+,\alpha,\beta,J_0,\theta_0$,和 ε,我们有

$$\|D_{\gamma_0^+}g_0\|_{\lambda-3\delta,n-4},\ \|D_z g_0\|_{\lambda-3\delta,n-4}\leqslant C,$$

$$\|D_\varepsilon g_0\|_{\lambda-3\delta,n-4}\leqslant\frac{C}{\delta}\tag{9.2.64}$$

$$\|D_w g_0\|_{\lambda-3\delta,n-4}\leqslant\frac{C\varepsilon}{\delta}\tag{9.2.65}$$

其中 $z=(J_0,\theta_0)$, $w\in\{\alpha,\beta\}$, $n_0\geqslant n\geqslant 5$, $\lambda\in[\lambda_0-5\delta,\lambda_0+5\delta]$。

现回到命题 9.2.1。令 $n_0=m+4$,设 $g_0(t)=(J(t),\theta(t),\gamma^+(t),\gamma^-(t),h(t))$,显然有 $\gamma^+(0)=\gamma_0^+$。对任何 $z=(J_0,\theta_0)\in B_\Pi(\delta)$, $\gamma_0^+\in[-\delta,\delta]$和小的 ε,定义

$$g_\varepsilon^u(z,\gamma_0^+)=(J(0),\theta(0),0,\gamma^-(0),h(0))$$

因截断方程组(9.2.6)当 $|J|<2\delta$ 时是同于原方程组,容易验证 g_ε^u 满足命题 9.2.1 所列出的性质。

为了完成前面的证明,我们给出不稳定纤维的性质。设 $z_0\in B_\Pi(\delta)$使得在方程组(9.1.13)下,它的向后轨线 $\{z(t)\mid t\leqslant 0\}\subset B_\Pi(\delta)$对任何 $\gamma^+\in[-\delta,\delta]$,从命题 9.2.1 存在 $\gamma^+(t)$,对一切 $t<0$ 使得$(z(t),\gamma^+(t),0,0)+g_\varepsilon^u(z(t),\gamma^+(t))$为$(z_0,\gamma^+,0,0)+g_\varepsilon^u(z_0,\gamma^+)$的向后轨线。

命题 9.2.7 我们有

$$|\gamma^+(t)|\leqslant C\delta e^{\sigma t/2},\quad \forall t\leqslant 0$$

其中 C 为不依赖于 z 和 ε 的常数。

命题 9.2.7 推出 z_0 为$(z_0,\gamma^+,0,0)+g_\varepsilon^u(z_0,\gamma^+)$具指数衰减率 $\sigma t/2(t\to\infty)$的渐近位相,从方程(9.2.6)可以看到:命题的证明是显然的。

前面提到的 P_ε^u,在常数平面 Π_c 中鞍点 Q_ε 的不稳定曲线,可由$\{(J=\nu\phi_\nu^u(\theta),\theta)\mid_{\theta\in[\theta_1,\theta_2]}\}$给定,其中 $\nu=\sqrt{\varepsilon}$, $\phi_\nu^u:[\theta_1,\theta_2]\to R$ 为光滑函数。定义

$$W_\varepsilon^u=\bigcup_{\theta\in[\theta_1,\theta_2]}W_\varepsilon^{uu}(\nu\phi_\nu^u(\theta),\theta)\tag{9.2.66}$$

可知 W_ε^u 为 C^1 二维流形,它对 ν 也是光滑的。从命题 9.2.7 可知,任何初始点在不稳定流形 W_ε^u 上具有一个方程(9.1.1)的向后解,且这个向后解当 $t\to-\infty$ 时,趋于 Q_ε。因此 W_ε^u 为 Q_ε 的二维局部不稳定流形,W_ε^u 的大小在 θ 方向为$|\theta_2-\theta_1|$,而在 e^+ 方向为 2δ。考察在 Q_ε 处线性化方程的特征值,可看到最弱稳定和不稳定特征值的实部之差为 $O(\nu)$,局部不稳定流形的直接构造将产生 $O(\nu)$阶的流形。

我们下面将证明具有 C^1 类光滑,余维 1 的在 H^1 中圆 C_ω 的不变中心稳定流形 W_ε^{cs} 的存在性。在每一点上,W_ε^{cs} 的切空间为 E_1^{cs} 所近似。W_ε^{cs} 像一条沿着 C_ω 具宽度 δ 的纹,它和 ε 无关,我们还证明它含有鞍点 Q_ε 的余维 2 的稳定流形。写

$$u(x)=(\rho+f(x))e^{i\theta},$$

$$f(x)=\gamma^+e^+(x)+\gamma^-e^-(x)+h(x)$$

其中 $\gamma^\pm$ 为实数,$e^\pm(x)$为 $\lambda_1^\pm$ 的特征函数,

$$\langle h(x)\cos x\rangle=0$$

对于 $v^c=(J,\theta,\gamma^+,h)$,令

$$|v^c|_{n,1}=\max\{|J|,|\theta|,|\gamma^+|,|h|_n\},$$

$$|v^c|_{n,0}=\max\{|J|,|\gamma^+|,|h|_n\}$$

$$N_n^{cs}=\{v^c=(J,\theta,\gamma^+,h)\mid |v^c|_{n,0}<\delta\}$$

它是余维 1 子空间 E_n^{cs} 中 C_ω 的一个邻域。

命题 9.2.8 存在 C^1 函数 $g_\varepsilon^{cs}: N_1^{cs} \to R$,它对参数 α,β 也是 C^1 的,使得:

(1) $D_\alpha g_\varepsilon^{cs}$、$D_\beta g_\varepsilon^{cs}$ 对 ε 是连续的,$D_{v^c} g_\varepsilon^{cs}$ 对 ε 是强连续的。

(2)对任何 $v^c \in N_3^{cs}$, $g_\varepsilon^{cs}(v^c)$对 ε 是 Lip 的,其中 Lip 常数关于 v^c 是一致的。

(3) $\| D_{v^c} g_\varepsilon^{cs} \| \leqslant C\delta$, $g_\varepsilon^{cs}(J,\theta,0,0) = 0$,且当 $\varepsilon = 0$ 时,$D_{v^c} g_0^{cs}(0,\theta,0,0) = 0$。

(4)对 $v^c \in N_1^{cs}$, $\gamma^+ = g_\varepsilon^{cs}(v^c)$,设 $S_\varepsilon^t(\gamma^+, v^c) = (\gamma^+(t), v^c(t))$。若 $T>0$, $v^c(t) \in N_1^{cs}$, $\forall t \in [0,T]$,则 $\gamma^+(t) = g_\varepsilon^{cs}(v^c(t))$, $\forall t \in [0,T]$。

这里 $D_{v^c} g_\varepsilon^{cs}$ 对 ε 的强连续性意味着,对任何 $v_0^c \in N_1^{cs}$ 和 v^c,当 $\varepsilon \to \varepsilon_0$ 时 $D_{v^c} g_\varepsilon^{cs}(v_0^c) \to D_{v^c} g_{\varepsilon_0}^{cs}(v_0^c) v^c$。我们不能证明 $D_{v^c} g_\varepsilon^{cs}$ 对 ε 的一致连续性,这是由于 $D_u S_\varepsilon^t$(S_ε^t 为方程(9.1.1)形成的半流)仅对 ε 为强连续。C_ω 的中心稳定流形为

$$W_\varepsilon^{cs} = \{(\gamma^+, v^c) \mid v^c \in N_1^{cs}, \gamma^+ = g_\varepsilon^{cs}(v^c)\}$$

显然仅能证明 W_ε^{cs} 对 ε 是 Lip 的。它对于同宿轨道的构造已经足够。性质(3)说明在平面 Π_c 中圆 C_ω 的一个邻域被包含在 W_ε^{cs} 中,且 W_ε^{cs} 在 C_ω 上正切于 E_1^{cs},对于 $\varepsilon = 0$。最后,性质(4)为中心稳定流形 W_ε^{cs} 的局部不变性。

我们用 Lyapunov-Perron 方法证明这个命题,除了 g_ε^{cs} 对 ε 的依赖性外,它同于命题 9.2.1 的证明,故省略之。首先,我们构造映照 g_ε^{cs},再证明它对 ε 的 Lip 依赖性。

设 $\eta \in C^\infty(R,R)$为一截断函数,使得

$\mathrm{supp}\,\eta \subset (-4,4)$,在$(-2,2)$上 $\eta = 1$, $|\eta'| < 1$。令 $\eta_\delta = \eta\left(\dfrac{\cdot}{\delta}\right)$,且

$$\eta_\delta(\gamma^+, v^c) = \eta_\delta(J)\eta_\delta(\gamma^+)\eta_\delta(\gamma^-)\eta_\delta(|h|_1)$$

为了构造映照 g_ε^{cs},考虑如下式(9.1.13)的截断方程组:

$$\begin{cases} \gamma_t^+ = \sigma\gamma^+ + \tilde{A}^+(\gamma^+, v^c) \\ v_t^c = B^c v^c + \tilde{A}^c(\gamma^+, v^c) \end{cases} \tag{9.2.67}$$

其中 B^c 为方程(9.2.6)中的大矩阵,$\tilde{A}^+$, $\tilde{A}^c = (\tilde{A}^J, \tilde{A}^\theta, \tilde{A}^-, \tilde{A}^h)$为光滑的,具有形式

$$\tilde{A}^+ = \eta_\delta(\gamma^+, v^c)\Big[-\varepsilon(\alpha+1)\gamma^+ + \frac{2}{\sigma}J(\gamma^+ + \gamma^-) - \frac{\varepsilon\beta\sin\theta}{2\sigma\sqrt{J+\omega^2}}$$

$$((\sigma^2-1)\gamma^+ - (\sigma^2+1)\gamma^-) - Q_{3,1}^+ - Q_{4,1}^+\Big] \tag{9.2.68}$$

$$\tilde{A}^J = \varepsilon\eta_\delta(\gamma^+, v^c)[\{-2(\alpha(J+\omega^2) +$$

$$\beta\sqrt{J^2+\omega^2}\cos\theta)\} + Q_1(f,J,\theta)] \tag{9.2.69}$$

$$\tilde{A}^\theta = \eta_\delta(\gamma^+, v^c)\left[\varepsilon\beta\frac{\sin\theta}{\sqrt{J+\omega^2}} + Q_2(f,J,\theta)\right] \tag{9.2.70}$$

$$\tilde{A}^h = \eta_\delta(\gamma^{-1}, v^c)[V_\varepsilon(J,\theta)h - iQ_{3*} - iQ_{4*}] \tag{9.2.71}$$

$$\tilde{A}^- = \eta_\delta(\gamma^+, v^c)[1 - \varepsilon(\alpha+1)\gamma^- - \frac{2}{\sigma}J(\gamma^+ + \gamma^-) -$$

$$\frac{\varepsilon\beta\sin\theta}{2\sigma\sqrt{J^2+\omega^2}}((\sigma^2+1)\gamma^+ +$$

$$(1-\sigma^2)\gamma^-) - Q_{3,1}^- - Q_{4,1}^-] \tag{9.2.72}$$

这里,我们依 H^1 模截断除掉阶为 $O(1)$的线性项之外的方程组一切项。当$|v^c|_{1,0}$, $|\gamma^+| \leqslant 2\delta$ 时,截断方程组(9.2.67)同于原来的方程组(9.1.13)。注意到对任何 $u_1, u_2 \in H^3$,以下式子成立:

$$|u_1 u_2|_3 \leqslant C(|u_1|_1 |u_2|_3 + |u_1|_3 |u_2|_1)$$

如同估计式(9.2.12),通过式(9.2.23),当 $\varepsilon < \delta^2$, $\delta \ll 1$,对一切 γ^+ 和 v^c, $n = 1,3$,有

$$|\tilde{A}^+(\gamma^+, v^c)| + |\tilde{A}^c(\gamma^+, v^c)|_{n,1} \leqslant$$

$$C\eta_\delta(\gamma^+, v^c)(\varepsilon + \delta(|v^c|_{n,0} + |\gamma^+|)) \tag{9.2.73}$$

$$|D_\gamma\tilde{A}^+| + |D_\gamma\tilde{A}^c|_{1,1} \leqslant C\delta \tag{9.2.74}$$

$$|D_y\tilde{A}^+| + |D_y\tilde{A}^c|_{1,1} \leqslant C\varepsilon \tag{9.2.75}$$

$$|D_\varepsilon\tilde{A}^+| + |D_\varepsilon\tilde{A}^c|_{1,1} + |D_\varepsilon D_{\tilde{y}}\tilde{A}^+| + |D_\varepsilon D_{\tilde{y}}\tilde{A}^c| \leqslant C \tag{9.2.76}$$

$$|D_{y_1}D_{y_2}\tilde{A}^+| + |D_{y_1}D_{y_2}\tilde{A}^c|_{1,1} \leqslant C \tag{9.2.77}$$

$$|D_{\tilde{y}}D_y\tilde{A}^+| + |D_{\tilde{y}}D_y\tilde{A}^c|_{1,1} \leqslant C\varepsilon/\delta \tag{9.2.78}$$

$$|D_\varepsilon D_y\tilde{A}^+| + |D_\varepsilon D_y\tilde{A}^c|_{1,1} \leqslant C/\delta \tag{9.2.79}$$

其中符号 $y_1, y_2, y \in \{\gamma^+, J, \theta, h, \gamma^-\}$，$\tilde{y} \in \{\alpha, \beta\}$，$D^2\tilde{A}^+$ 和 $D^2\tilde{A}^c$ 被考虑为 H^1 上的双线性映照。

固定 $\lambda \in (5\delta, \sigma/5)$ 待定，令

$\Gamma^{cs}_{\lambda,n} = \{g(t) = (\gamma^+(t), v^c(t)) \mid t \in [0,\infty)$，$g(t)$ 是对 t 连续的

$$\|g\|_{\lambda,n} = \sup_{t\geqslant 0} e^{-\lambda t}(|\gamma^+(t)| + |v^c(t)|_{n,1}) < \infty\} \tag{9.2.80}$$

容易看到 $\Gamma_{\lambda,n}$ 在模 $\|\cdot\|_{\lambda,n}$ 下是一个 Banach 空间。对 $r>0$，令

$$B^{cs}_{\lambda,n}(r) = \{g(t) = (\gamma^+(t), v^c(t)) \in \Gamma^{cs}_{\lambda,n} \mid \sup_{t\geqslant 0} e^{-\lambda t}(|\gamma^+(t)| + |v^c(t)|_{n,0}) \leqslant r\}$$

显然，$B^{cs}_{\lambda,n}(r)$ 是在 $\Gamma^{cs}_{\lambda,n}$ 中的一个闭子集。

固定 $v^c_0 \in N^{cs}_n$，如 $g \in \Gamma^{cs}_{\lambda,n}$ 为方程(9.2.67)中的一个解，且 $v^c(0) = v^c_0$，则对任何 $t_0 \geqslant t \geqslant 0$，有

$$\begin{cases} \gamma^+(t) = e^{\sigma(t-t_0)}\gamma^+(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^t e^{\sigma(t-s)}\tilde{A}^+(g(s))ds = \\ \qquad \displaystyle\int_{+\infty}^t e^{\sigma(t-s)}\tilde{A}^+(g(s))ds \\ v^c(t) = e^{B^c t}v^c_0 + \displaystyle\int_0^t e^{B^c(t-s)}\tilde{A}^c(g(s))ds \end{cases} \tag{9.2.81}$$

我们将作为在 $B^{cs}_{\lambda,n}(C_0\delta)$ 上的一个不动点问题($C_0>0$)求解以上方程。

对任何 $g = (\gamma^+, v^c) \in B^{cs}_{\lambda,n}(C_0\delta)$，令

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}^+(t) = \displaystyle\int_{+\infty}^t e^{\sigma(t-s)}\tilde{A}^+(g(s))ds \\ \tilde{v}^c(t) = e^{B^c t}v^c_0 + \displaystyle\int_0^t e^{B^c(t-s)}\tilde{A}^c(g(s))ds \end{cases} \tag{9.2.82}$$

$\forall t \geqslant 0$。定义 $F^{cs}(g) = (\tilde{\gamma}^+, \tilde{v}^c)$，$F^{cs}$ 具有参数 $v^c_0, \alpha, \beta, \varepsilon$。因线性算子的半群 $e^{B^c t}$ 对 t 强连续，式(9.2.82)右端第二项积分对 t 是连续的。

我们首先构造在 H^1 中的中心稳定流形，再考虑它对 ε 的依赖性。固定 $v^c_0 \in N^{cs}_1$，令

$$C_1(\lambda) = \max\left\{1, \frac{1}{\sigma-\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right\}$$

引理 9.2.9 对某常数 $C_0>0$(它仅依赖于 ω)，F^{cs} 在 $B^{cs}_{\lambda,1}(C_0\delta)$ 上是可压缩，如

$$0 < CC_1(\lambda)\delta < \frac{1}{2} \tag{9.2.83}$$

成立。其中 C 为一常数，它依赖于 α, β, ω。

引理的证明同于引理 9.2.2。常数 C_0 的出现是由于 $|e^{B^c t}v^c_0|_{1,0}$ 为 $C|v^c_0|_{1,0}$ 所界。F^{cs} 的 Lip 常数仍为 $CC_1(\lambda)\delta$。因此存在一个不动点 $g_0 \in B^{cs}_{\lambda,1}(C_0\delta)$，它依赖于 $v^c_0, \alpha, \beta, \omega$。再看看 g_0 对这些参数的依赖性。

引理 9.2.10

(1) F^{cs} 在 $B^{cs}_{\lambda,1}(C_0\delta)$ 上对 $g, v^c_0, \alpha, \beta, \varepsilon$ 是连续的。

(2) 对任何 $\lambda_1 > \lambda$，$F^{cs}: B^{cs}_{\lambda,1}(C_0\delta) \to \Gamma^{cs}_{\lambda_1,1}$ 对于 g, v^c_0, α, β 是 C^1 连续的。更进一步，$D_\alpha F^{cs}$ 和 $D_\beta F^{cs}$ 对 ε 是连续的，而 $D_{v^c_0}F^{cs}$ 和 $D_g F^{cs}$ 对 ε 是强连续的。

(3) F^{cs} 对于 g, v^c_0, α, β 的导数：$B^{cs}_{\lambda,1}(C_0\delta) \to F^{cs}_{2\lambda,1}$ 对 g 是 Lip 的。

证明类似引理 9.2.4 和引理 9.2.5。事实上，在性质(2)中我

们失去了衰减率从 λ 到 λ_1，仅当我们证明导数的连续性时。这里我们不能得到 $D_{v_0^c}F^{cs}$，D_gF^{cs} 对 ε 的一致连续性，原因是 $e^{B^\varepsilon t}$ 仅对 ε 强连续。从不等式(9.2.74)、式(9.2.75)可得估计

$$\| D_gF^{cs} \|_{L(\Gamma^{cs}_{\lambda,1})} \leqslant CC_1(\lambda)\delta, \quad \| D_{v_0^c}F^{cs} \|_{L(\Gamma^{cs}_{\lambda,1})} \leqslant C \tag{9.2.84}$$

$$\| D_wF^{cs} \|_{\lambda,1} \leqslant CC_1(\lambda)\delta \tag{9.2.85}$$

这里 $w\in\{\alpha,\beta\}$。进一步，考虑 F^{cs} 作为从 $B^{cs}_{\lambda,1}(C_0\delta)$ 到 $\Gamma^{cs}_{2\lambda,1}$ 的一个映照，我们有它对 g 的导数的 Lip 常数的估计

$$\mathrm{Lip}_gD_gF^{cs} \leqslant CC_1(\lambda), \quad \mathrm{Lip}_gD_wF^{cs} \leqslant CC_1(\lambda)\frac{\varepsilon}{\delta} \tag{9.2.86}$$

其中 $w\in\{\alpha,\beta\}$。$D_{v_0^c}F^{cs}$ 不依赖于 g。

令

$$Y_n = \{y = (v_0^c,\alpha,\beta) \mid v_0^c \in N_n^{cs}, 0 < \alpha\omega < \beta, \beta < M\}$$

$$| y |_{*n} = \max\{| v_0^c |_{n,1}, | \alpha |, | \beta |\}$$

其中 M 为参数 β 的上界。从引理 9.2.10 和一致压缩映照原则，不动点 $g_0(y,\varepsilon)\in B^{cs}_{\lambda,1}(C_0\delta)\in F^{cs}(y,\varepsilon)$ 对 y 和 ε 是连续的。

其次，我们证明对于 g_0，$y\in Y_1$ 的 C^1 依赖性。选取 δ 充分小，使得式(9.2.83)成立，$y\in Y_1$。

引理 9.2.11 对每个固定的小的 $\varepsilon\geqslant 0$，$g_0: Y_1\to\Gamma^{cs}_{2\lambda,1}$ 对 ε 是 C^1 函数，它的导数对 ε 是强连续的。

引理证明比引理 9.2.6 更多一些。我们有导数的估计

$$\| D_{v_0^c}g_0(y) \|_{\lambda,1} \leqslant C, \quad \| D_wg_0(y) \|_{\lambda,1} \leqslant CC_1(\lambda)\varepsilon \tag{9.2.87}$$

这里 $w\in\{\alpha,\beta\}$。

对 $v_0^c\in N_1^{cs}$，设 $g_0(t) = (\gamma_0^+(t), v_0^c(t))$ 为具参数 v_0^c 的不动点。令

$$g_\varepsilon^{cs}(v_0^c) = \gamma_0^+(0) \tag{9.2.88}$$

容易验证 g_ε^{cs} 对 θ 的 2π 周期性和命题 9.2.8 中 g_ε^{cs} 的性质。

F^{cs} 的不动点 g_0 对 ε 的光滑性更为复杂些。设 $g_0\in F^{cs}_{\lambda,n}$ 为 Γ^{cs} 具参数 $v_0^c\in N_n^{cs}$ 的不动点，形式上有

$$D_\varepsilon g_0 = D_\varepsilon F^{cs}(g_0) + D_gF^{cs}(g_0)D_\varepsilon g_0$$

由于出现奇性扰动项 εu_{xx}，我们仅能期待 $D_gF^{cs}(g)\in\Gamma^{cs}_{\lambda,n-2}$。因此，$D_\varepsilon g\in\Gamma^{cs}_{\lambda,n-2}$ 是最好的。我们将证明 F^{cs} 的不动点 $g_0\in\Gamma^{cs}_{\lambda,1}$ 对 ε 是 Lip 的，$y\in Y_3$。我们能证明中心稳定流形对 ε 在 H^1 中是 Lip 的。

引理 9.2.12 设式(9.2.83)成立，$\forall y\in Y_3$，$g_0\in\Gamma^{cs}_{\lambda,1}$ 为 F^{cs} 的不动点，则

$$\| g_0(\varepsilon_2) - g_0(\varepsilon_1) \|_{\lambda,1} \leqslant CC_1(\lambda) | \varepsilon_2 - \varepsilon_1 |$$

$\forall$ 充分小的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，其中 C 仅依赖于 $M = \sup_{\beta\in Y_n}\beta$。

证明： 固定 $y\in Y_3$，利用不等式(9.2.73)，易证 F^{cs} 映照 $B^{cs}_{\lambda,3}(C_0\delta)$ 为它自己，$y\in Y_3$，式(9.2.83)成立。

对任何 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$，$\varepsilon_0>0$ 充分小，令 $g_1(\varepsilon)=0\in B^{cs}_{\lambda,3}(C_0\delta)$，考虑迭代序列 $g_k(\varepsilon) = F^{cs}(\varepsilon, g_{k-1}(\varepsilon))$，$k\geqslant 2$。因 F^{cs} 映照 $B^{cs}_{\lambda,3}(C_0\delta)$ 为它自己。我们有 $g_k(\varepsilon)\in B^{cs}_{\lambda,3}(C_0\delta)$，$\forall k,\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$。令 $g_k(\varepsilon,t) = (\gamma_k^+(\varepsilon,t), v_k^c(\varepsilon,t))$，对任何 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in[0,\varepsilon_0)$，$t\geqslant 0$，从 $|v_0^c|_{3,0}\leqslant\delta$ 和不等式(9.2.74)，不等式(9.2.76)可得

$$\begin{aligned}
&| \gamma_{k+1}^+(\varepsilon_2,t) - \gamma_{k+1}^+(\varepsilon_1,t) | e^{-\lambda t} \leqslant \\
&e^{-\lambda t}\int_t^\infty e^{\sigma(t-s)} | \tilde{A}^+(\varepsilon_2, g_k(\varepsilon_2,s)) - \\
&\tilde{A}^+(\varepsilon_1, g_k(\varepsilon_1,s)) | ds \leqslant \\
&C\int_t^\infty e^{\sigma(t-s)-\lambda t}(| \varepsilon_2 - \varepsilon_1 | + \delta | g_k(\varepsilon_2,s) - \\
&g_k(\varepsilon_1,s) |_{1,1} ds \leqslant C(| \varepsilon_2 - \varepsilon_1 | + \\
&C_1(\lambda)\delta \| g_k(\varepsilon_2) - g_k(\varepsilon_1) \|_{\lambda,1}
\end{aligned} \tag{9.2.89}$$

$$| v_{k+1}^c(\varepsilon_2,t) - v_{k+1}^c(\varepsilon_1,t) | e^{-\lambda t} \leqslant$$

$$e^{-\lambda t}|(e^{B^c t}|_{\varepsilon_2}-e^{B^c t}|\varepsilon_1)v_0^c|_{1,1}+$$

$$e^{-\lambda t}\int_0^t[|(e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon_2}-e^{B^c(t-s)}|_{\varepsilon_1})\tilde{A}^c(\varepsilon_2,g_k(\varepsilon_2,s))|_{1,1}+$$

$$C(1+t-s)|\tilde{A}^c(\varepsilon_2,g_k(\varepsilon_2,s)-$$

$$\tilde{A}^c(\varepsilon_1,g_k(\varepsilon_1,s))|_{1,1}]ds\leqslant$$

$$Cte^{-\lambda t}|\varepsilon_2-\varepsilon_1||v_0^c|_{3,0}+$$

$$e^{-\lambda t}\int_0^t[C(t-s)|\varepsilon_2-\varepsilon_1||\tilde{A}^c(\varepsilon_2,g_k(\varepsilon_2,s))|_{3,0}+$$

$$C(1+t-s)(|\varepsilon_2-\varepsilon_1|+\delta|g_k(\varepsilon_2,s)-$$

$$g_k(\varepsilon_1,s)|_{1,1})]ds\leqslant$$

$$CC_1(\lambda)(|\varepsilon_2-\varepsilon_1|+\delta\|g_k(\varepsilon_2)-g_k(\varepsilon_1)\|_{\lambda,1})+$$

$$C\int_0^t e^{-\lambda t}(t-s)|\varepsilon_2-\varepsilon_1|(\varepsilon_2+\delta|g_k(\varepsilon_2\delta)|_{3,0})ds\leqslant$$

$$CC_1(\lambda)(|\varepsilon_2-\varepsilon_1|+\delta\|g_k(\varepsilon_2)-g_k(\varepsilon_1)\|_{\lambda,1})\qquad(9.2.90)$$

注意到 g_1 的 Lip 常数为零。从条件式(9.2.83)和上面估计,由归纳法可知

$$\|g_k(\varepsilon_2)-g_k(\varepsilon_1)\|_{\lambda,1}\leqslant CC_1(\lambda)|\varepsilon_2-\varepsilon_1|,\forall k\text{ 和 }\varepsilon_1,\varepsilon_2\in[0,\varepsilon_0)$$

C 仅依赖于 M。

另一方面,F^{cs} 在 $B^{cs}_{\lambda,1}(C_0\delta)$ 是压缩的。令 $g_0(\varepsilon)$ 表示 F^{cs} 的不动点。则 $\|g_k(\varepsilon)-g_0(\varepsilon)\|_{\lambda,1}\to 0$,对 ε 一致成立。因此 $g_0(\varepsilon)$ 对 ε 为 Lip 的,其 Lip 常数为 $CC_1(\lambda)$,它与 $y\in Y_3$ 无关。

最后,选取 $\lambda\in(5\delta,\sigma/5)$,小的 $\delta>0$,使得条件式(9.2.83)成立。g_ε^{cs} 为式(9.2.88)所定义,从引理 9.2.2,$g_\varepsilon^{cs}(v^c)$ 对 ε 是 Lip 的,$v^c\in N_3^{cs}$,命题 9.2.8 已证。

以下考虑稳定流形,对充分小 $\varepsilon>0$,方程(9.1.1)具有鞍点 Q_ε,从式(9.1.8)和式(9.2.1),能期望 Q_ε 具有一个余维 2 的稳定流形。从曲线

$$P_\varepsilon^s=\{(j,\theta)\mid j=\phi_\nu^s(\theta),\theta\in[\theta_1,\theta_2]\}$$

为在常数平面 Π_c 中 Q_ε 稳定曲线的一个子集,$\nu=\varepsilon^{1/2}$,$j=J/\nu$。因此,P_ε^s 为 Q_ε 的余维 2 稳定流形的一个子集。而稳定流形可看成沿 P_ε^s 的一条纹。问题在于这条纹的宽度。在式(9.1.8)和式(9.2.1)中的最弱稳定特征值的阶数为 $O(\varepsilon)$。依通常的原理仅能产生稳定纹的宽度为 $O(\varepsilon)$,它不是充分大使我们可构造同宿轨线。在文献[96]中一个规范形式的变换被用来消去方程(9.1.13)中的平方项,去证明稳定流形的宽度为 $O(\varepsilon^{3/4})$。这里,我们采用不同的方法来证(显然规范变换这里也用到)。注意到最弱稳定特征值为 $O(\varepsilon)$,在最弱稳定特征值与最弱不稳定特征值之间的差为 $O(\varepsilon^{1/2})$。因此我们首先能构造一个沿着 ϕ_ε^s,宽度为 $O(\varepsilon^{1/2})$ 局部不变流形。它对 Q_ε 的稳定流形是不必要的。但这些轨线在这个流形上不会增长快于 $\exp(a\varepsilon^{1/2})$,$a>0$。由能量泛函,我们能估计 Q_ε 的吸引盆作为这个流形的子集的大小。

固定充分小 $\varepsilon>0$,$\nu=\varepsilon^{1/2}$,$j=\nu^{-1}J$,从方程(9.1.13)

$$j_t=-2\nu(\alpha(\nu j+\omega^2)+\beta\sqrt{\nu j+\omega^2}\cos\theta)+\nu Q_1\qquad(9.2.91)$$

$$\theta_t=-2\nu j-\frac{\varepsilon\beta}{\sqrt{\nu j+\omega^2}}\sin\theta+Q_2\qquad(9.2.92)$$

稳定曲线 $P_\varepsilon^s\subset\Pi_c$ 给定为 $j=\phi_\nu^s(\theta)$,$\theta\in[\theta_1,\theta_2]$,其中 $\hat{\theta}<\theta_1<\theta_0<\theta_2<\hat{\theta}+2\pi$,$\hat{\theta}$ 为式(1.6)所定义。ϕ_ν^s 为 θ,ν,α 和 β 的光滑函数,因

$$\phi_0^s=\frac{\theta-\theta_0}{|\theta-\theta_0|}\sqrt{2\omega(\alpha\omega(\theta-\theta_0)+\beta(\sin\theta-\sin\theta_0))}$$

存在 $a>0$,使得 $(\phi_\nu^s)'>a$,$\forall\theta\in[\theta_1,\theta_2]$,对于充分小 $\nu\geqslant 0$。

令

$$N^s=\{(\theta,\gamma^-,h)\mid |h|_1,|\gamma^-|<\delta\varepsilon^{1/2},\theta\in(\theta_1+C\delta,\theta_2-C\delta)\}$$

其中 $\delta>0$ 为充分小,待定。

命题 9.2.13 设

$$4(1-\omega^2)(4+\alpha)^2 > \omega^2(\beta^2-\alpha^2\omega^2) > 0 \quad (9.2.93)$$

则存在 $\delta>0$ 与 ε,α,β 无关,和 Lip 函数 $g_\varepsilon^s:N^s\to R$ 使得 $g_\varepsilon^s(\theta,0,0)=\phi_\varepsilon^s(\theta)$,对任何$(\theta,\gamma^-,h)\in N^s$,轨线开始于$(j,\theta,\gamma^+,\gamma^-,h)$,$j=g_\varepsilon^s(\theta,\gamma^-,h)$,$\gamma^+=g_\varepsilon^{cs}(\gamma_j,\theta,\gamma^-,h)$,当 $t\to\infty$时,趋于 Q_ε。

命题 9.2.13 的第一部分是一个技术性条件,在文献[96]中利用规范变换,此种条件对于构造稳定流形是不必要的。然而规范变换的存在性依赖于非共振条件,在某种情况下,要验证这种条件是很困难的。这里我们利用另一种能量泛函的方法来证明。此时条件式(9.2.93)出现于估计中,注意到 $\beta>\alpha\omega$ 对于鞍点 Q_ε 的存在性是必要的。

Q_ε 的稳定流形给定为

$$W_\varepsilon^s=\{(j,\theta,\gamma^+,\gamma^-,h)\mid(\theta,\gamma^-,h)\in N^s,j=g_\varepsilon^s(\theta,\gamma^-,h),$$
$$\gamma^+=g_\varepsilon^{cs}(\nu j,\theta,\gamma^-,h)\}$$

为了证明命题 9.2.13,我们用异于(j,θ)坐标使得在 Π_ε 上的方程弱耦合。令 $y=j-\phi_\varepsilon^s$,$\xi=\theta-\theta_\varepsilon$,$Q_\varepsilon=(j_\varepsilon,\theta_\varepsilon)$,有

$$y_t=\nu\tilde\phi'(\xi)y+\varepsilon g_1(\nu y,\xi)y+$$
$$\nu Q_1-(\tilde\phi_\varepsilon^s)(\xi+\theta_\varepsilon)Q_2 \quad (9.2.94)$$

$$\xi_t=-\nu\tilde\phi(\xi)-2\nu y+\nu^3g_2(\nu y,\xi)y+Q_2 \quad (9.2.95)$$

其中 g_1,g_2 为光滑函数,且

$$\tilde\phi(\xi)=2\phi_\varepsilon^s(\xi+\theta_\varepsilon)-\frac{\nu\beta\sin(\xi+\theta_\varepsilon)}{\sqrt{\nu\phi_\varepsilon^s(\xi+\theta_\varepsilon)+\omega^2}}$$

注意到 $\tilde\phi(0)=0$。在 ξ 的方程中,$-2\nu y$ 是一个麻烦的项,我们将从变换中消去。令 $\Omega=\xi+b(\xi)y$,则有

$$\Omega_t=-\nu\tilde\phi(\Omega)+\nu(2b(\xi)\tilde\phi'(\xi)-b'(\xi)\tilde\phi(\xi)-2)y+$$
$$b'(\xi)y(-2\nu y+\nu^3g_2(\nu y,\xi)y+Q_2+$$
$$\varepsilon g_2(\Omega,y)y+\nu g_4(\Omega,y)\tilde\phi'(\xi)-b'(\xi)\tilde\phi(\xi)-2\nu y]$$

其中 g_3,g_4 为 b 的光滑函数。事实上,如 $b(\xi)$满足

$$2b(\xi)\tilde\phi'(\xi)-b'(\xi)\tilde\phi(\xi)-2=0$$

则很理想。不幸的是,这个方程的任意解在$[\theta_1-\theta_\varepsilon,\theta_2-\theta_\varepsilon]$上在 O 点处不是 C^2,且 $\tilde\phi(0)=0$。设 $b(t)$为如下方程的解:

$$(2+\nu)\tilde\phi'(\xi)b(\xi)-b'(\xi)\tilde\phi(\xi)-2=0 \quad (9.2.96)$$

在$[\theta_1-\theta_\varepsilon,\theta_2-\theta_\varepsilon]$上有 $b(\theta_1-\theta_\varepsilon)=b(\theta_2-\theta_\varepsilon)=0$。容易验证 $b(\xi)$是光滑的,且

$$\partial_\alpha b(\xi),\partial_\beta b(\xi),b(\xi),b'(\xi),\partial_\beta b'(\xi)=O(1),\quad b''(\xi)=O(\nu^{-1})$$

在$[\theta_1-\theta_\varepsilon,\theta_2-\theta_\varepsilon]$上。因此坐标变换从$(j,\theta)$到$(y,\Omega)$是微分同胚的($|y|$是小的),且

$$\left|\frac{\partial(y,\Omega)}{\partial(J,\theta)}\right|,\quad\left|\frac{\partial(J,\theta)}{\partial(y,\Omega)}\right|=O(1)$$

Ω 的方程变为

$$\Omega_t=-\nu\tilde\phi(\Omega)+b'(\xi)y[-2\nu y+\nu^3g_2(\nu y,\xi)y+Q_2]+$$
$$\varepsilon g_5(\Omega,y)y+\nu g_4(\Omega,y)y^2+Q_2+$$
$$b(\xi)[\nu Q_1-\nu(\phi_\varepsilon^s)'(\xi+\theta_\varepsilon)Q_2] \quad (9.2.97)$$

其中 g_4,g_5 为光滑函数。

我们仅工作在中心稳定流形 W_ε^{cs} 上,其中 γ^+是由 J,θ,γ^-和 h 决定的,且 $\gamma^+=g_\varepsilon^{cs}(J,\theta,\gamma^{-1},h)$。令 $\hat g^{cs}(y,\Omega,\gamma^-,h)=g_\varepsilon^{cs}(J,\theta,\gamma^-,h)$,它表明中心流形 W_ε^{cs} 在 P_ε^s 的一个邻域内。注意到 $\hat g(y,\Omega,0,0)=0$

$$|\hat g^{cs}(y,\Omega,\gamma^-,h)|\leqslant C\delta(|\gamma^-|+|h|_1)$$

从方程(9.2.2),式(9.2.4),能写 γ^-和 h 方程

$$\gamma_t^-=-\sigma\gamma^-+g_6(y,\Omega,\gamma^-,h)+Q_{3,1}^-+Q_{4,1}^- \quad (9.2.98)$$

$$h_t=B_\varepsilon(\Omega)h+G(\Omega,y)h-iQ_{3\times}-iQ_{4\times} \quad (9.2.99)$$

其中

$$B_\varepsilon(\Omega)h = -ih_{xx} - 2i\omega^2(h+\bar{h}) + \varepsilon(h_{xx} - ah) - 2i\nu\phi_\nu^\varepsilon(\Omega+\theta_\varepsilon)(h+\bar{h}) - i\frac{\varepsilon\beta\sin(\Omega+\theta_\varepsilon)}{\sqrt{\omega^2 - \nu\phi_\nu^\varepsilon(\Omega+\theta_\varepsilon)}} \tag{9.2.100}$$

$$|g_6| \leqslant C\nu(1+|y|)(|\gamma^-|+|h|_1)$$

$$|G(\Omega,y)| \leqslant C\nu|y|$$

再令 $\hat{\eta}\in C^\infty(R,R)$为横截函数,满足

$$\mathrm{supp}\hat{\eta}\subset(-4,4),\quad \hat{\eta}=1, 在(-2,2)上且 |\hat{\eta}'|<1$$

令 $\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}(\cdot/\delta\nu)$

$$\hat{\eta}_1(y,\gamma^-,h) = \hat{\eta}_1(y)\hat{\eta}_1(\gamma^-)\hat{\eta}_1(|h|_1)$$

考虑如下改进方程组:

$$y_t = \nu\tilde{\phi}'(\Omega)y + \hat{A}_y(y,\Omega,\gamma^-,h)$$

$$\begin{cases}\Omega_t = -\nu\psi(\Omega)\Omega + \hat{A}_\Omega(y,\Omega,\gamma^-,h)\\ \gamma_t^- = -\sigma\gamma^+ + \hat{A}_-(y,\Omega,\gamma^-,h)\\ h_t = B_\varepsilon(\Omega)h + \hat{A}_h(y,\Omega,\gamma^-,h)\end{cases} \tag{9.2.101}$$

其中

$$\psi(\Omega) = \frac{\tilde{\phi}(\Omega)}{\Omega} \geqslant 2a > 0$$

对于 $\Omega\in[\theta_1-\theta_\varepsilon+C\delta, \theta_2-\theta_\varepsilon-C\delta]$, $\hat{A}_y,\hat{A}_\Omega,\hat{A}_-$ 和 $\hat{A}_h$ 为乘以截断函数 $\hat{\eta}_1(y,\gamma^-,h)$的高阶项。这些项对于小的 y 和$\Omega\in[\theta_1-\theta_\varepsilon+C\delta,\theta_2-\theta_\varepsilon-C\delta]$满足:

$$|\hat{A}_y| \leqslant C\hat{\eta}_1(y,\gamma^-,h)(\varepsilon|y|+\nu|y|^2+|\gamma^-|^2+|h|_1^2) \leqslant C\delta^2\varepsilon \tag{9.2.102}$$

$$|\hat{A}_\Omega| \leqslant C\hat{\eta}_1(y,\gamma^-,h)(\varepsilon|y|+\nu|y|^2+|\gamma^-|^2+|h|_1^2) \leqslant C\delta^2\varepsilon \tag{9.2.103}$$

$$|\hat{A}_h|_1 \leqslant C\hat{\eta}_1(y,\gamma^-,h)(\nu|y||h|_1+|\gamma^-|^2+|h|_1^2) \leqslant C\delta^2\varepsilon \tag{9.2.104}$$

$$|\hat{A}_-| \leqslant C\hat{\eta}_1(y,\gamma^-,h)(\nu|\gamma^-|+\nu|h|_1+|\gamma^-|^2+|h|_1^2) \leqslant C\delta^2\varepsilon \tag{9.2.105}$$

$$|D\hat{A}_y|+|D\hat{A}_\Omega|+|D\hat{A}_h| \leqslant C\delta\nu,\quad |D\hat{A}_-| \leqslant C\nu \tag{9.2.106}$$

其中的导数是对 $\Omega,y,\gamma^-,h,\alpha$ 和 β。注意上面的估计不要求$|\Omega|$充分小。固定 $C_2>\max\{\theta_2-\theta_\varepsilon,\theta_\varepsilon-\theta_1\}$,令

$$\Gamma^s = \{y(t) = (g(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t)) \mid t\geqslant 0, g(t)\in C^0 对 t, \Omega(t)\in[\theta_2-\theta_\varepsilon+C\delta,\theta_2-\theta_1-C\delta]\} \tag{9.2.107}$$

显然 Γ^s 为完备的度量空间,在模 $\|\cdot\|$ 上,我们确定 Γ^s 的压缩性。

固定 $\Omega_0\in[\theta_1-\theta_\varepsilon+C\delta,\theta_2-\theta_\varepsilon-C\delta]$, $\gamma_0^-\in(-C_2/2,C_2/2)$, h_0 有 $|h_0|_1\leqslant\frac{1}{2}C_2$。对于任何 $g\in\Gamma^s$, $g(t)=(y(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t))$,令 $\tilde{\Omega}(t),\tilde{\gamma}^-(t),\tilde{h}(t)$为如下问题的解:

$$\begin{cases}\tilde{\Omega}_t = -\nu\psi(\tilde{\Omega})\tilde{\Omega} + \hat{A}_\Omega(g(t))\\ \tilde{\gamma}_t^- = -\sigma\tilde{\gamma}^- + \hat{A}_-(g(t))\\ \tilde{h}_t = B_\varepsilon(\tilde{\Omega})\tilde{h} + \hat{A}_h(g(t))\end{cases} \tag{9.2.108}$$

$\tilde{\Omega}(0)=\Omega_0,\tilde{\gamma}^-(0)=\gamma_0^-,\tilde{h}(0)=h_0$。对任何 $t\geqslant 0$,令

$$\tilde{y}(t) = \int_{+\infty}^t \exp\left\{\nu\int_s^t\tilde{\phi}'(\Omega(\tau))\mathrm{d}\tau\right\}\hat{A}_y(g(s))\mathrm{d}s \tag{9.2.109}$$

定义 $F^s(g)=\tilde{g}$,其中 $\tilde{g}(t)=(\tilde{y}(t),\tilde{\Omega}(t),\tilde{\gamma}^-(t),\tilde{h}(t))$。容易证明 g 为 F^s 的一个不动点,当且仅当它是方程(9.1.101)的一个解。在我们开始证明 F^s 在Γ^s 上压缩前,需要以下引理。

引理 9.2.14 对任何 $g\in\Gamma^s$,$\tilde{\Omega}(t)$为式(9.2.108)所定义。由 $B_\varepsilon(\tilde{\Omega}(t))$ 形成的发展算子 $U(t,s)$ 是有界于 $C\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon(4+\alpha)(t-s)\right\}$,其中 C 与δ,ε,g 无关。

证明:考虑问题中的 F 氏系数,令 $B_{k,\varepsilon}(t)$ 为 $B_\varepsilon(\tilde{\Omega}(t))$ 在二维实空间(由 $\{\cos kx\}$ 所张,$k\geqslant 2$)的限制。则 $B_{k,\varepsilon}(t)$ 可表为矩阵

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon(k^2+\alpha) & -k^2+\nu a_1(\tilde{\Omega}(t)) \\ k^2-4\omega^2+\nu a_2(\tilde{\Omega}(t)) & -\varepsilon(k^2+\alpha) \end{pmatrix} \tag{9.2.110}$$

其中 a_1 和 a_2 为光滑函数。$B_{k,\varepsilon}(t)$ 具有特征值 $-\varepsilon(k^2+\alpha)\pm iD(k)$。其中

$$D(k)=\sqrt{(k^2-\nu a_1(\tilde{\Omega}(t)))(k^2-4\omega^2-\nu a_2(\tilde{\Omega}(t)))}$$

$B_{k,\varepsilon}(t)$ 能通过矩阵 $V(k)$ 对角化,有

$$V(k)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{iD(k)}{k^2-\nu a_1(\tilde{\Omega}(t))} & \dfrac{-iD(k)}{k^2-2\nu a_1(\tilde{\Omega}(t))} \end{pmatrix} \tag{9.2.111}$$

即 $\Lambda(k)=V(k)^{-1}B_{k,\varepsilon}(t)V(k)$ 为对角阵。设 $h(t)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\hat{h}_k(t)(\cos kx)$ 满足 $h_t=B_\varepsilon(\tilde{\Omega}(t))h$。考虑 h_k 为二维实向量及令 $\hat{w}_k=V(k)^{-1}h_k$,则可得

$$\partial_t\hat{w}_k=\Lambda(k)\hat{w}_k+V(k)^{-1}V_t(k)\hat{w}_k$$

其中

$$\|V(k)^{-1}V_t(k)\|\leqslant\frac{C\nu}{k^2}|\tilde{\Omega}_t(t)|$$

这里常数 C 与 ε,k 无关。从式(9.2.103)和式(9.2.108),当 $\tilde{\Omega}=\theta_2-\theta_\varepsilon+C\delta$,

$$\tilde{\Omega}_t<-a\nu(\theta_2-\theta_\varepsilon)+C\delta^2\varepsilon<0$$

类似地,当 $\tilde{\Omega}=\theta_\varepsilon-\theta_1-C\delta$,$\tilde{\Omega}_t>0$。令 $\Omega_0\in[\theta_1-\theta_\varepsilon+C\delta,\theta_2-\theta_\varepsilon-C\delta]$,因此,$\tilde{\Omega}(t)\in[\theta_1-\theta_\varepsilon+C\delta,\theta_2-\theta_\varepsilon-C\delta]$,$\forall t\geqslant 0$。从式(9.2.108)和常数变易公式,对 $t\geqslant 0$ 有

$$|\tilde{\Omega}(t)|\leqslant e^{-\nu\int_0^t\psi(\tilde{\Omega}(\tau))d\tau}|\Omega_0|+$$

$$\int_0^t e^{-\nu\int_s^t\psi(\tilde{\Omega}(\tau))d\tau}|\hat{A}_\Omega(g(s))|ds\leqslant$$

$$e^{-2a\nu t}\cdot\Omega_0+C\delta^2\nu \tag{9.2.112}$$

因此

$$|\tilde{\Omega}_t|\leqslant C\nu e^{-2a\nu t}+C\delta^2\varepsilon$$

于是对任何 $t\geqslant t_1>0$,使得对一切 $s\in[t_1,t]$ 有

$$|\hat{w}_k(s)|\leqslant 2e^{-\frac{1}{2}\varepsilon(k^2+\alpha)(s-t_1)}|\hat{w}_k(t_1)| \tag{9.2.113}$$

我们有

$$|\hat{w}_k(t)|\leqslant|e^{\int_{t_1}^t\Lambda(k,\tau)d\tau}\hat{w}_k(t_1)|+$$

$$C\varepsilon\int_0^t\|e^{\int_s^t\Lambda(\tau)d\tau}\|(e^{-2a\nu s}+\delta^2\nu)|\hat{w}_k(s)|ds\leqslant$$

$$e^{-\varepsilon(k^2+\alpha)(t-t_1)}|\hat{w}_k(t_1)|+$$

$$C\varepsilon\int_{t_1}^t e^{-\varepsilon(k^2+\alpha)(t-s)}(e^{-2a\nu s}+\delta^2\nu)e^{\frac{-\varepsilon(k^2+\alpha)}{2}(s-t_1)}|\hat{w}_k(t_1)|ds\leqslant$$

$$e^{-\varepsilon(k^2+\alpha)(t-t_1)}|\hat{w}_k(t_1)|+$$

$$C\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon(k^2+\alpha)}{2}(t-t_1)}|\hat{w}_k(t_1)|\int_{t_1}^t e^{\frac{-\varepsilon(k^2+\alpha)}{2}(t-s)}(e^{-2a\nu s}+\delta^2\nu)ds\leqslant$$

$$(1+C\nu)e^{\frac{-\varepsilon(k^2+\alpha)}{2}(t-t_1)}|\hat{w}_k(t_1)| \tag{9.2.114}$$

因条件式(9.2.113)对 $t\geqslant t_1$ 是满足的,上述估计和连续性原理推出式(9.2.113)满足对 $t\geqslant t_1$,因此

$$|h_k(t)|\leqslant C|\hat{w}_k(t)|\leqslant Ce^{\frac{-\varepsilon(k^2+\alpha)}{2}(t-t_1)}|\hat{w}_k(t_1)|$$

$$\leqslant Ce^{\frac{-\varepsilon(k^2+\alpha)}{2}(t-t_1)}|h_k(t_1)|,\quad\forall t>t_1$$

其中 C 与 ε,k 无关,引理得证。

引理 9.2.15 F^ε 在 Γ^ε 上压缩且具有 Lip 常数 $C\delta$

证明：我们证明 $F^s(g)\in\Gamma^s$，$\forall g\in\Gamma^s b$ 设 $g(t)=(y(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t))$；$\tilde g=F^s(g)$，$\tilde g(t)=(\tilde y(t),\tilde\Omega(t),\tilde\gamma^-(t),\tilde h(t))$。

设 $C_2>\max\{\theta_2-\theta_\epsilon,\theta_\epsilon-\theta_1\}$，基于式(9.2.12)可得

$$e^{-a\nu t}|\tilde\Omega(t)|\le C_2,\quad \forall t\ge 0$$

从引理9.2.14有 $|\gamma_0^-|,|h_0|_1\le\frac{1}{2}C_2$，由常数变分原理，可得 $\tilde\gamma^-$，$\tilde h$ 的类似增长估计。对 $\tilde y$ 的估计可从式(9.2.109)和 $\tilde\phi'>2a$ 得到。因此，$\tilde g\in\Gamma^s$。

其次，证 F^s 是压缩的，对任何 $g_1,g_2\in\Gamma^s$，$g_k(t)=(y_k(t),\Omega_k(t),\gamma_k^-(t),h_k(t))$，$\tilde g_k=F^s(g_k)$，$\tilde g_k(t)=(\tilde y_k(t),\tilde\Omega_k(t),\tilde\gamma_k^-(t),\tilde h_k(t))$，$k=1,2$。从不等式(9.2.106)有

$$|\tilde y_2(t)-\tilde y_1(t)|\le\int_t^\infty\Big[\Big(e^{-\nu\int_t^s\tilde\phi'(\Omega_2(\tau))d\tau}-e^{-\nu\int_t^s\tilde\phi'(\Omega_1(\tau))d\tau}\Big)\hat A_y(g_2(s))+e^{-\nu\int_t^s\tilde\phi'(\Omega_1(\tau))d\tau}|\hat A_y(g_2(s)-\hat A_y(g_1(s))|\Big]ds \qquad (9.2.115)$$

$$\le\int_t^\infty e^{-2a\nu(s-t)}\Big[C\delta^2\nu^3\int_t^s|\Omega_2(\tau)-\Omega_1(\tau)|d\tau+C\delta\nu|g_2(s)-g_1(s)|_1\Big]ds\le C\delta^2\nu^3\|g_2-g_1\|_s\int_t^\infty e^{-2a\nu(s-t)}\int_t^s e^{a\nu\tau}d\tau ds+C\delta e^{a\nu t}\|g_2-g_1\|_s\le C\delta e^{a\nu t}\|g_2-g_1\|_s$$

为了估计 $|\tilde\Omega_2(t)-\tilde\Omega_1(t)|$，设 $\psi(\tilde\Omega)\tilde\Omega=\tilde\phi(\tilde\Omega)$，于是

$$(\tilde\Omega_2-\tilde\Omega_1)_t=\nu(\tilde\phi(\tilde\Omega_2)-\tilde\phi(\tilde\Omega_1)+\hat A_\Omega(g_2(t))-\hat A_\Omega(g_1(t))$$

由常数变易法可得

$$|\tilde\Omega_2(t)-\tilde\Omega_1(t)|\le\int_0^t e^{-\nu\int_s^t\frac{(\tilde\phi(\tilde\Omega_2(\tau))-\tilde\phi(\tilde\Omega_1(\tau))}{\tilde\Omega_2(\tau)-\tilde\Omega_1(\tau)}}$$

$$d\tau\,|\hat A_\Omega(g_2(s))-\hat A_\Omega(g_1(s))|ds\le C\delta\nu\int_0^t e^{-2a\nu(t-s)}|g_2(s)-g_1(s)|_1ds\le C\delta e^{a\nu t}\|g_2-g_1\|_s \qquad (9.2.116)$$

接下来考虑 $\tilde h_2-\tilde h_1$，从式(9.2.108)，有

$$(\tilde h_2-\tilde h_1)_t=B_\epsilon(\tilde\Omega_1)(\tilde h_2-\tilde h_1)+(B_\epsilon(\tilde\Omega_2)-B_\epsilon(\tilde\Omega_1))\tilde h_2+\hat A_h(g_2(t))-\hat A_h(g_1(t))$$

令 $U_k(t,s)$表示由 $B_\epsilon(\tilde\Omega_k(t))(k=1,2)$形成的发展算子。从式(9.2.108)和引理9.2.14有

$$|\tilde h_2(t)|_1\le|U_2(t,0)h_0|_1+\int_0^t|U_2(t,s)\hat A_h(g_2(s))|_1ds\le C|h_0|_1+\int_0^tCe^{-\epsilon(t-s)}\delta^2\epsilon ds\le C(|h_0|_1+\delta^2)$$

注意到

$$\|B_\epsilon(\tilde\Omega_2)-B_\epsilon(\tilde\Omega_1)\|\le C\nu\|\tilde\Omega_2-\tilde\Omega_1\|$$

因此，利用式(9.2.116)可得

$$|h_2(t)-h_1(t)|_1\le\int_0^t|U_1(t,s)[(B_\epsilon(\tilde\Omega_2(s))-B_\epsilon(\tilde\Omega_1(s)))\tilde h_2(s)+\hat A_h(g_2(s))-\hat A_h(g_1(s))]|_1ds\le\int_0^tCe^{-\epsilon(t-s)}(\nu|\tilde\Omega_2(s)-\tilde\Omega_1(s)||\tilde h_2(s)|_1+\delta\nu|g_2(s)-g_1(s)|_1)ds\le C\nu e^{a\nu t}\int_0^te^{-(\epsilon+a\nu)(t-s)}(C\delta\|\tilde g_2-\tilde g_1\|_s(\|h_0\|_1+\delta^2)+\delta\|g_2-g_1\|_s)ds\le C\delta e^{a\nu t}\|g_2-g_1\|_s \qquad (9.2.117)$$

$|\tilde\gamma_2^- - \tilde\gamma_1^-|$的估计是容易和类似的，因此，$F^s$ 的 Lip 常数是

$C\delta$。

引理 9.2.15 推出存在惟一 $g_0 \in \Gamma^s$ 使得 $F^s(g_0)=g_0$, g_0 依赖于参数 $\Omega_0, \gamma_0^-, h_0, \alpha$ 和 β。

引理 9.2.16　F^s 对参数 $\Omega_0, \gamma_0^-, h_0, \alpha$ 和 β 是 Lip 连续的。

引理的证明仅直接由常数变易法和不等式(9.2.106)得到,从这个引理,不动点 g_0 对参数 $\Omega_0, \gamma_0^-, h_0, \alpha, \beta$ 是 Lip 的。

证明:设 $g_0(t)=(y(t), \Omega(t), \gamma^-(t), h(t))$,定义

$$\hat{g}_\varepsilon^s(\Omega_0, \gamma_0^-, h_0) = y(0)$$

$\hat{g}_\varepsilon^s$ 对 $\Omega_0, \gamma_0^-, h_0, \alpha, \beta$ 是 Lip 的。代入 g_0 对 $\Omega_0, \gamma_0^-, h_0$ 的 Lip 依赖于方程(9.2.109),易知

$$\mathrm{Lip}\hat{g}_\varepsilon^s \leqslant C\delta \tag{9.2.118}$$

显然,$\hat{g}_\varepsilon^s(\Omega,0,0)=0$,因此

$$|\hat{g}_\varepsilon^s(\Omega_0, \gamma_0^-, h_0)| \leqslant C\delta(|\gamma_0^-|+|h_0|_1)$$

局部不变流形 $y=\hat{g}_\varepsilon^s(\Omega, \gamma^-, h)$ 为截断方程(9.2.101)的轨线所组成。这些轨线具有指数增长率,大于 $\alpha\nu$。Q_ε 的曲线 $P_\varepsilon^s \subset \Pi_c$ 被含于这个流形中,我们将研究在这个流形中的吸引盆。

如 $|\gamma^-|, |h|_1 \leqslant 2\delta\nu$,系统式(9.2.101)用于式(9.1.1),我们考虑式(9.2.101)具初值$(y(0), \Omega(0), \gamma^-(0), h(0))$的解满足

$$\Omega(0) \in [\theta_1 - \theta_\varepsilon + C\delta, \theta_2 - \theta_\varepsilon - C\delta]$$

$$|\gamma^-(0)|, |h(0)|_1 \leqslant \delta\nu,$$

$$y(0) = \hat{g}_\varepsilon^s(\Omega(0), \gamma^-(0), h(0)) \tag{9.2.119}$$

对于这样的轨线$(y(t), \Omega(t), \gamma^-(t), h(t))$,有

$$|\gamma^-(t)| \leqslant e^{-\sigma t}|\gamma^-(0)| + C\nu\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(|\gamma^-(s)|+|h(s)|_1)ds$$

由 Gronwall 不等式,对 $t>0$ 可得

$$|\gamma^-(t)| \leqslant e^{-(\sigma-c\nu)t}|\gamma^-(0)| + C\nu\int_0^t e^{-(\sigma-c\nu)(t-\tau)}(|h(s)|_1)ds \tag{9.2.120}$$

利用这个估计,可证。

引理 9.2.17　式(9.2.101)的任何轨线$(y(t), \Omega(t), \gamma^-(t), h(t))$,当 $t\to\infty$ 时趋于 Q_ε,如果条件式(9.2.119)满足,且 $|\gamma^-(0)| \leqslant \delta\nu/2$, $|h(0)|_1 < \delta\varepsilon$。进一步,$(y(t), \Omega(t), \gamma^-(t), h(t))$也满足条件式(9.2.119), $\forall t \geqslant 0$。

证明:从式(9.2.108)、式(9.2.106),引理 9.2.14 和常数变易公式有

$$\begin{aligned}|h(t)|_1 \leqslant\ & |U(t,0)h(0)|_1 + C\int_0^t |U(t,s)|(\nu|y(s)| \\ & |h(s)|_1 + |h(s)|_1^2 + |\gamma^-(s)|^2)ds \leqslant \\ & Ce^{-\varepsilon(\alpha+\frac{\alpha}{2})t}|h(0)|_1 + C\int_0^t e^{-\varepsilon(2+\frac{\alpha}{2})(t-s)} \\ & (|h(s)|_1^2 + |\gamma^-(s)|^2)ds\end{aligned}$$

不等式(9.2.120)推出

$$|\gamma^-(t)|^2 \leqslant 2e^{-2(\sigma-c\nu)t}|\gamma^-(0)|^2 + C\varepsilon\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}|h(s)|_1^2 ds$$

其中我们用到了 Cauchy 不等式。因此,将它代入 $h(t)$的估计,可得

$$|h(t)|_1 \leqslant \tilde{C}e^{-\varepsilon(2+\frac{\alpha}{2})t}(|h(0)|_1 + |\gamma^-(0)|^2) + \tilde{C}\int_0^t e^{-\varepsilon(2+\frac{\alpha}{2})(t-s)}(|h(s)|_1^2 ds \tag{9.2.121}$$

其中 $\tilde{C} \geqslant 1$ 为常数。对任何 $t_0>0$,使得 $|h(t)|_1 \leqslant 2\tilde{C}\delta\varepsilon$, $\forall t \in [0, t_0]$,我们对 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 有

$$|h(t)|_1 \leqslant \tilde{C}e^{-\varepsilon(2+\frac{\alpha}{2})t}(|h(0)|_1 + |\gamma^-(0)|^2) + 2\tilde{C}^2\delta\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(2+\frac{\alpha}{2})(t-s)} \cdot h(s)ds$$

由 Gronwall 不等式得

$$|h(t)|_1 \leqslant \tilde{C}e^{-\varepsilon((2+\frac{\alpha}{2})+2\tilde{C}^2\delta)t}(|h(0)|_1 + |\gamma^-(0)|^2) \tag{9.2.122}$$

因$|h(0)|_1 \leqslant \delta\varepsilon$，$|\gamma^-(0)| \leqslant \delta\nu/2$，上面估计推出

$$|h(t)|_1 \leqslant \tilde{C}(1+\delta)\delta\varepsilon, \quad \forall t \in [0,t_0]$$

因此，由连续性，不等式(9.2.122)成立对一切 $t>0$。从式(9.2.120)得

$$|\gamma^-(t)| \leqslant e^{-(\sigma-\alpha)t}|\gamma^-(0)| + C\nu e^{-\varepsilon((2+\frac{\alpha}{2})+2\tilde{C}^2\delta)t}(|h(0)|_1 + |\gamma^-(0)|^2) \quad (9.2.123)$$

引理的其余部分来自式(9.2.122)和式(9.2.123)。

在以上引理中，因$(\gamma(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t))$满足条件式(9.2.119)，$\forall t>0$，它也是原来方程(9.1.1)的一条轨线。引理9.2.17推出 Q_ε 的吸引盆含有一条纹带，在 h 方向上沿着具宽度 $\delta\varepsilon$ 的稳定曲线 P_ε^s 和沿 γ^- 方向具宽度为 $\delta\nu/2$。其次，我们证明吸引盆实际上为 $O(\nu)$的一条纹带，这个证明分为两个部分。首先，我们研究这些轨线$(\gamma(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t))$具$|h(0)|_1$，$|\gamma^-(0)| \leqslant \delta^2\nu$，$t<(\delta\nu)^{-1}$。对于 $t=(\delta\nu)^{-1}$，有

$$|\gamma^-(t)| \leqslant C\delta\varepsilon, \ |\Omega(t)| \leqslant Ce^{-2\alpha\delta^{-1}}, \ |h(t)|_1 \leqslant C\delta^2\nu$$

其次在 Q_ε 的邻域，我们利用未扰动 NLS 的不变泛函证明这些轨线趋于 Q_ε。

引理 9.2.18 设$(\gamma(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t))$为截断方程(9.2.101)满足式(9.2.119)在 $t=0$ 的解。如$|\gamma^-(0)|$，$|h(0)|_1 \leqslant \delta^2\nu$，则对一切$t\in[0,(\delta\nu)^{-1}]$，我们有

$$|h(t)|_1 \leqslant C\delta^2\nu, \quad |\gamma(t)| \leqslant e^{-(\alpha-\alpha)t}|\gamma^-(0)| + C\delta^2\varepsilon$$

且
$$|\Omega(t)| \leqslant e^{-2\alpha t}|\Omega(0)| + C\delta^4\nu$$

更进一步，条件式(9.2.119)对于$(\gamma(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t))$，$\forall t\in[0,(\delta\nu)^{-1}]$满足。

证明：对任何 $t_0 \leqslant (\delta\nu)^{-1}$，令 $m(t_0)=\sup\{|h(s)|_1 \mid t\in[0,t_0]\}$，我们有

$$m(t_0) = \sup_{t\in[0,t_0]}|h(t)|_1 \leqslant \tilde{C}(|h(0)|_1 + |\gamma(0)|_1^2 + t_0 m(t_0)^2)$$

解这个方程 $m(t_0)$，可得

$$2\tilde{C}t_0 m(t_0) \leqslant 1-\sqrt{1-4\tilde{C}^2 t_0(|h(0)|_1+|\gamma(0)|_1^2)} < 1$$

或

$$2\tilde{C}t_0 m(t_0) \geqslant 1+\sqrt{1-4\tilde{C}^2 t_0(|h(0)|_1+|\gamma(0)|_1^2)} > 1$$

注意到 $2\tilde{C}t_0 m(t_0)$对 t_0 连续，且当 $t_0=0$ 时为零，因此，对一切 $t_0\in[0,(\delta\nu)^{-1}]$，有

$$|h(t_0)|_1 \leqslant m(t_0) \leqslant \frac{1-\sqrt{1-4\tilde{C}^2 t_0(|h(0)|_1+|\gamma(0)|_1^2)}}{2\tilde{C}t_0} \leqslant C(|h(0)|_1+|\gamma(0)|_1^2) \leqslant C\delta^2\nu$$

这个不等式给出 $h(t)$的估计，连同式(9.2.120)和式(9.2.103)可得对 $\gamma^-(t)$，$\Omega(t)$的估计。

引理 9.2.19 给定条件式(9.2.93)，如式(9.2.101)的轨线 $u(t)=(\gamma(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t))$满足条件：

$$|\gamma^-(t)| \leqslant \delta^{5/3}\varepsilon, \delta^{3/4}\nu \geqslant 2|h(t)|_1 \geqslant \delta^{-1/2}|\gamma^-(t)|, \quad |\Omega(t)| \leqslant \delta^4 \quad (9.2.124)$$

$\forall t>0$，且

$$\gamma(0) = \hat{g}_\varepsilon^s(\Omega(0),\gamma^-(0),h(0))$$

则它当 $t\to\infty$ 时趋于 Q_ε。

证明：首先，从方程(9.1.3)，Q_ε 满足

$$\theta_s - \theta_0 = O(\varepsilon)$$

其中 θ_0，θ_ε 为鞍点 Q_0，Q_ε 的角度，另一方面 $\phi_0^s(\theta_0)=0$，ϕ_ν^s 对 $\nu=\sqrt{\varepsilon}$光滑，有

$$|\phi_\nu^s(\theta_\varepsilon)| \leqslant C\nu \quad (9.2.125)$$

对于(Ω,γ^-,h)满足式(9.2.124)，$\gamma=\hat{g}_\varepsilon^s(\Omega,\gamma^-,h)$，从式(2.118)有

$$|J| = \nu|y + \phi_\nu^s(\theta)| \leqslant C\nu(|y| + |\theta - \theta_\varepsilon| +$$
$$|\phi_\nu^s(\theta_\varepsilon)|) \leqslant C\nu \cdot (\delta|h|_1 + |\Omega| + \nu)$$
$$|\alpha\omega_\varepsilon^2 + \beta\rho\cos\theta| = \beta|\rho\cos\theta - \omega\cos\theta_0| + \alpha|\omega_\varepsilon^2 - \omega^2| \leqslant$$
$$C(|\theta - \theta_0| + |\rho - \omega| + \nu|\phi_\nu^s(\theta_\varepsilon)|) \leqslant$$
$$C(|\theta_\varepsilon - \theta_0| + |y| + |\Omega| + |J| + |f|_1^2 + \varepsilon \leqslant$$
$$C(\varepsilon + \delta|h|_1 + |\Omega|) \tag{9.2.126}$$

如同以下引理 9.2.20 的证明,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_\varepsilon(u(t)) \leqslant -\frac{\varepsilon}{C}H_\varepsilon(u(t)) + C\nu^3|\Omega(t)|^3 + C\nu^7 \tag{9.2.127}$$

其中用到式(9.2.124)和式(9.2.118)。从式(9.2.101)和式(9.2.124)有对 $\forall t \geqslant t_0 > 0$,

$$|\Omega(t)| \leqslant e^{-2\alpha\nu(t-t_0)}|\Omega(t_0)| + C\int_0^t e^{-2\alpha\nu(t-s)}\hat{A}_\Omega(u(s))\mathrm{d}s \tag{9.2.128}$$

因 $u(t)$满足式(9.2.124)且

$$y(t) = \hat{g}_\varepsilon^s(\Omega(t), \gamma^-(t), h(t)), \quad \forall t \geqslant 0$$

利用式(9.2.103)和式(9.1.128)可得

$$|\Omega(t)| \leqslant e^{-2\alpha\nu t}|\Omega(0)| + C\delta^2\nu, \quad \forall t \geqslant 0$$
$$|H_\varepsilon(t)| \leqslant e^{-\frac{\varepsilon}{C}t}|H_\varepsilon(0)| + C\nu^3\int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{C}(t-s)}(|\Omega(s)|^2 + \varepsilon^2)\mathrm{d}s \leqslant$$
$$e^{-\frac{\varepsilon}{C}t}|H_\varepsilon(0)| + C\nu^3\int_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{C}(t-s)}(e^{-\frac{1}{4}\alpha\nu s}|\Omega(0)|^2 + \delta^4\varepsilon^2)\mathrm{d}s \leqslant$$
$$e^{-\frac{\varepsilon}{C}t}|H_\varepsilon(0)| + C\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{C}t}|\Omega(0)|^2 + C\delta^4\nu^3 \tag{9.2.129}$$

因此,从式(9.2.126),存在 $t_1 > 0$,使得式(9.2.124)成立外,$u(t)$满足:

$$|\Omega(t)| \leqslant C\delta^2\nu$$
$$|h(t)|_1 \leqslant CH_\varepsilon(t) + C\varepsilon\Omega(t)^2 \leqslant C\delta^4\nu^3, \forall t \geqslant t_1 \tag{9.2.130}$$

其次,取 $t_1 = 0$,再重复估计,对 $t \geqslant t_1$,式(9.2.130),式(9.2.103),

式(9.2.118),式(9.2.124)推出

$$|\hat{A}_\Omega(u(t))| \leqslant C(\delta\varepsilon|h(t)|_1 + |h(t)|_1^2) \leqslant C\delta^4\nu^3$$

代入式(9.2.128)得

$$|\Omega(t)| \leqslant e^{-2\alpha\nu(t-t_1)}|\Omega(t)| + C\delta^4\varepsilon, \forall t \geqslant t_1$$

如同式(9.2.129),不等式(9.2.127)推出

$$H_\varepsilon(u(t)) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon}{C}(t-t_1)}|H_\varepsilon(t_1)| + C\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{C}(t-t_1)}|\Omega(t_1)|^2 + C\nu^5$$

因此,存在 $t_2 > 0$,使得式(9.2.124)外 $u(t)$满足

$$|\Omega(t)| \leqslant C\delta^4\varepsilon$$
$$|h(t)|_1 \leqslant CH_\varepsilon(t) + C\varepsilon\Omega(t)^2 \leqslant C\nu^5 \tag{9.2.131}$$

对 $t \geqslant t_0$。由引理 9.2.17,可得 $u(t)$当 $t \to \infty$时趋于 Q_ε。

引理 9.2.20 设条件式(9.2.93)满足,则对式(9.2.101)的任何轨线$(y(t), \Omega(t), \gamma^-(t), h(t))$,当 $t \to \infty$时趋于 Q_ε。如满足式(9.2.119)和

$$|\gamma^-(0)|, |h(0)|_1 \leqslant \delta^2\nu$$

更进一步,条件式(9.2.119)也对$(y(t), \Omega(t), \gamma^-(t), h(t))$满足,$\forall t \geqslant 0$。注意到这里的轨线也是原来方程(9.1.1)的轨线。

证明:从引理 9.2.18,对 $t_0 = (\delta\nu)^{-1}$,有

$$|h(t_0)|_1 \leqslant C\delta^2\nu, |\gamma^-(0)| \leqslant C\delta^2\varepsilon, |\Omega(t_0)| \leqslant e^{-2\alpha/\delta} + C\delta^4\nu$$

因此,无损于一般性,能设

$$|h(0)|_1 \leqslant C\delta^2\nu, |\gamma^-(0)| \leqslant C\delta^2\varepsilon, |\Omega(0)| \leqslant e^{-2\alpha/\delta} + C\delta^4\nu$$

且如$|h(0)|_1 \leqslant \delta^{-1/2}|\gamma^-(0)|$,可推出$|h(0)|_1 \leqslant C\delta^{3/2}\varepsilon$,由引理 9.2.17 推出,当 $t \to \infty$时,轨线趋于 Q_ε,因此,我们能设

$$|h(0)|_1 \geqslant \delta^{-1/2}|\gamma^-(0)|$$

设 $h(t), \gamma^-(t), \Omega(t)$满足

$$|\gamma^-(t)| \leqslant \delta^{5/3}\varepsilon, \quad \delta^{7/4}\nu \geqslant 2|h(t)|_1 \geqslant \delta^{-1/2}|\gamma^-(t)|,$$

$$|\Omega(t)| \leqslant \delta^4 \tag{9.2.132}$$

$\forall t \in [0, t_0], t_1 > 0$。

记 $Q_\varepsilon = \omega_\varepsilon e^{i\theta_\varepsilon}$，从 ϕ_ν^s 的定义有 $\omega_\varepsilon^2 - \omega^2 = \nu\phi_\nu^s(\theta_\varepsilon)$。考虑泛函

$$H_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[u_x\bar{u}_x - (u\bar{u} - \omega_\varepsilon^2)^2]\mathrm{d}x \tag{9.2.133}$$

易于验证 H_ε 对未扰动方程是不变的。注意到

$$u = (\rho + f(x))e^{i\theta}$$

其中

$$\rho = \sqrt{J + \omega^2 - \langle f\bar{f}\rangle}, \quad f = h + \gamma^- e^- + \gamma^+ e^+$$

其中 e^-, e^+ 为 H_1 的单位向量，从命题 9.2.8 对于中心稳定流形，$|\gamma^+| \leqslant C\delta(|\nu^-| + |h|_1)$，因此在局部不变流形 $y = \hat{g}_\varepsilon^s(\Omega, \gamma^-, h)$ 上设 Ω, γ^-, h 满足式(9.2.132)，有

$$\begin{aligned}
H_\varepsilon(u) = &\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[f_x\bar{f}_x - (\rho^2 + \rho(f + \bar{f})) + \\
&(f\bar{f} - \omega_\varepsilon^2)^2]\mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[f_x\bar{f}_x - (J + \omega^2 - \omega_\varepsilon^2)^2 + f\bar{f} - \\
&\langle f\bar{f}\rangle + \rho(f + \bar{f})^2]\mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[f_x\bar{f}_x - ((J + \omega^2 - \omega_\varepsilon^2)^2 + \\
&\rho^2(f + \bar{f})^2)]\mathrm{d}x + O(|f|_1^3) = \\
&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[f_x\bar{f}_x - (\varepsilon(y + \phi_\nu^s(\theta) - \phi_\nu^s(\theta_\varepsilon))^2 + \\
&\rho^2(f + \bar{f})^2)]\mathrm{d}x + O(|f|_1^3) \geqslant \\
&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[f_x\bar{f}_x - (C\varepsilon(y^2 + \Omega^2) + \\
&4\rho^2 f\bar{f})]\mathrm{d}x - C|f|_1^3 \geqslant
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \omega^2)h_x\bar{h}_x\mathrm{d}x - C\varepsilon\Omega^2 - C\delta|h|_1^2 \tag{9.2.134}$$

其中假设式(9.2.132)和 y, γ^+ 的 Lip 性质用于最后不等式。

微分 H_ε 沿轨线 $t \in [0, t_1]$，其中条件式(9.2.132)满足：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_\varepsilon(u) = &\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} - (\bar{u}_{xx} + 2(u\bar{u} - \omega_\varepsilon^2)\bar{u})u_t\mathrm{d}x = \\
&\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}(\bar{u}_{xx} + 2(u\bar{u} - \omega_\varepsilon^2)\bar{u})(\varepsilon(-u_{xx} + \\
&\alpha u + \beta) + 2i(\omega_\varepsilon^2 - \omega^2)u)\mathrm{d}x = \\
&\varepsilon\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}[-|u_{xx}|^2 - \alpha|u_x|^2 + 2\alpha(|u|^2 - \\
&\omega_\varepsilon^2)^2 + 2\alpha(|u|^2 - \omega_\varepsilon^2)\omega_\varepsilon^2 - \\
&2(|u|^2 - \omega_\varepsilon^2)\bar{u}u_{xx} + 2\beta(|u|^2 - \omega_\varepsilon^2)\bar{u}]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

项$(|u|^2 - \omega_\varepsilon^2)$能由式(9.2.134)估计，利用式(9.2.132)可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_\varepsilon(u) \leqslant &\varepsilon\int_0^{2\pi}[-\alpha|f_x|^2 - |f_{xx}|^2 + C\varepsilon\Omega^2 + 8\alpha\rho^2(\mathrm{Re}f)^2 + \\
&2\alpha\omega_\varepsilon^2(J - \nu\phi_\nu^s(\theta_\varepsilon)) + 2\mathrm{Re}(J - \nu\phi_\nu^s(\theta_\varepsilon) + f\bar{f} - \langle f\bar{f}\rangle + \\
&2\rho\mathrm{Re}f)(\rho + \bar{f}) \cdot (\beta e^{-i\theta} - f_{xx})]\mathrm{d}x + C\delta^2\varepsilon^2|h_x|^2 \leqslant \\
&\varepsilon\int_0^{2\pi}[-\alpha|h_x|^2 - |h_{xx}|^2 + C\varepsilon\Omega^2 + 8\alpha\omega^2(\mathrm{Re}h)^2 + \\
&2(\alpha\omega_\varepsilon^2 + \beta\rho\cos\theta)(J - \nu\phi_\nu^s(\theta_\varepsilon)) + 4\omega^2(\mathrm{Re}h_x)^2 + \\
&4\beta\omega(\mathrm{Re}h)\mathrm{Re}(\bar{h}e^{-i\theta})]\mathrm{d}x + C\delta\varepsilon|h|_1^2 \leqslant \\
&\varepsilon\int_0^{2\pi}[-(4 + \alpha)(1 - \omega^2)(\mathrm{Re}h_x)^2 + \\
&\beta\omega|\sin\theta(\mathrm{Re}h_x)(\mathrm{Im}h_x)| - (4 + \alpha)(\mathrm{Im}h_x)^2 + \\
&4(\alpha\omega^2 + \beta\omega\cos\theta)(\mathrm{Re}h)^2 + \\
&2(\alpha\omega_\varepsilon^2 + \beta\rho\cos\theta)(J - \nu\phi_\nu^s(\theta_\varepsilon)) + C\varepsilon\Omega^2]\mathrm{d}x + C\delta\varepsilon|h|_1^2
\end{aligned}$$

我们估计$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_\varepsilon(u)$如下：首先，由条件式(9.2.132)有

$$|J-\nu\phi_\nu^s(\theta_\epsilon)|=|\nu(\gamma+\phi_\nu^s(\theta)-\phi_\nu^s(\theta_\epsilon))|\leqslant C\nu(\delta|h|_1+|\Omega|)$$

因 θ_0 满足 $|\theta_\epsilon-\theta_0|\leqslant C\nu$, $\alpha\omega+\beta\cos\theta_0=0$,从式(9.2.132)有

$$|\alpha\omega^2+\beta\omega\cos\theta|\leqslant C\delta$$

$$\begin{aligned}|\alpha\omega_\epsilon^2+\beta\rho\cos\theta|&=\beta|\rho\cos\theta-\omega\cos\theta_0|+\alpha|\omega_\epsilon-\omega|^2\leqslant\\&C(|\theta-\theta_0|+|\rho-\omega|+\nu|\phi_\nu^s(\theta_\epsilon)|)\leqslant\\&C(\nu+|y|+|\Omega|+|J|+|f|_1^2)\leqslant\\&C(\nu+\delta|h|_1+|\Omega|)\end{aligned}$$

且因 $\sin\theta_0=-\sqrt{\beta^2-\alpha^2\omega^2/\beta}$。条件式(9.2.93)和式(9.1.32)推出存在 $C>0$,使得

$$\begin{aligned}&-(4+\alpha)(1-\omega)(\mathrm{Re}h_x)^2+\beta\omega|\sin\theta(\mathrm{Re}h_x)(\mathrm{Im}h_x)\\&|-(4+\alpha)(\mathrm{Im}h_x)^2\leqslant-|h_x|^2/C\end{aligned}$$

因此,从这些估计得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_\epsilon(u)&\leqslant-\frac{\epsilon}{C}|h|_1^2+C\nu^3|\Omega|^2+C\nu^5\leqslant\\&-\frac{\epsilon}{C}H_\epsilon(u)+C\nu^3|\Omega|^2+C\nu^5\end{aligned}\tag{9.2.135}$$

其中,$H_\epsilon(u)\leqslant|h|_1^2$,在条件式(9.2.132)下。从式(9.2.101)、式(9.2.103)、式(9.2.132)有

$$\begin{aligned}|\Omega(t)|&\leqslant e^{-2\alpha\nu t}|\Omega(0)|+C\int_0^t e^{-2\alpha\nu(t-s)}\delta^2\epsilon ds\leqslant\\&e^{-2\alpha\nu t}|\Omega(0)|+C\delta^2\nu\end{aligned}$$

因此,从式(9. 2.135),对 $t\in[0,t_1]$有

$$\begin{aligned}|H_\epsilon(t)|&\leqslant e^{-\frac{\epsilon}{C}t}|H_\epsilon(0)|+C\nu^3\int_0^t e^{-\frac{\epsilon}{C}(t-s)}(|\Omega(s)|^2+\epsilon)ds\leqslant\\&e^{-\frac{\epsilon}{C}t}|H_\epsilon(0)|+C\nu^3\int_0^t e^{-\frac{\epsilon}{C}(t-s)}(e^{-4\alpha\nu s}|\Omega(0)|^2+\epsilon)ds\leqslant\\&e^{-\frac{\epsilon}{C}t}|H_\epsilon(0)|+C\epsilon e^{-\frac{\epsilon}{C}t}|\Omega(0)|^2+C\nu^3\end{aligned}\tag{9.2.136}$$

再考虑条件式(9.2.132),因 $|h(0)|_1\leqslant C\delta^2\nu$,不等式(9.2.134)和式(9.2.136),推出

$$\begin{aligned}|h(t)|_1^2&\leqslant CH_\epsilon(0)+C\epsilon\Omega(t)^2\leqslant\\&C(|h(0)|_1^2+\epsilon\Omega(0)^2+\nu^3)\leqslant C\delta^4\epsilon\end{aligned}$$

因此,$|h(t)|_1=\dfrac{1}{2}\delta^{7/4}\nu$ 不能成立,对于 $t\in[0,t_1]$。从式(9.2.101)易在条件式(9.2.132)下验证 $\Omega\Omega_t<0$,如 $|\Omega|=\delta^4$, $\gamma^-\gamma_t^-<0$,如 $|\gamma^-|=\delta^{5/3}\epsilon$。因此,如轨线$(y(t),\Omega(t),\gamma^-(t),h(t))$满足条件式(9.2.132),对 $\forall t\in[0,t_1]$,而当 $t>t_1$ 破坏,则仅能破坏 $2|h(t)|_1\leqslant\delta^{1/2}|\gamma^-(t)|$,因此有

$$|\Omega(t_1)|\leqslant\delta^4,\ |\gamma^-(t_1)|\leqslant\delta^{5/3}\epsilon,2|h(t)|_1\leqslant\delta^{7/4}\nu$$

$$2|h(t_1)|_1=\delta^{-1/2}|\gamma^-|\leqslant\delta^{7/6}\epsilon$$

从引理 9.2.17 推出,轨线$(y(t),\Omega(t),\gamma(t),h(t))\to Q_\epsilon$, $t\to\infty$。

最后,我们仅需考虑当条件式(9.2.132)满足的情况,$\forall t\in(0,\infty)$。此时不等式(9.2.134)和式(9.2.136)推出存在 $t_2>0$,使得

$$|h(t_2)|_1\leqslant CH(u(t_2))+C\epsilon\Omega(t_2)^2\leqslant\delta\epsilon$$

因此,应用引理 9.2.17 推出轨线当 $t\to\infty$ 时趋于 Q_ϵ。

转变坐标系从(y,Ω)回到(j,θ),利用引理 9.2.16 和式(9.2.118),我们对于小的 δ 完成命题 9.2.13 的证明。

9.3 同宿轨道

利用前面的几何结构,我们开始构造方程(9.1.1)同宿于鞍点的轨道。这个结构由两部分组成,首先从具有 Q_ϵ 的不稳定流形 W_ϵ^u 中的初始点开始,由命题 9.2.7,当 $t\to-\infty$ 时趋于 Q_ϵ 的后向轨线存在。我们证明向前轨线进入 C_ω 的中心稳定流形 W^{cs},其中适当的选取参数 β,并在阶为 $O(1)$的时间周期之后,Melnikov 方法在此为主要工具。其次,我们证明如适当的初始点,这些轨线实际

上进入稳定流形 W_ε^s。

9.3.1 未扰动 NLS 的同宿轨道

当 $\varepsilon=0$ 时,未扰动 NLS 为完全可积的 Hamilton 偏微分方程,具有 Hamilton 量为

$$H(u)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[u_x\bar{u}_x-(u\bar{u}-\omega^2)^2]\mathrm{d}x \qquad (9.3.1)$$

从可积 NLS 的 Lax 对开始,我们能构造出无穷多个 NLS 的运动常数。在 H^1 函数的相空间中,这些不变量的水平集为无穷维环面 $T^\infty=S\times S\times\cdots$,奇性环出现于这些圆的一个或更多退化为一点。一般说来,这些环是不稳定的且存在同宿于这些环的轨道。这些不稳定环被称为"胡子环",是具有"胡子"(whisher)的同宿轨道。孤立子的反散射法能表示这些奇性环,去决定它们的不稳定性,并表示它们的同宿轨道。最简单的例子为周期解

$$q(t,\rho,\theta)=\rho\mathrm{e}^{-i(2(\rho^2-\omega^2)t-\theta)}$$

对任何固定的 $\rho\neq\omega$ 和 θ,这些周期解当 $\rho\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时是不稳定的。线性化 NLS 对于 $q(t,\rho,\theta)$ 具有一个负特征值,一个正特征值,其它的特征值在虚轴上,利用 Bäcklund-Darboux 变换,可得同宿于 $q(t,\rho,\theta)$ 的精确解

$$q_h^\pm(t,t_0,\rho,\theta)=\mathrm{e}^{-2ip_\rho}(\cos 2p_\rho-i\sin 2p_\rho\tanh\tau\pm\frac{\sin p_\rho\cos x}{\cosh\tau})/(1\mp\frac{\sin p_\rho\cos x}{\cosh\tau})q(t) \qquad (9.3.2)$$

其中 $\tau=\sigma_\rho(t+t_0)$, $\sigma_\rho=\sqrt{4\rho^2-1}$, $\mathrm{e}^{ip_\rho}=\dfrac{1+i\sigma_\rho}{2\rho}$。

事实上,$q_h^\pm$ 满足

$$|q_h^\pm(t,t_0,\rho,\theta)-q(t,\rho,\theta)|_n=O(\mathrm{e}^{\sigma_\rho(t+t_0)}),\quad t\to-\infty$$

$$|q_h^\pm(t,t_0,\rho,\theta)-\mathrm{e}^{4ip_\rho}q(t,\rho,\theta)|_n=O(\mathrm{e}^{-\sigma_\rho(t+t_0)}),\quad t\to+\infty$$

因此,$q_h^\pm(t,t_0,\rho,\theta)$ 同宿于圆 $\{z\in\Pi_c\,|\,|z|=\rho\}$ 具有相差 $-4p_\rho$。当 $\rho=\omega$ 时,$q(t,\omega,\theta)$ 为定常解,$q_h^\pm(t,t_0,\omega,\theta)$ 为异宿轨道。我们从这些同宿、异宿轨道去构造扰动方程的同宿轨道。对于近可积系统,我们需要这种未扰动方程同宿轨道的明显表达式。

设 $\rho>0$ 且接近于 ω, $\theta\in[0,2\pi)$,称 $W_0^{uu}(\rho\mathrm{e}^{i\theta})$ 为未扰动 NLS 基点在 $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ 的一维局部不稳定纤维,在 $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ 邻域中的一点在 $W_0^{uu}(\rho\mathrm{e}^{i\theta})$ 上仅当 $t\to-\infty$ 时,它的渐近位相为 $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$。即当 $t\to-\infty$ 时它向后轨线指数逼近于开始点 $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ 的向后轨线,注意到这个条件对于一维曲线 $\{q_h^\pm(0,t,\rho,\theta)|_{t_0<0}\}$ 的所有点都是满足的,因此

$$W_0^{uu}(\rho\mathrm{e}^{i\theta})=\{q_h^\pm(0,t_0,\rho,\theta)|_{t<0}\} \qquad (9.3.3)$$

另一方面,W_0^{cs} 为未扰动 NLS 的圆 $C_\omega\in\Pi_c$ 的局部中心稳定流形,因

$$|q_h^\pm(t,t_0,\rho,\theta)|-\mathrm{e}^{-4ip_\rho}q(t,\rho,\theta)|_n=O(\mathrm{e}^{-\sigma_\rho(t+t_0)})$$

当 $t\to+\infty$ 时,$q_h^\pm(t_0,\rho,\theta)$ 进入 W_0^{cs},当 $t\gg0$。即 $W_0^{uu}(\rho\mathrm{e}^{i\theta})$ 的任何点向前轨线在充分长时间后进入 W_0^{cs}。

固定小的 $\delta>0$,与 ε 无关,使得命题 9.2.1、命题 9.2.8、命题 9.2.13 对充分小的 ε 成立,对任何 $\gamma^+\in[-\delta,\delta]$ 和 (J,θ), $|J|\leqslant\dfrac{\delta}{2}$,考虑

$$(J,\theta,\gamma^+,0,0)+g_\varepsilon^u(J,\theta,\gamma^+)\in W_\varepsilon^{uu}(J,\theta)$$

其中 g_ε^u 为命题 9.2.1 所定义。对 $\varepsilon=0$,从式(9.3.3)对未扰动 NLS,轨线 $q(t)$ 具有初始点

$$q(0)=(J,\theta,\gamma^+,0,0)+g_0^u(J,\theta,\gamma^+)$$

它具有形式如式(9.3.2),同宿于周期解

$$\sqrt{\omega^2+J}\,\mathrm{e}^{i(-2Jt-\theta)}$$

因此,对于 $|\gamma^+|\in\left[\dfrac{\delta}{2},\delta\right]$,存在 $T>0$,与 γ^+,J,θ 和 ε 无关,使得 $q(T)\in W_0^{cs}$,且

$$q(T)=(J_1,\theta_1,\gamma^+=g_0^{cs}(J_1,\theta_1,\gamma^-,h),\gamma^-,h),\ |J_1|\leqslant\frac{2\delta}{3}$$

$$|\gamma^+|,\ |h|_1\leqslant\frac{\delta}{2}$$

其中 g_ε^{cs} 为命题9.2.8所定义。

9.3.2 第一测量量

对 $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$，令

$$z_{\varepsilon,\theta}=(J=\nu\phi_\nu^u(\theta),\theta)\in\Pi_c,$$

$$u_{\varepsilon,\theta}=(z_{\varepsilon,\theta},\gamma^+=\delta,0,0)+g_\varepsilon^u(z_{\varepsilon,\theta},\delta)$$

$$u_{0,\theta}=(z_{\varepsilon,\theta},\gamma^+=\delta,0,0)+g_0^u(z_{\varepsilon,\theta},\delta)$$

其中 $\nu=\sqrt{\varepsilon}$，ϕ_ν^u 定义在 $[\theta_1,\theta_2]$ 上为不稳定曲线 $P_\varepsilon^u\in\Pi_c$。于是 $z_{\varepsilon,\theta}$ 为其不稳定曲线 P_ε^u，角坐标 θ 的一点，$u_{\varepsilon,\theta}$ 和 $u_{0,\theta}$ 分别在具有基点 $z_{\varepsilon,\theta}$ 的扰动与未扰动不稳定纤维上。令 $u(t)(\varepsilon>0)$ 和 $q_*(t)(\varepsilon=0)$ 分别表示方程(9.1.1)具初始值 $u(0)=u_{\varepsilon,\theta}$，$q_*(0)=u_{0,\theta}$ 的解。从命题9.2.7，解 $u(t)$ 对 $t\leqslant 0$ 存在，且 $u(t)\to Q_\varepsilon,t\to\infty$。为使 $u(t)$ 同宿于 Q_ε，仅要求在适当参数下 $u(t)\to Q_\varepsilon,t\to+\infty$。

依前面所述，$q_*(t)$ 是同宿于 Π_c 中通过 $z_{\varepsilon,\theta}$ 的圆，具有形式如式(9.3.2)：

$$\frac{\cos 2p_{\varepsilon,\theta}-i\sin 2p_{\varepsilon,\theta}\tan\tau+\dfrac{\sin p_{\varepsilon,\theta}\cos x}{\cosh\tau}}{1-\dfrac{\sin p_{\varepsilon,\theta}\cos x}{\cosh\tau}}\cdot$$

$$\sqrt{\omega^2+\nu\phi_\nu^u(\theta)}\,e^{i(-2\nu\phi_\nu^u(\theta)t-2p_{\varepsilon,\theta}+\theta)}$$

其中 $\tau=\sigma_{\varepsilon,\theta}(t+t_0)$，$\sigma_{\varepsilon,\theta}=\sqrt{4(\omega^2+\nu\phi_\nu^u(\theta))-1}$

$$e^{ip_{\varepsilon,\theta}}=\frac{1+i\sigma_{\varepsilon,\theta}}{2\sqrt{\omega^2+\nu\phi_\nu^u(\theta)}},\qquad t_0>0$$

引理9.3.1 对于 $t\in[(2/\sigma)\log\varepsilon,0]$ 有

$$|u(t)-q_*(t)|_1\leqslant C\varepsilon(\log\varepsilon)^2$$

其中 $C>0$ 与 δ,ε 无关。

证明：令 $z_\varepsilon(t)$ 和 $z_0(t)$ 分别为方程(9.1.3)对 $\varepsilon>0$ 和 $\varepsilon=0$ 的解，且 $z_\varepsilon(0)=z_0(0)=z_{\varepsilon,\theta}$，因 $z_{\varepsilon,\theta}\in P_\varepsilon^u$，我们有 $z_\varepsilon(t),z_0(t)\in B_\Pi(\delta)$，$\forall t<0$，其中 $B_\Pi(\delta)$ 为不动点的圆 C_ω 的 δ 邻域。由命题9.2.1，对 $t\leqslant 0$ 有

$$u(t)=(z_\varepsilon(t),\gamma_1^+(t),0,0)+g_\varepsilon^u(z_\varepsilon(t),\gamma_1^+(t))$$

$$q_*(t)=(z_0(t),\gamma_*^+(t),0,0)+g_0^u(z_0(t),\gamma_*^+(t))$$

其中 $\gamma_1^+(t)$ 和 $\gamma_*^+(t)$ 为 $u(t)$ 和 $q_*(t)$ 在 e^+ 方向的坐标，且

$$|\gamma_1^+(t)|,|\gamma_*^+(t)|\leqslant\delta$$

因此，我们仅需考虑 $z_\varepsilon(t)-z_0(t)$，$\gamma_1^+(t)-\gamma_*^+(t)$。从方程(9.1.3)和常数变易公式，可得对 $t<0$ 有

$$|z_\varepsilon(t)-z_0(t)|\leqslant C\varepsilon\int_t^0(1+s-t)\mathrm{d}s\leqslant C\varepsilon(1+t^2)$$

$|\gamma_1^+(t)-\gamma_*^+(t)|$ 能用方程(9.2.6)估计如下：

$$(\gamma_1^+-\gamma_*^+)_t=\sigma(\gamma_1^+-\gamma_*^+)+O(\varepsilon|\gamma_1^+|+$$
$$\delta(|\gamma_1^+-\gamma_*^+|+|z_\varepsilon-z_0|))$$

由此推出，对一切 $t<0$，有

$$|\gamma_1^+(t)-\gamma_*^+(t)|\leqslant C\int_t^0 e^{\sigma(t-s)}(\varepsilon|\gamma_1^+(s)+\delta|\gamma_1^+(s)-$$
$$\gamma_*^+(s)|+|z_\varepsilon(s)-z_0(s)|)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\int_t^0 e^{\sigma(t-s)}\delta(\varepsilon+|\gamma_1^+(s)-\gamma_*^+(s)|+\varepsilon(1+s^2))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\delta\varepsilon(1+t^2)+C\delta\int_t^0 e^{\sigma(t-s)}|\gamma_1^+(s)-\gamma_*^+(s)|\mathrm{d}s$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|\gamma_1^+(t)-\gamma_*^+(t)|\leqslant C\delta\varepsilon(1+t^2)$$

因此

$$|u(t)-q_*(t)|_1\leqslant C\varepsilon(1+t^2)$$

因 $t\in[(2/\sigma)\log\varepsilon,0]$，可得引理要求的不等式。令

$$q_*(t)=(J_*(t),\theta_*(t),\gamma_*^+(t),\gamma_*^-(t),h_*(t))$$

$$u(t) = (J_1(t), \theta_1(t), \gamma_1^+(t), \gamma_1^-(t), h_1(t))$$

由 T 的选取,有对任何 $t \geqslant T$,

$$\gamma_*^+(t) = g_0^{cs}(J_*(t), \theta_*(t), \gamma_*(t), h_*(t)), \quad |J_*(t)| \leqslant \frac{2\delta}{3},$$

$$|\gamma_*(t)|, |h_*(t)|_1 \leqslant \frac{\delta}{2}$$

$$|q_*(t) - \sqrt{\omega^2 + J}e^{i(-2Jt+\theta-4p_{\varepsilon,\theta})}|_n \leqslant C\delta e^{-\sigma_{\varepsilon,\beta}(t-T)}$$

$$\leqslant C\delta e^{-\frac{3\sigma}{4}(t-T)} \tag{9.3.4}$$

其中 $J = \nu\phi_\nu^u(\theta)$,$C$ 与 T, δ, ε 无关。

引理 9.3.2 $u(T) - q_*(T) \in H^3$,对 $\theta, \alpha, \beta, \nu$ 有 $u - q_* \in C^1$。进一步有

$$|u(T) - q_*(T)|_3 \leqslant C_0(T)\varepsilon$$

其中 $C_0(T) > 0$ 与 ε 无关。

证明:从命题 9.3.1 可知 $g_\varepsilon^u \in H^5$,对参数 $z, \gamma^+, \alpha, \beta, \varepsilon, g_\varepsilon^u \in C^1$,且由方程(9.1.1)形成的半流 S_ε^t 在 H^n 上是 C^1 映照,固定 $t > 0$,对 α, β 也是属于 C^1。虽然,作为 H^n 上的一个映照,S_ε^t 不是对于 ε 属于 C^1,但容易见到 S_ε^t 为 ε 的 C^1 映照,从 $H^5 \to H^3$。注意到 $z_{\varepsilon,\theta}$,对 $\theta, \alpha, \beta, \nu$ 是光滑的。因此,$u(T) - q_*(T) \in H^3$ 是属于参数 $\theta, \alpha, \beta, \nu$ 的 C^1 映照,最后

$$|u_{\varepsilon,\theta} - u_{0,\theta}| \leqslant C\varepsilon, \text{推出}$$

$$|u(T) - q_0(T)|_3 \leqslant C_0(T)\varepsilon$$

其中 $C_0(T) > 0$ 与 ε 无关。

引理 9.3.2 推出

$$|J_1(T) - J_*(T)|, |\theta_1(T) - \theta_*(T)|,$$

$$|\gamma_1^-(T) - \gamma_*^-(T)|, |h_1(T) - h_*(T)|_3$$

是有界的,从上有 $\leqslant C(T)\varepsilon$,这里 $C(T)$ 与 ε 无关。因此 $(J_1(T), \theta_1(T), \gamma_1^-(T), h_1(T)) \in N_3^{cs}$,它是 g_ε^{cs} 的定义域。

令 $\gamma_\#^+ = g_\varepsilon^{cs}(J_1(T), \theta_1(T), \gamma_1^-(T), h_1(T))$。由 W_ε^{cs} 的定义,$u(T) \in W_\varepsilon^{cs}$;如 $\gamma_\#^+ = \gamma_1^+(T)$,我们将调整参数 β,使得这个条件满足。

首先,有如下估计

$$|\gamma_*^+(T) - \gamma_\#^+| \leqslant |g_0^{cs}(J_*(T), \theta_*(T), \gamma_*^-(T), h_*(T)) -$$

$$g_\varepsilon^{cs}(J_1(T), \theta_1(T), \gamma_1^-(T), h_1(T))| \leqslant$$

$$CC_0(T)\varepsilon + |g_0^{cs}(J_*(T), \theta_*(T), \gamma_*^-(T), h_*(T)) -$$

$$g_\varepsilon^{cs}(J_*(T), \theta_*(T), \gamma_*^-(T), h_*(T))| \leqslant$$

$$C_2(T)\varepsilon \tag{9.3.5}$$

其中 g_ε^{cs} 对 ε 的 Lip 常数在命题 9.2.8 中给定,这里常数 $C_2(T)$ 依赖于 T,在用 Melnikov 分析估计 $\gamma_\#^+ - \gamma_1^+(T)$ 之前,先证如下引理。

引理 9.3.3 令 $u_2(t)$ 为方程(1.1)具初值 $u_2(T) = (J_1(T), \theta_1(T), \gamma_1^-(T), h_1(T))$ 的解,则存在 $C_3(T) > 0$ 与 ε 无关,使得

$$|u_2(t) - q_*(t)|_3 \leqslant C_3(T)\varepsilon(\log\varepsilon)^2, \quad \forall t \in \left[T, T - \left(\frac{2}{\sigma}\right)\log\varepsilon\right]$$

证明:对 $t \geqslant T$

$$u_2(t) = (J_2(t), \theta_2(t), \gamma_2^-(t), \gamma_2^+(t), h_2(t))$$

因 $u_2(T) \in W_\varepsilon^{cs}$,我们有 $u_2(t) \in W_\varepsilon^{cs}$,只要

$$(J_2(t), \theta_2(t), \gamma_2^-(t), h_2(t)) \in N_3^{cs} \tag{9.3.6}$$

即

$$\gamma_2^+(t) = g_\varepsilon^{cs}(J_2(t), \theta_2(t), \gamma_2^-(t), h_2(t))$$

其中式(9.3.6)成立。

用前面的符号,当式(9.3.6)满足时,我们仅需考虑截断方程(9.2.67),它等价于扰动 NLS 方程(9.1.1),于是

$$\begin{cases}\Delta J_t = \tilde{A}_\varepsilon^J(u_2) - \tilde{A}_0^J(q_*)\\ \Delta\theta_t = -2\Delta J + \tilde{A}_\varepsilon^\theta(u_2) - \tilde{A}_0^\theta(q_*)\\ \Delta\gamma_t^- = -\sigma\Delta\gamma^- + \tilde{A}_\varepsilon^-(u_2) - \tilde{A}_0^-(q_*)\\ \Delta h_t = L_\varepsilon h_2 - L_0 h_* + \tilde{A}_\varepsilon^h(u_2) - \tilde{A}_0^h(q_*) = \\ \qquad L_\varepsilon\Delta h + (L_\varepsilon - L_0)h_* + \tilde{A}_\varepsilon^h(u_2) - \tilde{A}_0^h(q_*)\end{cases} \tag{9.3.7}$$

其中 $\tilde{A}_\varepsilon^J, \tilde{A}_0^J$ 分别表示 $\tilde{A}^J$ 在 $\varepsilon>0$ 和 $\varepsilon=0$ 的情况。$\Delta J = J_2 - J_*$，…，在条件式(9.3.6)下，从不等式(9.2.68)和式(9.2.72)以及方程(9.3.4)，对 $t\geqslant T$ 有

$$\begin{aligned}&|\tilde{A}_\varepsilon^\theta(u_2) - \tilde{A}_0^\theta(q_*)| \\ &\leqslant C\varepsilon + C(|\gamma_*^-| + |\gamma_2^-| + |h_2|_1 + \\ &\quad |h_*|_1)(|\Delta\gamma^-| + |\Delta h|_1 + |\Delta J|) \leqslant \\ &C\varepsilon + C(\delta e^{-\frac{3\sigma}{4}(t-T)} + |\Delta\gamma^-| + \\ &\quad |\Delta h|_1)(|\Delta\gamma^-| + |\Delta h|_1 + |\Delta J|)\end{aligned} \tag{9.3.8}$$

类似地，从条件式(9.3.6)可得

$$|\tilde{A}_\varepsilon^J(u_2) - \tilde{A}_0^J(q_*)| \leqslant C\varepsilon \tag{9.3.9}$$

$$\begin{aligned}&|\tilde{A}_\varepsilon^-(u_2) - \tilde{A}_0^-(q_*)| + |(L_\varepsilon - L_0)h_* + \tilde{A}_\varepsilon^h(u_2) - \tilde{A}_0^h(q_*)|_n \leqslant \\ &\quad C(\varepsilon + |\Delta\gamma^-| + |\Delta h|_n + |\Delta J|)(\delta e^{-\frac{3\sigma}{4}(t-T)} + \\ &\quad |\Delta\gamma^-| + |\Delta h|_n + |\Delta J| + \nu|\phi_\nu^u(\theta)|)\end{aligned} \tag{9.3.10}$$

$n=1,3$，于此 C 与 T 无关。

设对大的 $C_3(T)>1$，与 ε 无关

$$\begin{cases}|\Delta J(t)|, |\Delta\gamma^-(t)|, |\Delta h(t)|_3 \leqslant -C_3(T)\varepsilon\log\varepsilon \\ |\Delta\theta(t)| \leqslant C_3(T)\varepsilon(\log\varepsilon)^2\end{cases} \tag{9.3.11}$$

$\forall t\in[T,t_1]$。从引理 9.3.2，不等式(9.3.5)，存在 $t_1>T$，满足上述条件，因此，对一切 $t\in[T,t_1]$有

$$|\Delta J(t)| \leqslant |\Delta J(T)| + C\varepsilon(t-T) \leqslant C_2(T) + C\varepsilon(t-T)$$

$$\begin{aligned}&|\Delta\gamma^-(t)| \leqslant e^{-\sigma(t-T)}|\Delta\gamma^-(T)| + \\ &C\int_T^t e^{-\sigma(t-s)}(-C_3(T)\varepsilon\log\varepsilon)(\delta e^{-\frac{3\sigma}{4}(s-T)} - C_3(T)\varepsilon\log\varepsilon + \nu)ds \leqslant \\ &\quad C_0(T)\varepsilon - CC_3(T)\delta\varepsilon\log\varepsilon + CC_3(T)^2\varepsilon^2(\log\varepsilon)^2(t-T) - \\ &\quad CC_3(T)(t-T)\nu^3\log\varepsilon\end{aligned}$$

类似地可得

$$\begin{aligned}&|\Delta h(t)|_3 \leqslant CC_0(T)\varepsilon - CC_3(T)\delta\varepsilon\log\varepsilon + \\ &\quad CC_3(T)^2\varepsilon^2(\log\varepsilon)^2(t-T) - CC_3(T)(t-T)\nu^3\log\varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|\Delta\theta(t)| \leqslant |\Delta\theta(T)| + 2(t-T)|\Delta J(T)| + \\ &\int_T^t 2(t-s)|\tilde{A}_\varepsilon^J(u_2(s)) - \tilde{A}_0^J(q_*(s))|^1 + \\ &\quad |\tilde{A}_\varepsilon^\theta(u_2(s)) - \tilde{A}_0^\theta(q_*(s))|ds \leqslant \\ &C_0(T)(1+2(t-T))\varepsilon + C\int_T^t[(t-T)\varepsilon + \varepsilon - \\ &C_3(T)\varepsilon\log\varepsilon(\delta e^{-\frac{3\sigma}{4}(s-T)} - C_3(T)\varepsilon\log\varepsilon]ds \leqslant \\ &\quad C_0(T)(1+2(t-T))\varepsilon + C_3(1+(t-T)^2) - \\ &CC_3(T)\delta\varepsilon\log\varepsilon - CC_3(T)^2\varepsilon^2(\log\varepsilon)^2(t-T)\end{aligned}$$

注意到 C 与 T,δ 无关，由连续性，可推得对于固定大的 $C_3(T)$，$\forall t\in\left[T, T-\left(\frac{2}{\sigma}\right)\log\varepsilon\right]$，条件式(9.3.11)成立，证毕。

其次，我们考虑距离

$$u(T) - u_2(T) = (\gamma_1^+(T) - \gamma_\#^+(T))e^{i\theta_1(T)}e^+$$

令
$$H_0(u) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[u_x\bar{u}_x - (u\bar{u} - \omega^2)^2]dx$$

它是未扰动 NLS 的 Hamilton 量，容易验证对任何 $v\in H^1$

$$\begin{aligned}DH_0(u)v &= \langle DH_0(u), v\rangle - \\ &\quad \mathrm{Re}\int_0^{2\pi}[u_{xx} + 2(|u|^2 - \omega^2)u]\bar{v}dx\end{aligned} \tag{9.3.12}$$

$$|\langle DH_0(q_*(T)), (e^{i\theta_1(T)}e^+)\rangle| > \frac{1}{C_4(T)}$$

其中 $C_4(T)>0$ 与参数 $\theta,\alpha,\beta,\varepsilon$ 无关，对$\langle\cdot,\cdot\rangle$定义为

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi} v_1 v_2 \mathrm{d}x, \quad \forall v_1, v_2 \in H^1$$

$$\langle DH_0(q_*(T)), u(T) - u_2(T) \rangle = 0$$

从命题9.2.1,命题9.2.8注意到,左边对于 θ,α,β 属于 C^1,对 ν 满足 Lip 条件。

$q_*(t)$为同宿轨道,满足

$$q_*(0) = u_{0,\theta} = (z_{\varepsilon,\theta}, \delta, 0, 0) + g_0^u(z_{\varepsilon,\theta}, \delta) = (\nu\phi_\nu^u(\theta), \theta, \delta, 0, 0) + g_0^u(z_{\varepsilon,\theta}, \delta)$$

其中 δ 为 γ^+ 坐标,虽然点$(0,\theta,\delta,0,0) + g_0^u(0,\theta,\delta)$在不稳定纤维 $W_0^{uu}(\omega e^{i\theta})$上,具有不动点 $\omega e^{i\theta}$ 作为它的基点。因此,轨线具有初值$(0,\theta,\delta,0,0) + g_0^u(0,\theta,\delta)$为异宿轨道。事实上,存在 $t_0 < 0$,它仅依赖于 δ,使得式(9.3.2)给定的轨线 $q_h^+(t,t_0,\omega,\theta)$,有

$$q_h^+(t,t_0,\omega,\theta) \to \omega e^{i\theta}, \quad t \to -\infty$$

$$q_h^+(t,t_0,\omega,\theta) \to \omega e^{i(\theta - 4p_\omega)}, \quad t \to +\infty$$

为简单计,记 $q_h(t,\theta)$为 $q_h^+(t,t_0,\omega,\theta)$。

引理 9.3.4 距离 $u(T) - u_2(T)$具有估计

$$\langle DH_0(q_*(T)), u(T) - u_2(T) \rangle = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} \langle DH_0(q_h(t,\theta)), \partial_{xx}q_h(t,\theta) - \alpha q_h(t,\theta) - \beta \rangle \mathrm{d}t + O(\nu^3(\log\varepsilon)^2) \tag{9.3.13}$$

其中 $O(\nu^3(\log\varepsilon)^2) \leqslant C_5(T)\nu^3(\log\varepsilon)^2$, $C_5(T)$与 ε 无关。

证明:我们用 Melnikov 方法证明。首先注意到 H_0 为未扰动方程的 Hamilton 量,而扰动方程(9.1.1)具有形式

$$u_t = iDH_0(u) + \varepsilon(u_{xx} - \alpha u - \beta)$$

因此,对 $t > 0$

$$\partial_t \langle DH_0(q_*(t)), q_*(t) - u_2(t) \rangle =$$
$$\langle D^2H_0(q_*(t))\partial_t q_*(t), q_*(t) - u_2(t) \rangle +$$
$$\langle DH_0(q_*(t)), \partial_t q_*(t) - \partial_t u_2(t) \rangle =$$
$$\langle D^2H_0(q_*(t)) iDH_0(q_*(t)), q_*(t) - u_2(t) \rangle +$$
$$\langle DH_0(q_*(t)), iDH_0(q_*(t)) - iDH_0(u_2(t)) \rangle -$$
$$\langle DH_0(q_*(t)), \varepsilon(\partial_{xx}u_2(t) - \alpha u_2(t) - \beta) \rangle =$$
$$\langle i(DH_0(q_*(t)) - DH_0(u_2(t)) - D^2H_0(q_*(t)) \cdot (q_*(t) - u_2(t)), DH_0(q_*(t)) \rangle -$$
$$\langle DH_0(q_*(t)), \varepsilon(\partial_{xx}u_2(t) - \alpha u_2(t) - \beta) \rangle$$

其中我们用到了 D^2H_0 为对称,且

$$\langle iv_1, v_2 \rangle = -\langle v_1, iv_2 \rangle, \forall v_1, v_2 \in H^1$$

从引理9.3.3,对 $t \in \left[T, T - \left(\frac{2}{\sigma}\right)\log\varepsilon\right]$可得

$$C|q_*(t) - u_2(t)|^2 \geqslant |\partial_t \langle DH_0(q_*(t)), q_*(t) - u_2(t) \rangle + \varepsilon \langle DH_0(q_*(t)), \partial_{xx}u(t) - \alpha u_2(t) - \beta \rangle|$$

其中 C 与 ε,δ,T 无关。注意到估计式(9.3.4)推出

$$\left| DH_0\left(q_*\left(T - \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon\right)\right)\right|_1 \leqslant C(\delta\varepsilon + \nu) \leqslant C\nu$$

因此从引理9.3.3有

$$\langle DH_0(q_*(T)), q_*(T) - u_2(t) \rangle = \left\langle DH_0\left(q_*\left(T - \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon\right)\right), q_\varepsilon\left(T - \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon\right) - u_2\left(T - \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon\right)\right\rangle +$$
$$\int_T^{T - \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon} \langle DH_0(q_*(t)), \varepsilon(\partial_{xx}u_2(t) - \alpha u_2(t) - \beta) \rangle + O(|q_*(t) - u_2(t)|^2)\mathrm{d}t =$$
$$\varepsilon\int_T^{T - \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon} \langle DH_0(q_*(t)), \partial_{xx}q_*(t) - \alpha q_*(t) -$$

$$\beta\rangle \mathrm{d}t + O(\nu^3(\log\varepsilon)^2) \tag{9.3.14}$$

其中 $O(\nu^3(\log\varepsilon)^2) \leqslant C(T)\nu^3(\log\varepsilon)^2$，$C(T)$ 与 ε 无关。

类似可得

$$\langle DH_0(q_*(T)), u(T) - q_*(T)\rangle = \varepsilon\int_{\frac{2}{\sigma}\log\varepsilon}^{T}\langle DH_0(q_*(t)),$$
$$\partial_{xx}q_*(t) - \alpha q_*(t) - \beta\rangle \mathrm{d}t + O(\nu^3(\log\varepsilon)^2) \tag{9.3.15}$$

联系这些估计可得

$$\langle DH_0(q_*(T)), u(T) - u_2(T)\rangle = \varepsilon\int_{\frac{2}{\sigma}\log\varepsilon}^{T-\frac{2}{\sigma}\log\varepsilon}\langle DH_0(q_*(t)),$$
$$\partial_{xx}q_*(t) - \alpha q_*(t) - \beta\rangle \mathrm{d}t + O(\nu^3(\log\varepsilon)^2) \tag{9.3.16}$$

这个估计很接近式(9.3.13)，我们仅需量 q_* 为 $q_h(\cdot,\theta)$。

q_* 和 $q_h(\cdot,\theta)$ 能被简单写为式(9.3.2)的形式。容易得

$$|q_*(t) - q_h(t,\theta)|_3 \leqslant -C(T)\nu\log\varepsilon, \quad t\in\left[\frac{2}{\sigma}\log\varepsilon, T - \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon\right]$$

$$|DH_0(q_h(t,\theta))|_3 = |\partial_t q_h(t,\theta)|_3 \leqslant -C\varepsilon^2 e^{\sigma(t-\frac{2}{\sigma}\log\varepsilon)}, \quad t\leqslant \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon$$

$$|DH_0(q_h(t,\theta))|_3 \leqslant C\delta\varepsilon^2 e^{-\sigma(t-T-\frac{2}{\sigma}\log\varepsilon)}, \quad t > T - \frac{2}{\sigma}\log\varepsilon$$

置 $q_h(t,\theta)$ 于估计式(9.3.16)中的 q_*，利用上述估计，可得式(9.3.13)。

推论 9.3.5 令

$$M(\alpha,\beta,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle DH_0(q_n(t,\theta)), \partial_{xx}q_n(t,\theta) - \alpha q_n(t,\theta) - \beta\rangle \mathrm{d}t$$

为 Melnikov 积分，设 $M=0$，$\partial_\beta M\neq 0$ 在某个 $\alpha_0>0$，$\beta_0>0$，$\theta^0\in[\theta_1,\theta_2]$，则存在 $\beta(\alpha,\theta,\varepsilon)$ 使得 $u_2(T)=u(T)$，即 $u(T)\in W_\varepsilon^{cs}$，其中 α、θ 在某一邻域中，ε 充分小。更进一步，$\beta(\alpha,\beta,\varepsilon)$ 对 α、θ 为 C^1，对 ε 为连续，$D_\alpha\beta$，$D_\theta\beta$ 对 ε 是连续的。

这个推论来自引理 9.3.4 和隐函数定理，$\beta(\alpha,\theta,\varepsilon)$ 的正则性来自 W_ε^{cs} 的正则性，我们将在以后讨论它。

9.3.3 第二测量量

现设推论 9.3.5 的条件满足，$\beta=\beta(\alpha,\theta,\varepsilon)$ 也满足式(9.2.93)。因此 $u(T)=u_2(T)\in W_\varepsilon^{cs}$，命题 9.2.13 成立。我们证明对 Q_ε 的同宿轨道的存在性。

从命题 9.2.13，存在一个函数 $g_\varepsilon^s(\theta,\gamma^-,h)$ 定义在 N^s 上，其中

$$N^s = \{(\theta,\gamma^-,h) \mid |h|_1, |\gamma^-| < \delta\varepsilon^{1/2}, \theta\in(\theta_1 + C\delta, \theta_2 - C\delta)\}$$

使得 $(J,\theta,\gamma^-,\gamma^+,h)\in W_\varepsilon^s$，其中

$$J = \nu g_\varepsilon^s(\theta,\gamma^-,h), \quad \gamma^+ = g_\varepsilon^{cs}(J,\theta,\gamma^-,h)$$

其中 g_ε^{cs} 如命题 9.2.8 所定义，它表为中心稳定流形。更进一步，从式(9.2.118)，g_ε^s 对 $\theta,\gamma^-,h,\alpha,\beta$ 为 Lip，其中 Lip 常数为 $C\delta$。

令

$$u(t) = (J_1(t), \theta_1(t), \gamma_1^+(t), \gamma_1^-(t), h_1(t))$$

$$q_*(t) = (J_*(t), \theta_*(t), \gamma_*^+(t), \gamma_*^-(t), h_*(t))$$

在推论 9.3.5 条件下，对 $\beta=\beta(\alpha,\theta,\varepsilon)$，$u(T)\in W_\varepsilon^{cs}$，即

$$\gamma_1^+(T) = g_\varepsilon^{cs}(J_1(T), \theta_1(T), \gamma_1^-(T), h_1(T))$$

按照引理 9.3.3，上式对于一切 $t\in\left[T, T-(\frac{2}{\sigma})\log\varepsilon\right]$ 成立，未扰动同宿轨道 $q_*(t)$ 和异宿轨道 $q_h(t,\theta)$ 分别具有位相差 $-4p_{\varepsilon,\theta}$ 和 $-4p_\omega$。因 $|q_*(0) - q_h(0,\theta)|_1 \leqslant C\nu$，我们有

$$|p_{\varepsilon,\theta} - p_\omega| \leqslant C\nu$$

引理 9.3.6 设参数 $\theta^*\in(\theta_1 + C\delta, \theta_2 - C\delta)$，$\alpha_0>0$，$\beta=(\alpha_0, \theta^* + 4p_\omega, \varepsilon)>0$ 满足式(9.2.93)，$\theta^* + 4p_\omega\in(\theta_1 + C\delta, \theta_2 - C\delta)$，且

$$4\alpha\omega p + \beta(\sin\theta^* + 4p_\omega) - \sin\theta^* = 0 \tag{9.3.17}$$

则存在 $\theta(\alpha,\varepsilon)$ 接近于 $\theta_* + 4p_\omega$ 对 (α,ε) 在 $(\alpha_0,0)$ 的一个邻域中，使得 $\beta=\beta(\alpha,\theta(\alpha,\varepsilon),\varepsilon)$，$\theta=\theta(\alpha,\varepsilon)$，$u(t)$ 为 Q_ε 的同宿轨道。

证明:令 $\tilde{T}=T-\frac{2}{\sigma}\log\varepsilon$

首先从不等式(9.3.4),有

$$|q_*(\tilde{T})-\sqrt{\omega^2+\nu\phi_\nu^u(\theta)}e^{i(-2\nu\phi_\nu^u(\theta)\tilde{T}-4p_\omega)}|_1\leqslant C\delta\varepsilon^{3/2}$$

由引理 9.3.3 和 ϕ_ν^u 对 ν 的光滑性,推出

$$|\gamma_1^-(\tilde{T})|,|h_1(\tilde{T})|_1\leqslant 2C_3(T)\varepsilon(\log\varepsilon)^2 \quad (9.3.18)$$

$$|\theta_1(\tilde{T})-(\theta-4p_\omega)|\leqslant -C\nu\log\varepsilon \quad (9.3.19)$$

$$|J_1(\tilde{T})-\nu\phi_0^u(\theta)|\leqslant 2C_3(T)\varepsilon(\log\varepsilon)^2 \quad (9.3.20)$$

因此 $(\theta_1(\tilde{T}),\gamma_1^-(\tilde{T}),h_1(\tilde{T}))\in N^s$

如 θ 接近于 θ^*+4p_ω, $u(\tilde{T})\in W_\varepsilon^s$ 当且仅当

$$J_1(\tilde{T})=\nu g_\varepsilon^s(\theta_1(\tilde{T}),\gamma_1^-(\tilde{T}),h_1(\tilde{T}))$$

令 $\theta_1^*=\theta^*-\delta\in(\theta_1,\theta^*)$, $\theta_2^*=\theta^*+\delta\in(\theta^*,\theta_2)$ 接近于 θ^*,则 $\theta_1^*+4p_\omega,\theta_2^*+4p_\omega\in(\theta_1,\theta_2)$。因 $(\phi_0^s)'>0,(\phi_0^u)'<0$,在 $[\theta_1,\theta_2]$,我们有

$(\phi_\nu^s)'>a>0,(\phi_\nu^u)'<-a<0$。注意到条件(9.3.17)推出

$$\phi_0^u(\theta^*+4p_\omega)=\phi_0^s(\theta^*)$$

因此,从 ϕ_ν^s 对 ν 的光滑性得到

$$\begin{aligned}&\phi_0^u(\theta_2^*+4p_\omega)-\phi_\nu^s(\theta_2^*)=\\&\phi_0^u(\theta_2^*+4p_\omega)-\\&\phi_0^u(\theta^*+4p_\omega)+\phi_0^s(\theta^*)-\phi_\nu^s(\theta_2^*)\leqslant\\&-2a\delta+C\nu\end{aligned} \quad (9.3.21)$$

类似地

$$\phi_0^u(\theta_1^*+4p_\omega)-\phi_\nu^s(\theta_1^*)\geqslant 2a\delta-C\nu \quad (9.3.22)$$

另一方面,注意到 $g_\varepsilon^s(\theta,\gamma^-=0,h=0)=\phi_\nu^s(\theta)$, g_ε^s 具有 Lip 常数 $C\delta$,因此。如 $z_{\varepsilon,\theta}$ 具有参数 $\theta=\theta_1^*+4p_\omega$,从不等式(9.3.18)、式(9.3.22),有

$$\begin{aligned}&J_1(\tilde{T})-\nu g_2^s(\theta_1(\tilde{T}),\gamma_1^-(\tilde{T}),h_1(\tilde{T}))\geqslant\\&J_1(\tilde{T})-\nu g_\varepsilon^s(\theta_1(\tilde{T}),0,0)-CC_3\delta\nu^3(\log\varepsilon)^2\geqslant\\&\nu\phi_0^u(\theta_1^*+4p_\omega)-\nu g_\varepsilon^s(\theta_1^*,0,0)-C\delta\varepsilon(\log\varepsilon)^2\geqslant\\&2a\delta\nu-C\delta\varepsilon(\log\varepsilon)^2\end{aligned} \quad (9.3.23)$$

类似地,如 $z_{\varepsilon,\theta}$ 具有参数 $\theta=\theta_2^*+4p_\omega$,则

$$\begin{aligned}&J_1(\tilde{T})-\nu g_\varepsilon^s(\theta_1(\tilde{T}),\gamma_1^-(\tilde{T}),h_1(\tilde{T}))\leqslant\\&-2a\delta\nu+C\delta\varepsilon(\log\varepsilon)^2\end{aligned} \quad (9.3.24)$$

对固定 $\alpha>0$,充分小 $\varepsilon>0$, $\theta\in(\theta_1^*+4p_\omega,\theta_2^*+4p_\omega)$, $\beta(\alpha,\theta_1,\varepsilon)$,

$$J_1(\tilde{T})-\nu g_\varepsilon^s(\theta_1(\tilde{T}),\gamma_1^-(\tilde{T}),h_1(\tilde{T}))$$

为一个连续函数。因此,存在 $\theta(\alpha,\varepsilon)\in(\theta_1^*+4p_\omega,\theta_2^*+4p_\omega)$ 使得

$$J_1(\tilde{T})-\nu g_\varepsilon^s(\theta_1(\tilde{T}),\gamma_1^-(\tilde{T}),h_1(\tilde{T}))=0$$

且 $u(\tilde{T})\in W_\varepsilon^s$。因此 $u(t)\to Q_\varepsilon$, $t\to\infty$, $u(t)$ 为 Q_ε 的同宿轨道。

9.3.4 同宿轨道的存在性

对参数作如下假设:

(1) $\omega\in(\frac{1}{2},1)$

(2) $\beta>\alpha\omega$

(3) $4(1-\omega^2)(4+\alpha)^2>\omega^2(\rho^2-\alpha^2\omega^2)>0$

(4)对推论 9.3.5 定义的 $M(\alpha,\beta,\theta)$,存在 $\beta_0>0,\alpha_0>0,\theta^\circ>0$ 使得

$$M(\alpha_0,\beta_0,\theta^\circ)=0,\partial_\beta M(\alpha_0,\beta_0,\theta^\circ)\neq 0$$

(5)存在 θ^* 在 $\theta^\circ-4p_\omega$ 的一个邻域使得

$$\theta^*,\theta^*+4p_\omega\in\left(\pi-\arctan\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega},\ 3\pi-\arctan\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}\right),$$

$$4\alpha\omega p_\omega+\beta(\sin(\theta^*+4p_\omega)-\sin\theta^*)=0 \quad (9.3.25)$$

在假设(1)下,存在未扰动 NLS 方程(9.1.1)的轨道同宿于圆 C_r,

其中 r 接近于 ω。进一步,线性化方程沿 C_ω 具有一个强稳定和一个强不稳定特征值。在假设(2)下,扰动 NLS 方程(9.1.1)在平面 Π_ϵ 上具有一个鞍点 Q_ϵ。假设(3)是一个技术的假定,用于估计 Q_ϵ 的稳定流形 W_ϵ^s 的大小。这个假定是当用能量方法代替规范变换时出现的。假定(4)是关于 Melnikov 函数 $M(\alpha,\beta,\theta)$ 非退化零点的存在性。最后一个假设略不同于引理 9.3.6 的 $\theta^* \in (\theta_1 + C\delta, \theta_2 - C\delta)$。事实上,注意到

$$\theta_1 \in \left(\hat{\theta} = \pi - \arctan\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2\omega^2}}{\alpha\omega}, \theta_0\right)$$

能选取接近于 $\hat{\theta}$,而 θ_2 能选取接近于 $\hat{\theta} + 2\pi$。当固定 θ_1 后,选取充分小且与 ϵ 无关。最后,在文中证明,取 $\epsilon \ll \delta$,上述假设(5)对于第二测量量是充分的。

综上所述可得

命题 9.3.7 在假设(1)~假设(5)下,对任何充分小的 $\epsilon > 0$ 和 $\alpha > 0$ 接近于 α_0,存在参数 $\beta(\alpha,\epsilon) > 0$ 接近于 β_0,使得扰动 NLS 方程(9.1.1)具有 Q_ϵ 的同宿轨道。

以下我们讨论是否存在参数 $\alpha > 0, \beta > 0$ 和 $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使上述假设成立。

引理 9.3.8 对于 $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 接近于 $\frac{1}{2}$,则存在 $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$ 和 θ_0 使得假设(2)~假设(4)满足。对于 $\theta^* = \theta_0 - 4p\omega$,附加假设(5)也是满足的。

证明:令

$$q_0(t) = \frac{\cos 2p_\omega - i\sin 2p_\omega \tanh\tau + \dfrac{\sin p_\omega \cos x}{\cosh\tau}}{1 - \dfrac{\sin p_\omega \cos x}{\cosh x}}$$

它出现于表达式(9.3.2)中,作为那些具有两点在圆 C_ω 上的异宿轨道的核心。注意到

$$M(\alpha,\beta,\theta) = M_\alpha\alpha + M_0 + M_\beta(\theta)\beta$$

其中

$$M_\alpha = -\int_{-\infty}^{\infty}\langle DH_0(q_h(t,\theta)), q_h(t,\theta)\rangle \mathrm{d}t =$$

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} i\partial_t q_h(t,\theta)\bar{q}_h(t,\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$\omega^2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} i\partial_t q_0(t)\bar{q}_0(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{9.3.26}$$

$$M_0 = \omega^2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} i\partial_{tt} q_0(t)\partial_x\bar{q}_0(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{9.3.27}$$

$$M_\beta = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i\langle\partial_t q_h(t,\theta)\rangle\mathrm{d}t \tag{9.3.28}$$

因此,M_α,M_0 与 θ 无关,当 $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,且接近于 $\frac{1}{2}$,$\sigma_\omega = \sqrt{4\omega^2 - 1}$,$p_\omega = \arctan\sigma_\omega$ 是小的。M_α,M_0 依 p_ϵ 展开可得

$$M_\alpha = \omega^2\left(8\pi p_\omega - \frac{16}{3}\pi p_\omega^3\right) + O(p_\omega^4)$$

$$M_0 = \frac{8}{3}\pi p_\omega^3\omega^2 + O(p_\omega^4)$$

设 α_0 满足

$$\alpha_0(M_\alpha - 8\pi\omega^2 p_\omega) + M_0 = 0$$

因此 $\alpha_0 = \frac{1}{2} + O(p_\omega)$,选取 $\beta_0 > 0$ 使得

$$\omega^2(\beta_0^2 - \alpha_0^2\omega^2) \in (1, 4(1-\omega^2)(4t\alpha_0)^2 q)$$

我们断言,这些选择 α_0,β_0 存在 θ^* 满足假设(5),为此,对 p_ω 展开式(9.3.25)左边,可得

$$(4\alpha_0\omega + 4\beta_0\cos\theta)p_\omega - 8\beta_0\sin\theta p_\omega^2 + O(p_\omega^3)$$

如

$$\theta = \pi - \arctan\frac{\sqrt{\beta_0^2 - \alpha_0^2\omega^2}}{\alpha_0\omega}$$

它是负的,如

$$\theta = \pi + \arctan \frac{\sqrt{\beta_0^2 - \alpha_0^2\omega^2}}{\alpha_0\omega}$$

它是正的。因此存在 θ^* 使得假设(5)成立(p_ω 是小的)。令 $\theta_0 = \theta^* + 4p_\omega$,对此选取的($\alpha_0, \beta_0, \theta^\circ$),易见

$$M_\beta = 2\pi\omega(\sin\theta^\circ - \sin(\theta^\circ - 4p_\omega)) = -\frac{\delta\pi\alpha_0\omega^2}{\beta_0}$$

因此

$$M(\alpha_0, \beta_0, \theta^\circ) = 0, \partial_\beta M(\alpha_0, \beta_0, \theta^\circ) = M_\beta \neq 0$$

参数($\alpha_0, \beta_0, \theta^\circ$)满足引理中的一切假定。

由引理 9.3.8 和命题 9.3.7 完成了主要定理的证明。

第十章 Morse 函数与 Floquet 理论

10.1 非线性 Schrödinger 方程的 Morse 函数和 Melnikov 函数

考虑以下可积非线性 Schrödinger 方程

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0 \tag{10.1.1}$$

具周期边界条件

$$q(x+1, t) = q(x, t) \tag{10.1.2}$$

NLS 方程(10.1.1)可写成以下 Hamilton 方程组

$$-iq_t = J\mathrm{grad}H \tag{10.1.3}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.1.4}$$

$$H(\boldsymbol{q}) = \int_0^1 [|q_x|^2 - |q|^4]\mathrm{d}x \tag{10.1.5}$$

式(10.2.1)的 Lax 对为

$$\begin{cases} \varphi_x = U^{(\lambda)}\varphi & (10.1.6) \\ \varphi_t = V^{(\lambda)}\varphi & (10.1.7) \end{cases}$$

其中

$$U^{(\lambda)} = i\lambda\sigma + i\begin{pmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V^{(\lambda)} = i[2\lambda^2 - |q|^2]\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2i\lambda q + q_x \\ 2i\lambda\bar{q} - \bar{q}_x & \varphi \end{pmatrix} \tag{10.1.8}$$

σ_3 为第三 Panli 矩阵，$\sigma_3 = \mathrm{diag}(1, -1)$。

设 $y^{(1)}, y^{(2)}$ 为方程组(10.1.6)的基本解，取初值为

$$y^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.1.9}$$

于是可得 $y^{(1)}, y^{(2)}$ 的积分方程表示

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \exp[i\sigma_3\lambda(x-t)]\begin{bmatrix} 0 & iq \\ -i\bar{q} & 0 \end{bmatrix} y^{(1)}\mathrm{d}t \tag{10.1.10}$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{pmatrix} + \int_0^x \exp[i\sigma_3\lambda(x-t)]\begin{bmatrix} 0 & iq \\ -i\bar{q} & 0 \end{bmatrix} y^{(2)}\mathrm{d}t \tag{10.1.11}$$

通过 Weyl 迭代，可得 $y^{(1)}, y^{(2)}$ 以下估计

$$|y^{(1)}| \leqslant \exp\{|\mathrm{Im}\lambda|x\}\begin{bmatrix} \cosh(\|q\|_2\sqrt{x/2}) \\ \sinh(\|q\|_2\sqrt{x/2}) \end{bmatrix} \tag{10.1.12}$$

$$|y^{(2)}| \leqslant \exp\{|\mathrm{Im}\lambda|x\}\begin{bmatrix} \sinh(\|q\|_2\sqrt{x/2}) \\ \cosh(\|q\|_2\sqrt{x/2}) \end{bmatrix} \tag{10.1.13}$$

于是有

定理 10.1.1 满足积分方程(10.1.10)、式(10.1.11)和初始条件式(10.1.9)的解是存在的，且对 $\lambda, \boldsymbol{q}$ 是解析的。

10.1.1 Floquet 谱理论

定义基本解矩阵 $M = M(x;\lambda;\boldsymbol{q})$ 为

$$M = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$$

引入转换矩阵 T，有

$$T(\lambda, \boldsymbol{q}) = M(t;\lambda;\boldsymbol{q})$$

Floquet 判别式为 Δ：

$$\Delta: C \times H^1 \to C, \Delta(\lambda;\boldsymbol{q}) = \mathrm{tr}\{T(\lambda;\boldsymbol{q})\}$$

算子 L 的谱 $\sigma(L(\boldsymbol{q}))$ 为

$$\sigma(L(\boldsymbol{q})) = \{\lambda \in C \mid \Delta(\lambda) \text{ 为实的}, -2 \leqslant \Delta \leqslant 2\}$$

$$L = -i\sigma_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \begin{pmatrix} 0 & q \\ \bar{\boldsymbol{q}} & 0 \end{pmatrix}$$

Floquet 判别式具有以下性质：

命题 10.1.2 (1)Floquet 判别式对于 Poisson 括号具有可交换性，即

$$\{\Delta(\lambda;q,\bar{q}), \Delta(\lambda';q,\bar{q})\} = 0, \quad \forall \lambda, \lambda'$$

其中 Poisson 括号定义为

$$\{F, G\} = \int_0^{2\pi} i\left(\frac{\delta F}{\delta q}\frac{\partial G}{\delta \bar{q}} - \frac{\delta F}{\delta \bar{q}}\frac{\delta G}{\delta q}\right)\mathrm{d}x$$

(2)$\Delta(\lambda;q,\bar{q})$ 为 NLS 的运动常数，因它和 Hamilton 的 Poisson 括号为零：

$$\{\Delta(\lambda;q,\bar{q}), H(q,\bar{q})\} = 0, \quad \forall \lambda$$

因此，$\Delta(\lambda;\boldsymbol{q})$ 形成无穷族 NLS 的运动常数。

对于 L 的谱理论困难来自算子的非自共轭性，在一个带子中产生，不必是实的。对于周期点 λ_j，有 $\Delta(\lambda_j) = \pm 2$，且

$$\lambda_j \approx j\pi, \quad \lambda_j \to \pm\infty$$

现定义临界点和多重点：

临界点：$\left.\dfrac{\mathrm{d}\Delta(\lambda;\boldsymbol{q})}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda^c(q)} = 0$； 多重点为 λ^m，它是一个临界点，且

$$\Delta(\lambda^m;q) = \pm 2$$

λ^m 的代数重数定义为 $\Delta(\lambda) \mp 2$ 零点的阶数，通常为 2，也可超过 2。当它等于 2 时，称多重点为双点，标以 λ^d。λ^m 的几何重数定义为算子 L 在 λ^m 上特征空间的维数，它是 1 或 2。现考虑算子 L 谱的性质，首先实轴为谱的子集，$R \subset \sigma(L)$。考虑一个临界点 λ^c，且

$$|\Delta(\lambda^c)| < 2$$

这样的一个临界点是谱的一个分叉点，典型谱的剖面如图 10.1.1 所示。

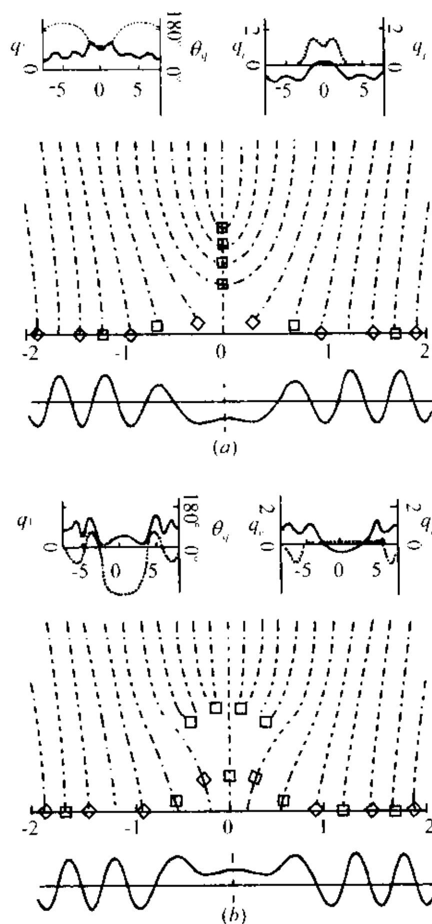


图 10.1.1 某些典型谱的外形图

类似于 Hill 方程的讨论可建立 NLS 方程控制谱的可数性引理。

引理10.1.3 （临界点的可数性引理）。设 $q \in H^1$，设 $N = N(\| q \|_{H^1}) \in Z^+$，为

$$N(\| q \|_{H^1}) = 2[\| q \|_2^2 \cosh \| q \|_2 + 3 \| q \|_{H^1} \sinh(\| q \|_2)]$$

其中[·]表示大于 x 的第一整数。考虑

$$\Delta'(\lambda; \boldsymbol{q}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Delta(\lambda; \boldsymbol{q})$$

则有

（Ⅰ） $\Delta'(\lambda; \boldsymbol{q})$在 $D = \{\lambda \in C: |\lambda| \leqslant (2N+1)\pi/2\}$内有 $2N+1$ 个零点。

（Ⅱ） 在$\{\lambda \in C: |\lambda - k\pi| < \frac{\pi}{4}, k \in Z, |k| < N\}$有一个零点。

（Ⅲ） $\Delta'(\lambda; q)$没有其他零点。

（Ⅳ） 对$|\lambda| > (2N+1)\pi/2$，Δ'的实点$\{x_j^c, |j| > N\}$均为零的，简单的，且满足渐近式：

$$x_j^c = j\pi + O(1), \quad |j| \to \infty$$

现考虑谱的排列，在 D 之外，临界点是实的，$|j| > N$

$$\lambda_{-N-1}^c > \lambda_{-N-2}^c > \cdots$$

$$\lambda_{N+1}^c < \lambda_{N+2}^c < \cdots$$

$x_j^c \approx j\pi$。$(2N+1)$个临界点$\{\lambda_j^c | |j| < N\}$位于 D 内，$2N+1$ 个临界点或者是实的，或产生复共轭对，因此。具有奇数 $2M+1$ 个实临界点，$M \leqslant N$，对于固定的 $\boldsymbol{q}$，有在 D 之内的实的临界点

$$\lambda_{-M}^c \leqslant \lambda_{-M+1}^c \leqslant \cdots \leqslant \lambda_0^c \leqslant \lambda_1^c \leqslant \cdots \leqslant \lambda_M^c$$

复的，在上半平面，在 D 之内

$$\lambda_j^c, \quad j = M+1, \cdots, N$$

复的，在下半平面，在 D 之内

$$\lambda_{-j}^c = \lambda_j^c, \quad j = M+1, \cdots, N$$

令 $\boldsymbol{\psi}^{\pm}(x, \lambda)$表示在$[\boldsymbol{q}, \lambda]$的 Bloch 特征函数，这些特征函数满足转换条件。通过周期：

$$\boldsymbol{\psi}(x+1, \lambda) = \rho(\lambda)\boldsymbol{\psi}(x, \lambda)$$

其中 $\rho(\lambda)$为 Floquet 乘子。可用 Floquet 判别式表示

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2}[\Delta(\lambda) + \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}]$$

$\rho, \boldsymbol{\psi}$ 为$(\lambda, \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4})$Riemann 曲面上定义的函数，$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(x, \lambda)$表示 $\boldsymbol{\psi}$ 在λ 的二叶上的值。在分支点(简单周期或反周期点)，两支相交，$\boldsymbol{\psi}^{\pm}$变为线性无关，在实的多重点上，$\psi^{\pm}$保持线性相关。在复的多重点上，可能变为不相关。对于固定的 λ，这些 Bloch 特征函数能表为

$$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(x;\lambda) = \alpha^{\pm}\{M_{21}(1;\lambda)y^{(1)}(x;\lambda) + [M_{22}(1;\lambda) - \rho^{\pm}(\lambda)]y^{(2)}\}$$

其中

$$\alpha^{\pm} = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{M_{11}(1,\lambda) - \rho^{\pm 1}}{M_{21}(1,\lambda)[\Delta^2(\lambda) - 4]}}$$

基本解矩阵 $M(x;\lambda) = 列\{y^{(1)}(x;\lambda), y^{(2)}(x;\lambda)\}$
保证具有重要的对称性

$$\boldsymbol{\psi}^{-}(x;\lambda) = \pm[J\boldsymbol{\psi}(x;\lambda)]$$

为了解释这些特征函数，举二个平凡的例子。其一，取 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$，此时多重点为实的，$\lambda_j^d = j\pi$，几何重点为 2，对于 Lax 方程组的 Bloch 特征函数为

$$\begin{pmatrix}\psi_1^{(+)}\\ \psi_2^{(+)}\end{pmatrix} = \exp\{i(\lambda x + 2\lambda^2 t)\}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1^{(-)}\\ \psi_2^{(-)}\end{pmatrix} = \exp\{-i(\lambda x + \lambda^2 t)\}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

其二，设

$$q(x,t) = c\exp[i(2c^2 t + \gamma)] \tag{10.1.14}$$

此时 Bloch 特征函数为

$$\begin{pmatrix}\psi_1^{(+)}\\ \psi_2^{(+)}\end{pmatrix} = \exp\{\pm i[k(\lambda)(x + 2\lambda t)]\}\cdot$$

$$\begin{pmatrix}c\exp[-i(2c^2 t + \gamma)/2]\\ (\pm k(\lambda) - \lambda)\exp[i(2c^2 t + \gamma)/2]\end{pmatrix}$$

其中 $k(\lambda)$和 λ_j 为

$$k(\lambda) = \int_{ic}^{\lambda}\left[\frac{\Delta'}{\sqrt{\Delta^2 - 4}}\right]d\lambda = \sqrt{\lambda^2 + c^2}$$

$$k(\lambda_j) = j\pi$$

在这个例子中，$q(x,t)$为常数，与 x 无关，易从 Floquet 判别式计算线性算子 L 的谱

$$\Delta[\lambda; \boldsymbol{q}(\cdot, t; c, \gamma)] = 2\cos k(\lambda) = 2\cos[(\lambda^2 + c^2)^{1/2}]$$

其谱如图 10.1.2 所示。

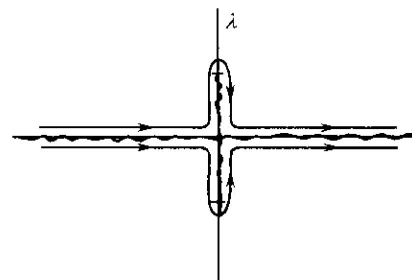


图 10.1.2　常位势谱序的路径

由于 Floquet 判别式对于 $\boldsymbol{q}$ 和 λ 为整函数，可计算它的一阶导数。

引理 10.1.4

$$\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}\Delta(\lambda; q, \bar{q}) = i\frac{\sqrt{\Delta^2 - 4}}{W[\psi^+, \psi^-]}\begin{bmatrix}\psi_2^+(x;\lambda), \psi_2^-(x;\lambda)\\ \psi_1^+(x;\lambda), \psi_1^-(x;\lambda)\end{bmatrix} \tag{10.1.15}$$

$$\frac{d\Delta}{d\lambda} = -i\frac{\sqrt{\Delta^2 - 4}}{W[\psi^+, \psi^-]}\int_0^1[\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-]dx \tag{10.1.16}$$

其中 W 表示朗斯基行列式，Bloch 特征函数 $\psi^{\pm}$ 为式(9.1.12)所定义。

10.1.2 F_j 的临界结构

现考虑 F_j 的临界构造，对固定 $q\in\mathscr{F}$，$N_b(q)$ 表示 q 的一个小的邻域，引入泛函序列

$$F_j:N_b(q)\to C,\ F_j\equiv\Delta(\lambda_j^c(q),q)$$

有两点必须说明：首先，对 $|j|>N$，F_j 为实的，$F_j\in[-2,+2]$。其次，对于复的临界点，$|j|=M+1,\cdots,N$，$F_j=F_j^R+iF_j^I$ 不必是实的。因此，为方便计，引入等价的实常数序列

$$G_j=\begin{cases}F_j, & |j|\leqslant M\\ \dfrac{1}{2}[F_j+F_{-j}], & j=M+1,\cdots,N\\ \dfrac{1}{2i}[F_j-F_{-j}], & j=-M-1,\cdots,-N\\ (-1)^jF_j, & |j|>N\end{cases}\tag{10.1.17}$$

对于固定 j，$q\in N_b$，且 $\Delta''(\lambda_j^c)\neq0$，我们研究泛函 F_j 的临界点，由公式(9.1.15)、式(9.1.16)，以及 $\lambda^c(q)$ 的可微性(因 λ_j^c 为 Δ' 的简单零点)，由此即推出：

引理10.1.5

$$\operatorname{grad}F_j(q,q)=i\frac{\sqrt{\Delta^2-4}}{W[\psi^+,\psi^-]}\begin{bmatrix}\psi_2^+(x;\lambda_j^c) & \psi_2^-(x;\lambda_j^c)\\ \psi_1^+(x;\lambda_j^c) & \psi_1^-(x;\lambda_j^c)\end{bmatrix}\tag{10.1.18}$$

考虑复的临界点，令

$$F_j(q)=F_j^R(q)+iF_j^I(q)$$

引理 10.1.6 对于复临界点 $\lambda_j^c(q)$，设 $\operatorname{grad}F_j\neq0$，$q$，$q_x$ 作为 x 的函数是线性无关的，则 F_j^R 和 F_j^I 是线性无关泛函。

对于固定 j，考虑临界位势 q_*

$$\operatorname{grad}F_j|_{q_*}=0\tag{10.1.19}$$

引理 10.1.7 除了平凡情况 $q=0$ 外，有

$$(\text{I})\quad \frac{\delta F_j}{\delta q}=0\Rightarrow\frac{\delta F_j}{\delta q}=0\Leftrightarrow M(1;\lambda_j^c,q_*)=\pm I$$

$$(\text{II})\quad \operatorname{grad}F_j|_{q_*}=0\Rightarrow\Delta'(\lambda_j^c(q_*);q_*)=0$$
$$\Rightarrow|F_j(q_*)|=2$$
$$\Rightarrow\lambda_j^c(q_*)\text{为一个多重点}$$

F_j 的 Hessian 固定 j，$q\in N_b$，且 $\Delta''(\lambda_j^c)\neq0$。$F_j$ 的临界点由子集 $S_j\subset N_b$ 所组成。

$$\operatorname{grad}F_j|_{q_*}=0,\quad q_*\in S_j$$

在 S_j 上 F_j 具有临界值为 ±2，对于 $q_*\in S_j$，考虑 F_j 在 q_* 上的 Hessian。

Hessian 可由特征函数式(10.1.12)在重点 λ_j^d 上的平方积表示，不同的是对于 $\Delta''(\lambda_j^d)\neq0$。取

$$\alpha^+=\alpha^-=\frac{1}{2(\lambda-\lambda_j^d)\sqrt{b\Delta''(\lambda_j^d)}}$$

其中 $b\neq0$ 为

$$b=\int_0^1M_{12}M_{22}\mathrm{d}x$$

定义两个附加系数

$$a=\int_0^1M_{11}M_{21}\mathrm{d}x$$

$$c=\int_0^1[M_{11}M_{22}+M_{12}M_{21}]\mathrm{d}x$$

则有关系

$$\Delta''(\lambda_j^d)=\Delta(\lambda_j^d)[4ab-c^2]$$

计算两个平方特征函数

$$\chi^{(+)}=[\psi^{(+)}]^2+[\psi^{(-)}]^2=$$
$$[\Delta'']^{-1/2}\begin{bmatrix}-\dfrac{\Delta''(\lambda_j^d)}{b\Delta(\lambda_j^d)}(y^{(2)})^2\\ +2[a(y^{(2)})^2-c(y^{(1)}y^{(2)})+b(y^{(1)})^2]\end{bmatrix}$$

$\chi^{(-)}=[\psi^{(+)}]^2-[\psi^{(-)}]^2=$

$$\sqrt{2}i[M_{11}(1)]^{3/2}\left[\frac{c}{2b}(y^{(2)})^2-y^{(1)}y^{(2)}\right]$$

如分解 $\chi^{(\pm)}$ 为

$$\chi^{\pm}=\chi_f^{\pm}+i\chi_{if}^{\pm}$$

定义投影

$$\begin{cases}\delta\Xi_1=\langle -iK\chi_{if}^{+},\delta\boldsymbol{q}\rangle\\ \delta\Xi_2=\langle K\chi_f^{-},\delta\boldsymbol{q}\rangle\\ \delta\Xi_3=\langle K\chi_f^{+},\delta\boldsymbol{q}\rangle\\ \delta\Xi_4=\langle -iK\chi_{if}^{-},\delta\boldsymbol{q}\rangle\end{cases}\tag{10.1.20}$$

投影 $\delta\Xi$ 为实的。span$\langle\chi_f^{+},\chi_f^{-},i\chi_{if}^{+},i\chi_{if}^{-}\rangle$的维数为4,因在复重点几何重数为2,这四个函数是线性无关的。另一方面,对于实重点,span 为二维,且具有如下相关性

λ_j^d 实的, $M_{11}=-I(\Rightarrow\Delta''(\lambda_j^d)>0)$:

$$\chi_f^{+}=\Gamma^{-1}\chi_f^{-},\chi_{if}^{+}=\Gamma\chi_{if}^{-}\tag{10.1.21}$$

λ_j^d 实的, $M_{11}=I(\Rightarrow\Delta''(\lambda_j^d)<0)$:

$$\chi_f^{+}=\Gamma\chi_f^{-},\chi_{if}^{+}=\Gamma^{-1}\chi_{if}^{-}\tag{10.1.22}$$

其中 Γ 定义为

$$\Gamma=\sqrt{\frac{|\Delta''|}{2c^2}}$$

由计算可得:

定理 10.1.8 设 $\boldsymbol{q}$ 为 F_j 的临界点,F_j 的 Hessian 为

(1)λ_j^d 实的

$$\begin{cases}\delta^2F_j=\delta^2F_j^R=\dfrac{\delta|a|^2}{\Delta''(\lambda_j^d)}[(\delta\Xi_1)^2+(\delta\Xi_2)^2],\quad \Delta''>0\\ \delta^2F_j=\delta^2F_j^R=\dfrac{\delta|a|^2}{\Delta''(\lambda_j^d)}[(\delta\Xi_3)^2+(\delta\Xi_4)^2],\quad \Delta''<0\end{cases}\tag{10.1.23}$$

(2)λ_j^d 复的

$$\begin{cases}\delta^2F_j^R=[(\delta\Xi_1)^2+(\delta\Xi_2)^2]-[(\delta\Xi_3)^2+(\delta\Xi_4)^2]\\ \delta^2F_j^I=2[(\delta\Xi_2)(\delta\Xi_4)-(\delta\Xi_1)(\delta\Xi_3)]\end{cases}\tag{10.1.24}$$

对于 $\boldsymbol{q}(x)$,$\delta\boldsymbol{q}(x)$均为 x 的偶函数,投影 $\delta\Xi$ 变成相关,有以下推论:

推论 10.1.9 设 $\boldsymbol{q}(x)$和 $\delta\boldsymbol{q}(x)$为 x 的偶函数,考虑一个纯虚的复重点 λ_j^d,有

$\delta^2F_j=\delta^2F_j^R=$

$$\begin{cases}\dfrac{4a\bar{a}}{c^2}(\delta\Xi_2^2-\delta\Xi_3^2),\quad \Delta(\lambda_j^d)=-2,\dfrac{\Delta''(\lambda_j^d)}{\Delta(\lambda_j^d)}>0\\ \dfrac{4a\bar{a}\Delta(\lambda_j^d)}{\Delta''(\lambda_j^d)}(\delta\Xi_2^2-\delta\Xi_3^2),\quad \Delta(\lambda_j^d)=2,\dfrac{\Delta''(\lambda_j^d)}{\Delta(\lambda_j^d)}>0\\ -\dfrac{4a\bar{a}\Delta(\lambda_j^d)}{\Delta''(\lambda_j^d)}(\delta\Xi_3^2+\delta\Xi_4^2),\quad \Delta(\lambda_j^d)=-2,\dfrac{\Delta''(\lambda_j^d)}{\Delta(\lambda_j^d)}<0\\ -\dfrac{4aa}{c^2}(\delta\Xi_3^2+\delta\Xi_4^2),\quad \Delta(\lambda_j^d)=2,\dfrac{\Delta''(\lambda_j^d)}{\Delta(\lambda_j^d)}<0\end{cases}$$

一个均匀平面波的例子。

设 $q(x,t)$为平面波式(10.1.14),由此求出特征函数和基本解矩阵:

$$M(x;\lambda;c)=\begin{bmatrix}\cos kx+i\dfrac{\lambda}{k}\sin kx & i\dfrac{c}{k}\sin kx\\ i\dfrac{c}{k}\sin kx & \cos kx-i\dfrac{\lambda}{k}\sin kx\end{bmatrix}\tag{10.1.25}$$

Floquet 判别式为

$$\Delta(\lambda;c)=2\cos k$$

由此可得

简单周期点: $\lambda^{\pm}=\pm ic$;

重点: $k(\lambda_j^d)=j\pi,\quad j\in Z,j\neq 0$;

临界点：　$\lambda_j^c=\lambda_j^d,\quad j\in Z,j\neq 0;$

$\lambda_0^c=0$。

$2N$ 个纯虚双重点

$$(\lambda_j^d)^2=\pi^2j^2-c^2,\quad j=2,\cdots,N \tag{10.1.26}$$

其中

$$(\pi N^2-c^2)<0<[\pi^2(N+1)^2-c^2]$$

由此可求得同宿轨道 $Q_H(x,t;c,\gamma;k=\pi,c_+/c_-)$:

$$Q_H=\left[\frac{\cos 2p-\sin p\,\mathrm{sech}\tau\cos(2kx+\phi)-i\sin 2p\tanh\tau}{1+\sin p\,\mathrm{sech}\tau\cos(2kx+\phi)}\right]\cdot$$

$$ce^{-i(2c^2t+\gamma)}\to e^{\mp 2ip}ce^{-i(2c^2t+\gamma)}$$

$$\rho\to\mp\infty \tag{10.1.27}$$

其中 $c_+/c_-\equiv\exp(\rho+i\beta)$，$p$ 定义为 $k+\nu=c\exp(ip)$，$\tau\equiv\sigma t-\rho$，$\phi\equiv p-\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)$。

关于同宿轨道有以下几点必须提一下：

(1)轨道仅依赖于 c_+/c_-，而不是分别依赖于 c_+ 和 c_-。

(2)Q_H 同宿于平面波轨道，从 $t\to\infty$ 到 $t\to-\infty$ 具有 $-4p$ 的位相差。

(3)对于小的 p，Q_H 为

$$Q_H\approx[\cos 2p-i\sin 2p\tanh\tau)$$
$$-2\sin p\,\mathrm{sech}\tau\cos(2kx+p)]ce^{-i(2c^2t+\gamma)}$$

10.1.3 等谱分层的 Morse 描述

利用 H_0(L^2 模)和 H_2(能量)的不变量，能定义子集 $\mathscr{B}^{(h)}\subset\mathscr{F}$:

$$\mathscr{B}^{(h)}\equiv\{q\in\mathscr{F}|_{H_0\leqslant h_0},|H_2|\leqslant h_2\}$$

由 Sobolev 嵌入原理可知集合 $\mathscr{B}^{(h)}$ 是闭的不变集，它在 H^1 中有界，因此它在 L^2 中是紧的。对于 $q\in\mathscr{B}^{(h)}$，由“可数性引理”可知，存在 $N=N^{(h)}$ 和圆盘 $D=D^{(h)}$ 在复平面上。

对于 $q\in\mathscr{B}^{(h)}$，所有临界点 $\{\lambda_j^c\}_{j>N}$ 是实的，能依序排列。但对于 $2N+1$ 个在 D 内的临界点，单序排列是不可能的，因为当 $\Delta''[\lambda_j^c(q);q]=0$ 可有产生临界点相重。对于固定的 j，$|j|\leqslant N$，$\lambda_j^c(q)$ 为多重值解析函数，它的值位于集 $\{\lambda_k^c(q),\forall k,|k|\leqslant N\}$ 中。分叉点为那些点，$q_b\in\mathscr{B}^{(h)}$

$$\Delta'(\lambda_j^c(q_b);q_b)=\Delta''(\lambda_j^c(q_b);q_b)=0,\ |j|\leqslant N$$

我们考虑以下泛函的序列

$$F_j:\mathscr{B}^{(h)}\to C,F_j\equiv\Delta(\lambda_j^c(q);q) \tag{10.1.28}$$

以及相应的 G_j 式(10.1.17)，对 $q\in\mathscr{B}^{(h)}$，序列 $\{j|G_j(q)-2|\}\subset l^2$。对于 $q(x)\in C^\infty$，$\{G_j\}$ 衰减快于任何多项式。进一步限制：函数序列 $\{\delta_j\}_{j>N}$，它衰减快于任意多项式，$|j|\to\infty$，可定义一个小的不变集

$$\mathscr{B}^{(h,\delta)}=\{q\in\mathscr{B}^{(h)}\mid 0\leqslant\|G_j(q)-2\|\leqslant\delta_j,\forall\ |j|<N^{(h)}\}$$

$\mathscr{B}^{(h,\delta)}\subset\mathscr{F}$ 为一闭的有界的，具边界的不变集，因 $\mathscr{B}^{(h,\delta)}\subset\mathscr{B}^{(h)}$，可数性引理能用。且 $\mathscr{B}^{(h,\delta)}$ 在 C^k 中是紧的。

我们要用算子 L 的水平集使 $\mathscr{B}^{(h,\delta)}$ 分层，为此利用运动常数的整族 $\{G_j,j=-\infty,\cdots,+\infty\}$，连同 L 的谱理论去描述这个分层。其次，我们定义临界函数。

定义 10.1.10　函数 $q_*\subset\mathscr{B}^{(h,\delta)}$ 是临界的，如果

(1)$q_*\subset\partial\beta^{(h,\delta)}$，或者

(2)q_* 为分支点，或者

(3)在固定的叶片上，远离分支点，集合 $\{\mathrm{grad}G_j\}_{-\infty}^{\infty}$ 的元素是在 q_* 上线性相关的。

附注 10.1.11　情况(1)的临界函数是人为的，其中边界是人为的，我们以后不考虑它。

附注 10.1.12　q_* 是情况(2)的临界函数⇔

$$\Delta'(\lambda_j^c(q_*);q_*)=\Delta''(\lambda_j^c(q_*);q_*)=0$$

附注 10.1.13　q 为情况(3)(而非情况(2))对于 G_j 的临界函

数$\Leftrightarrow$存在至少一个 j,使得在 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_*$ 上

$$\mathrm{grad}\, G_j = 0;\text{即 } F_j = \pm 2, \mu_j = \lambda_j^d$$

附注 10.1.14 情况(3)的临界函数不是 $\mathscr{F}$中的孤立点,除非 $\mathrm{grad} G_j = 0, \forall j$。而且给定一个临界函数 $\boldsymbol{q}_*$,有 $\mathrm{grad}\, G_l = 0$,而 $\mathrm{grad}\, G_k \neq 0$。我们能取 G_k 作为 Hamillon,用它映照原来临界函数 $\boldsymbol{q}_*$ 为 $\boldsymbol{q}_*(\tau_k)$,这里 τ_k 为流参数。$\tau_k = 0, \boldsymbol{q}_*(\tau_k) = \boldsymbol{q}_*$,原来的临界函数是不孤立的。为了发展可积系统的 Morse 理论,我们必须研究对于运动常数的整体族$\{G_j, \forall j\}$的临界函数的流形。在有限维情况,Bott 研究过,后来对于 Hamillon 系统,Fomenko 研究过,这种理论从"Bott 函数"开始。

定义 10.1.15 设 F 为在可微 Hilbert 流形 $\mathscr{U}$ 上的实值可微函数,一个子流形 $\mathscr{F}\subset\mathscr{U}$ 称之为 F 的非退化临界函数,如果

(1)对任一点 $\boldsymbol{q}\in\mathscr{F}$为 F 的临界点,即 $\mathrm{grad} F|_{\boldsymbol{q}} = 0$。

(2)对任何 $\boldsymbol{q}\in\mathscr{F}$,$F$ 的 Hessian 的零空间为 $\mathscr{F}$的切空间。

一个函数 F 具有这样的临界流形称之为 Bott 函数。

现考虑 G_j 在圆盘 D:$|j|>N$ 外的情况。由可数性引理可知临界点$\{\lambda_j^c, |j|>N\}$是实的,简单的:$\Delta''(\lambda^c)\neq 0$。因此,不存在临界点(2)的情况,每个 G_j 是最大的,在它的临界位势上,G_j 的值为 2。对每个 $j, |j|>N, G_j$ 的每个值,$|2-G_j| = \delta_j^*$,水平集在拓扑上为圆周。进一步,$\delta_j^* \in [0, \delta_j]$,这个圆周位于一个闭的圆盘之外,如图 10.1.3 所示。

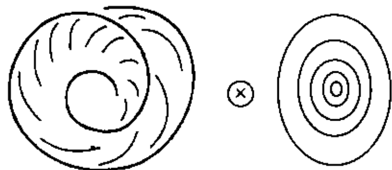


图 10.1.3 固定$|j|>N, G_j$ 的水平集

为了描写这个情况,置 $\delta_j^* = 0, \forall |j|>N$。此时反谱理论保证 $\mathscr{B}^{(h,\delta)}$为一个 $2(N+1)$维的流形 $\mathscr{B}_N^h$

$$\mathscr{B}_N^h = \mathscr{B}^{(h;0,\delta_{-N},\cdots,\delta_N,0)}$$

对于固定 $\delta_j = \delta_j^*(\neq 0), |j|>N, \mathscr{B}^{(h,\delta^*)}$在拓扑上为具圆盘 D_j $(\forall j, |j|>N)$的 $\mathscr{B}$的直积。

用 Morse 理论的标准语言,定义单值泛函

$$G: \mathscr{B}^{(h,\delta)} \to R$$

$$G = \sum_{|j|\geqslant N} \delta_j^{-1}[2 - G_j]$$

定理 10.1.16

(1)$\mathrm{grad}\, G|_{\boldsymbol{q}_*} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{q}_* \in \mathscr{B}_N^h$;

(2)G 是一个 Bott 函数;

(3)G 的梯度流表明 $\mathscr{B}^{(h,\delta)}$同伦于 $\mathscr{B}_N^h$;即 $\mathscr{B}_N^h$ 为 $\mathscr{B}^{(h,\delta)}$的形变收缩。

现考虑在圆盘 D:$F_j, |j|\leqslant N$ 内部。

不变集 $\mathscr{B}_N^h$,通过设 $G_j = 2, |j|>N$ 的定义,是一个有限维的具边界的不变流形,它是闭的有界的和紧的,为描述用水平集的分层,现集中注意力于$\{G_j\}_{|j|<N}$。

在圆盘 D 内部,对于 $\Delta'(\lambda^c) = 0$ 临界点 λ^c 存在,即(2)型临界函数存在。另一方面,远离分叉点,能估计集合$\{\mathrm{grad} G_j\}\ |j|\leqslant N$ 的线性无关的元素的数目 N_D 如下:

$$2(N - N_d) + 1 \leqslant N_D \leqslant 2N + 1, N_D = 2(N - N_d^u)$$

其中 N_d 为上半复平面中重点的数目,N_d^u 为上半平面重点是 Dirichletμ 的数目。

对比于当$|j|>N$ 的简单行态,$G_j, -N\leqslant j\leqslant N$ 的同伦状态是很复杂的。

整体 Morse 理论对于 $\mathscr{B}_N^h$ 也是很困难的。举例说明之。

例:靠近的不变 whisker。设 Π 表示常数平面

$$\Pi \equiv \{\boldsymbol{q}\in\mathscr{F} | \partial_x \boldsymbol{q} = 0\}$$

置 $N=1$,定义盘 $\mathscr{L}^{(h)}\subset\Pi$

$$\mathscr{L}^{(h)} \equiv \Pi \cap \mathscr{B}_1^h$$

算子 $L(\boldsymbol{q})$的谱($\boldsymbol{q}\in\mathscr{U}^{(h)}$)由实轴和在虚轴上的简单带所组成。我们选取 h 充分大,使得两个复重点存在于纯虚轴谱带上,但也适当小,使得不存在多于 2 个的点,如图 10.1.4 所示。

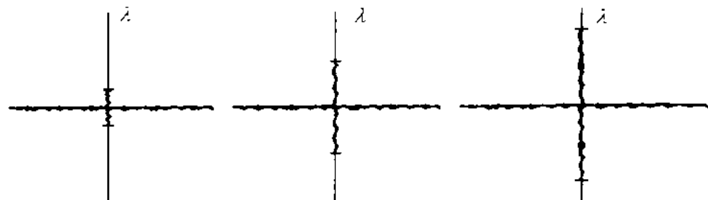


图 10.1.4 在常值平面 Π 上的第一谱变换

位势在 $\mathscr{U}^{(h)}$中是由圆$|q|=r\in\mathscr{U}^{(h)}$所组成,它分 $\mathscr{U}^{(h)}$ 为两个圆环 $\mathscr{U}_0$ 和 $\mathscr{U}_1$:

$$\mathscr{U}_0:0\leqslant|q|\leqslant r_c,\quad \mathscr{U}_1:r_c\leqslant|q|\leqslant r_{\max}$$

引入二个开的环 $\mathscr{B}_0$,$\mathscr{B}_1$,它们不含临界圆,如图 10.1.5 所示。

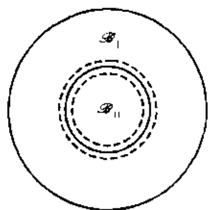


图 10.1.5 不含临界圆的开环 $\mathscr{B}_0$ 和 $\mathscr{B}_1$

因 $N=1$,流形 $\mathscr{B}_1^h$ 是六维的,$\mathscr{B}_1^h$ 中引入两个分别含有环 $\mathscr{U}_0$,$\mathscr{U}_1$ 的六维邻域(开的柱形)$\tilde{U}_0$,$\tilde{U}_1$。对 $\boldsymbol{q}\in\tilde{U}_0$,$L(\boldsymbol{q})$的谱为图 10.1.6 所示。对于 $\boldsymbol{q}\in\tilde{U}_1$,如图 10.1.7 所示。有两种类型是重要的:

1. 偶函数

首先,我们考虑 $\tilde{U}_0$,它是平凡的,类似于$|j|>N$ 的状态。再考虑一般的情况,集中考虑函数的子流形,关于 $x=0$ 是偶的,即 $\boldsymbol{q}(-x)=\boldsymbol{q}(x)$。这个子流形 $\mathscr{U}_1^h\subset\mathscr{B}_1^h$ 是四维的,且在我们的研究

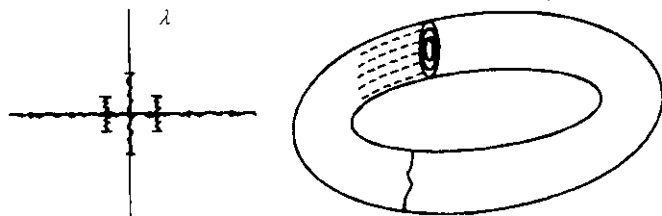


图 10.1.6 谱的外形和在圆盘内实临界点的 Morse 函数 G_1 的水平集

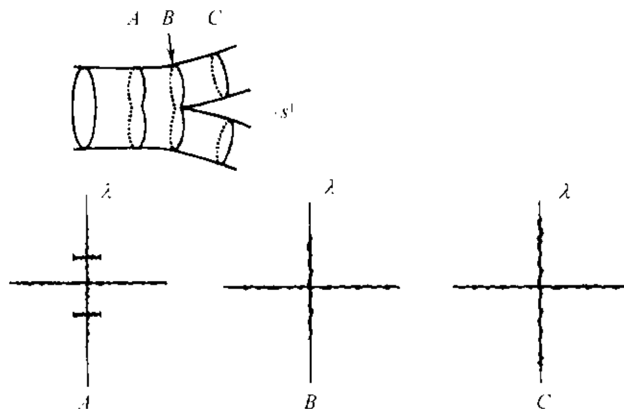


图 10.1.7 偶位势的"裤子"和它的谱变换

中占有重要位置。偶的条件导致以下约束:

$$G_0=g_0,g_0\in(-2,2),g_0\text{ 固定}$$

$$G_{-1}=G_1,G_1\text{ 是自由的}$$

此时 G_1 的临界值是 -2,由它的 Hessian 表明是一个极小值,临界水平集是一个圆,仅会有一个函数在常数平面上。当 G_1 从它的临界值 -2 增加时,在 $\mathscr{U}_1^h$ 中的邻域水平集是两个环,谱图形,以及水平集的图解如图 10.1.6 所示。同时,$\tilde{U}_0$ 的平凡情况是同于在圆盘 D 外实临界点的情况。

转向 $\tilde{U}_1$ 的更关心的情况,$\mathscr{U}_1^h\cap\tilde{U}_1$,它的复重点 λ_1^d 位于虚轴的谱带中,$G_{-1}\equiv0$,剩下两个独立的运动常数 G_0 和 G_1,定义子流

形 $G_0=g_0, g_0\in(-2,2)$，g_0 给定。这个子流形是三维的，位于 $\mathcal{M}_1^h\cap\tilde{U}_1$ 之中，由 g_0 选取，G_0 没有型(2)、型(3)临界点在此子流形上，引入 G_1 限制在这个子流形上作为 Bott 函数。

在偶的情况下，G_1 的临界值为 -2，此时临界集仍为一个圆，仅会一个函数在常数平面 Π 上。Hessian 是一个 3×3 矩阵，具有一个正的，一个负的和一个虚的特征值。它的零向量是正切于临界圆的。鞍点结构存在，这是由于 Hessian 指标为 1，表明圆是一"whisker"圆。

其次，我们用 Bäcklund 变换可得

$$Q_H=\left[\frac{\cos 2p-\sin p\,\mathrm{sech}\,\tau\cos(2kx+\phi)-i\sin 2p\tanh\tau}{1+\sin p\,\mathrm{sech}\,\tau\cos(2kx+\phi)}\right]\times$$

$$ce^{-i(2c^2t+\gamma)}\rightarrow e^{\mp2ip-i(2\tau^2t+\gamma)},\rho\rightarrow\mp\infty$$

为了保证偶性，必须选取 $\phi=0,\phi=\Pi$ 之一，存在两种 whisker，其中之一是二维的，具有参数 ρ,γ。对固定 γ，"数字 8"形结构出现。轴线和临界水平集上是同宿于临界圆，注意这些同宿轨具有位相差 $4p$。

临界圆的一个邻域在偶对称下"裤子"如图 10.1.7 所示。Bäcklund 公式清楚表明"裤子"的一条腿相连于空间位置 $x=0$，而另一条腿相连于 $x=1/2$。这个事实可解释当可积系统给定扰动后产生混沌状态。

在偶对称下，"裤子"能为 Morse 理论的语言所描述。为了讨论同伦转换，定义

$$M_c\equiv\{\boldsymbol{q}\in\mathcal{M}_1^h\cap\tilde{U}_1\mid G_1\leqslant c\}$$

则

$$M_{-2-\epsilon}=2D\times S^1$$

$$M_{-2}=\hat{D}\times S^1$$

$$M_{-2\times\epsilon}=2D\times S^1$$

其中 ϵ 充分小，D 表示两个圆盘，$2D$ 表示不相连的两个盘，$\hat{D}$ 表示两个盘具有两个点在边界上，同伦转变公式为

$$D\times S^1\approx\hat{D}\times S^1=[2D\times S^1\cup e^1]$$

这里 U 表示胞粘，e^1 表示一个胞腔（见图 10.1.8）。1 胞腔是粘着的，因 G_1 的 Morse 指数为 1。



图 10.1.8　偶位势的同伦变换

2. 没有空间对称

现考虑没有空间对称的情况，我们取消偶对称的约束。此时存在三个独立运动常数，$\{G_{-1},G_0,G_1\}$。我们想取 $G_{-1}=g_{-1}$，$G_0=g_0$ 为自由，G_1 为 Bott 函数，如果 $g_{-1}\neq0$，G_1 将不是临界函数。进一步，$g_{-1}=0$，G_{-1} 具有临界函数，G_1 亦然。我们将及时考虑 G_{-1} 和 G_1。

考虑

$$G:\tilde{U}_1\rightarrow R$$

G_1 的临界值为 -2，临界集仍为一个圆，仅令一个函数在 Π 平面上。它的 Hessian 是有两个正的和两个负的特征值，呈鞍点结构。

在一个临界函数上，G_1 的值为 -2，G_{-1} 的值必须为 0，G_0 在 g_0 值上为自由，用 Bäcklund 变换构造临界水平集的明显表达式。

$$G_0=g_0,g_0\in(-2,2),\text{固定}$$

$$G_{-1}=0$$

$$G_1=2$$

为方便计，再重复 Bäcklund 公式

$$Q_H=\left[\frac{\cos 2p-\sin p\,\mathrm{sech}\,\tau\cos(2kx+\phi)-i\sin 2p\tanh\tau}{1+\sin p\,\mathrm{sech}\,\tau\cos(2kx+\phi)}\right]\cdot$$

$$ce^{-i(2c^2t+\gamma)}\rightarrow e^{\mp2ip}ce^{-i(2c^2t+\gamma)},\rho\rightarrow\mp\infty$$

如图 10.1.9 所示。

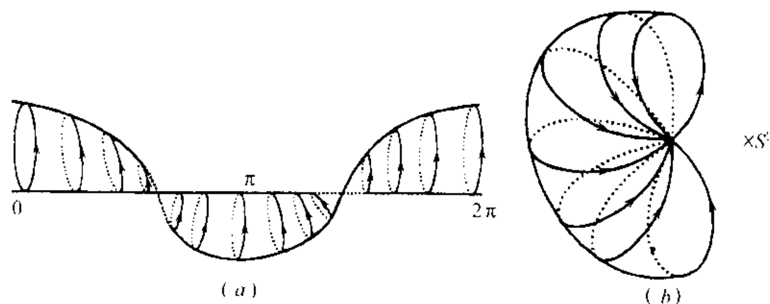


图 10.1.9　ϕ 连同 $\phi+\pi$"胡子"的构造(a)和整个"胡子"的一半(b)

从一族"数字 8"形图构造临界水平集。Bäcklund 公式表明临界水平集依赖于参数 $\rho\in(0,+\infty)$, $\phi\in[0,2\pi)$, $\gamma\in[0,2\pi)$连同边界 $\rho=0$, $\rho=+\infty$。它们是由一组具参数 $\phi\in[0,2\pi)$的圆所组成实际上,所有点在水平面轴上是相同的,如图 10.1.9(a)所示。而在图 10.1.9(b)中表示水平集为 $S\times\hat{S}^2$, $\hat{S}^2$ 为具有两点的两个球,此时临界水平集是相连的,而在偶约束下是不相连的。

为了描述临界水平集的邻域,考虑集合

$$G_0 = g_0, g_0 \in (-2,2), g_0 \text{ 固定}$$

$$G_{-1} = 0$$

$$G_1 = g_1,\quad g_1 \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon), g_1 \text{ 自由}$$

这个集合不是个流形,但它由四维流形连同边界分量所组成。选取 g_0 使得 G_0 在四维流形上不是临界点。我们能把四维流形看成三维流形 $\times S$。这种情况如图 10.1.10 和图 10.1.11 所示。

为了了解这些图形,首先固定 $g_1<-2$, L 的谱在虚轴上有一个间隙,而水平集为三个环 T^3,注意一下扭曲。当 $g_1<-2$ 变化时,形成了三个环的最近一族。

另一方面,固定 $g_1>-2$, L 的谱越过虚轴,水平集保持三环 T^3。总之,当 G_1 在靠近 -2 的临界值变化,水平集的邻域为三环 T^3,每个水平集是连通的。三环 T^3 不依赖于 $G_1\leqslant -2$ 或 $G_1\geqslant -2$。特别三环具有一个扭曲。如图 10.1.12 所示。

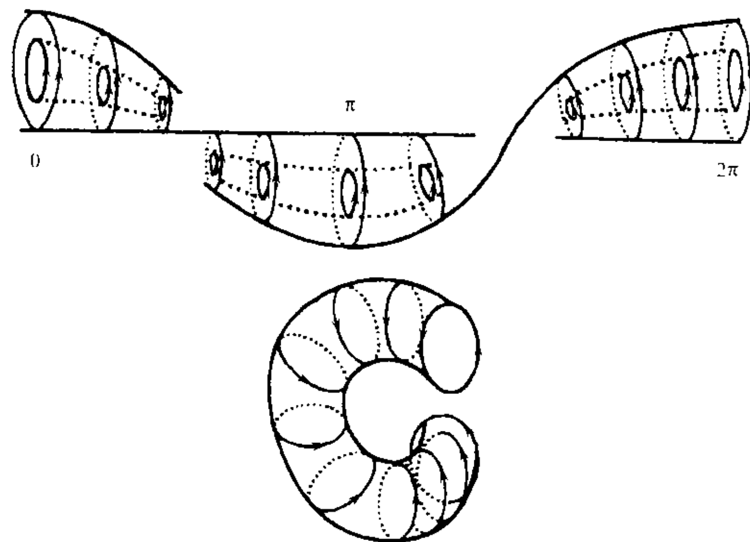


图 10.1.10　$g_1<-2$ 的水平集

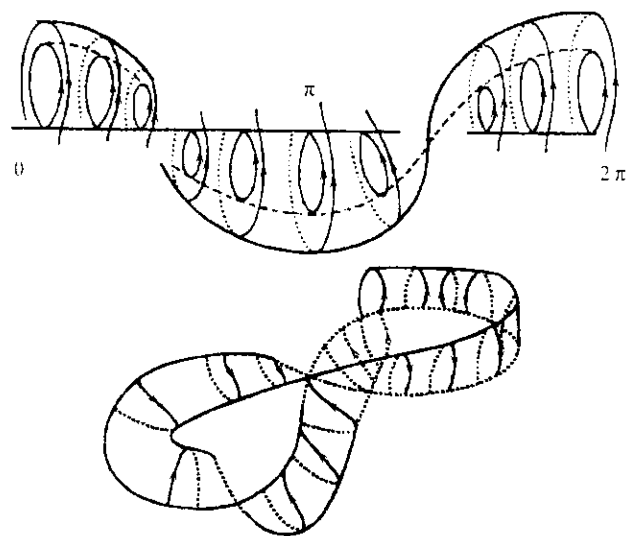


图 10.1.11　$g_1>-2$ 的水平集

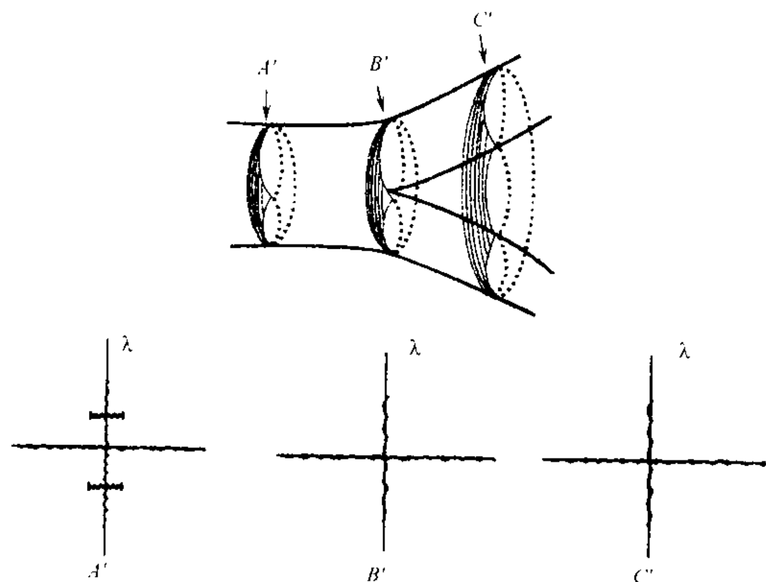


图 10.1.12 新奇的"裤子"和它的谱表示

为了利用 Morse 理论对于这些水平集，引入集合

$G_0 = g_0, g_0 \in (-2,2)$ 固定

$G_{-1} = 0$

$G_1 = g_1, g_1 \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon), g_1$ 自由

Floquet 的技巧用于 G_1 作为 Bott 函数而没有意义，因为：

这个集合不是一个流形；

G_{-1}在这个集合中具有临界函数；

G_1, G_{-1}必须同时考虑。

无论如何，我们能预期同伦转换，定义

$$M_c \equiv \{ \boldsymbol{q} \in \tilde{U}_1, \mid G_1 \leqslant c \}$$

则

$$M_{-2-\varepsilon} = (S^1 \times D^2) \times S^1;$$

$$M_{-2} = \hat{B}^3 \times S^1;$$

$$M_{-2+\varepsilon} = B^3 \times S^1$$

其中 ε 为充分小，($S^1 \times D^2 0$ 为实环，$\hat{B}^3$)为曲面上具有两个点的 3 球。B^3 为 3 球。同伦变换公式为

$$B^3 \times S^1 \approx \hat{B}^3 \times S^1 = (S^1 \times D^2) \times S^1 \cup e^2$$

这里 U 表示胞腔相粘，e^2 表示 2 胞腔，如图 10.1.13 所示。

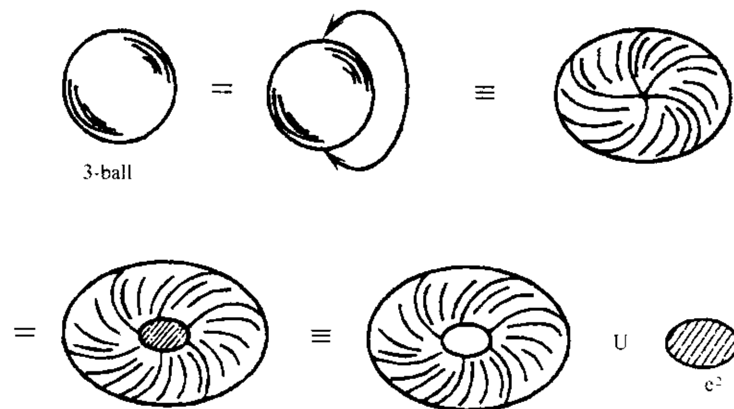


图 10.1.13 不具偶函数约束的同伦变换

10.1.4 Melnikov 向量

已知由 Bäcklund – Darbonx 变换可得

$$Q_H(x,t) = q(x,t) + 2(\nu - \bar{\nu}) \frac{\phi_1 \bar{\phi}_2}{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2}$$

其中 $\boldsymbol{q}$ 位于临界低维环上，$\boldsymbol{\phi}$ 为算子 L 在($\boldsymbol{q}_1, \nu$)上的特征函数，取 Floquet 基为$\{\boldsymbol{\psi}^{(+)}, \boldsymbol{\psi}^{(-)}\}$，有

$$\boldsymbol{\phi} = c_+ \boldsymbol{\psi}^{(+)} + c_- \boldsymbol{\psi}^{(-)}$$

现考虑 NLS 方程由扰动向量场 $\varepsilon f(\boldsymbol{q})$形成的扰动。Melnikov 函数能用常数$\{F_j\}$定义，$\lambda_j^c = \nu$

$$M_j = \int_{-\infty}^{\infty} [\langle \mathrm{grad} F_j, f \rangle \mid_{q=Q}] \mathrm{d}t$$

这里积分沿着未扰动同宿轨 $q = Q_H$ 取值。利用

$$\frac{\delta F_j}{\delta q} = -i \frac{\sqrt{\Delta^2 - 4}}{W[\Psi^{(+)}, \Psi^{(-)}]}\begin{pmatrix} \Psi_2^{(+)}\Psi_2^{(-)} \\ \Psi_1^{(+)}\Psi_1^{(-)} \end{pmatrix} \quad (10.1.29)$$

其中 $\Psi^{(\pm)}$是在(Q_H, ν)上的 Floquet 基。Floquet 基能从

$$\Psi(x,t;\lambda) = G(\lambda;\nu;\phi\psi)(x,t,\lambda) \quad (10.1.30)$$

得到,其中

$$G = G(\lambda;\nu;\phi) = N\begin{pmatrix} \lambda - \nu & 0 \\ 0 & \lambda - \bar{\nu} \end{pmatrix}N^{-1} \quad (10.1.31)$$

$$N = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\bar{\phi}_2 \\ \phi_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix}$$

且

$$\lim_{\lambda\to\nu} G(\lambda,\nu) = \frac{\nu - \bar{\nu}}{|\phi|^2}\begin{pmatrix} \phi_2\bar{\phi}_2 & -\phi_1\bar{\phi}_2 \\ \phi_2\bar{\phi}_1 & \phi_1\bar{\phi}_1 \end{pmatrix} \quad (10.1.32)$$

由前式可得

$$\lim_{\lambda\to\nu}\Psi^{(\pm)} = \lim_{\lambda\to\nu} G\psi^{(\pm)} =$$

$$\pm c_{\mp} W[\psi^{(+)}, \psi^{(-)}]\frac{\nu - \bar{\nu}}{|\phi|^2}\begin{pmatrix} \bar{\phi}_2 \\ -\bar{\phi}_1 \end{pmatrix} \quad (10.1.33)$$

在$(Q_H, \lambda = \nu)$上,$\Psi^{(+)}$和 $\Psi^{(-)}$是相关的,有

$$\Psi^{(+)} = -\frac{c_-}{c_+}\Psi^{(-)} \quad (10.1.34)$$

计算可得

$$\frac{\delta F_j}{\delta q} = c_\nu \frac{c_+ c_- W[\psi^{(+)}, \psi^{(-)}]}{|\phi|^4}\begin{pmatrix} \phi_1^2 \\ \phi_2^2 \end{pmatrix} \quad (10.1.35)$$

其中

$$c_\nu = i(\nu - \bar{\nu})\sqrt{\Delta(\nu)\Delta''(\nu)}$$

由此可得

定理 Melnikov 函数相连于复重点 ν,有

$$M_j = c_\nu c_+ c_- \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 W[\psi^{(+)}, \psi^{(-)}] \cdot \left[\frac{(\phi_1^2)f_1(Q) + (\phi_2^2)f_2(Q)}{|\phi|^4}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

10.2 Hill 方 程

设 $Q(x)$为实变量 x 的实值或复值函数,$Q(x)$为片段连续,它为周期的,具周期 π,即

$$Q(x + \pi) = Q(x) \quad (10.2.1)$$

则微分方程

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (10.2.2)$$

具有两个连续可微解 $y_1(x), y_2(x)$。它们由条件

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1 \quad (10.2.3)$$

惟一决定。

定义式(10.1.2)的特征方程

$$\rho^2 - [y_1(\pi) + y_2'(\pi)]\rho + 1 = 0 \quad (10.2.4)$$

特征指数 α 满足

$$\exp i\alpha\pi = \rho_1, \quad \exp(-i\alpha\pi) = \rho_2 \quad (10.2.5)$$

其中 ρ_1, ρ_2 为特征方程(10.2.4)的两个根,且 $2\cos\alpha\pi = y_1'(\pi) + y_2'(\pi)$,$\rho_1\rho_2 = 1$。

定理 10.2.1 (Floquet 定理)

(1)如特征方程(10.2.4)的两个根 ρ_1, ρ_2 是不同的,则 Hill 方程(10.2.2)具有两个线性无关解

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}p_1(x), \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-i\alpha x}p_2(x)$$

其中 $p_1(x)$和 $p_2(x)$为周期函数,周期为 π。

(2) 如 $\rho_1=\rho_2$，则方程(10.2.2)具有一个周期为 $\pi(\rho_1=\rho_2=1)$ 或 $2\pi(\rho_1=\rho_2=-1)$ 的非平凡周期解，$p(x)$ 表示这样的一个周期解，令 $y(x)$ 表示，一个线性无关于 $p(x)$ 的另一个解，则

$$y(x+\pi)=\rho_1 y(x)+\theta p(x),\quad \theta \text{ 为常数}$$

且 $\theta=0$，等价于

$$y_1(\pi)\neq y_2'(\pi)=\pm 2,\quad y_2(\pi)=0,y_2'(\pi)=0$$

证明：如 $y(x)$ 为式(10.2.2)的一个解。显然有 $y(x+\pi)$ 也是式(10.2.2)的一个解。特别 $y_1(x+\pi)$，$y_2(x+\pi)$ 为式(10.2.2)的解。因 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 形成式(10.2.2)所有解集的一个基，因此 $y_1(x+\pi)$，$y_2(x+\pi)$ 能由 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性组合表示。易得

$$\begin{cases} y_1(x+\pi)=y_1(\pi)y_1(x)+y_2'(\pi)y_2(x) \\ y_2(x+\pi)=y_2(\pi)y_1(x)+y_2'(\pi)y_2(x) \end{cases} \tag{10.2.6}$$

设 $y(x)\neq 0$ 式为(10.2.2)的解，使得

$$y(x+\pi)=\rho y(x) \tag{10.2.7}$$

对某常数 ρ。如 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$，则由式(10.2.7)可得 c_1，c_2，必须满足如下线性方程组

$$\begin{cases} (y_1(\pi)-\rho)c_1+y_2(\pi)c_2=0 \\ y_1'(\pi)c_1+(y_2'(\pi)-\rho)c_2=0 \end{cases} \tag{10.2.8}$$

反之，如式(10.2.8)满足，则 $y(x)$ 满足式(10.2.7)。现式(10.2.8)具有解 c_1，c_2 的充要条件(为使 c_1，c_2 不能同时消失)为

$$\begin{vmatrix} y_1(\pi)-\rho & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi)-\rho \end{vmatrix}=0 \tag{10.2.9}$$

因对一切 x，Wronski 行列式

$$y_2(x)y_2'(x)-y_1(x)y_1'(x)=1$$

方程(10.2.9)等同于特征方程(10.2.4)。因此，如 $\rho=\rho_1$ 为式(10.2.9)的一个根，则能找到 c_1，c_2，使 $y=c_1y_1+c_2y_2\neq 0$，使得 y 满足(10.2.7)。显然，式(10.2.7)如满足，记

$$y=y(x)=\exp(i\alpha x)p_1(x)=f_1(x)$$

其中 $\exp(i\alpha\pi)=\rho_1$，$p_1(x)$ 为具周期 π 的周期函数。设式(10.2.9)具有第二个解 $\rho=\rho_2\neq\rho_1$，则能用 ρ_2 构造式(10.2.3)的一个解 $y=f_2(x)\neq 0$，使得 $f_2(x+\pi)=\rho_2 f_2(x)$。考察 f_1，f_2 为线性无关。否则，可找到常数 λ_1，λ_2(不全为 0)，使得

$$\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)=0$$

即也有

$$\lambda_1 f_1(x+\pi)+\lambda_2 f_2(x+\pi)=\lambda_1\rho_1 f_1(x)+\lambda_2\rho_2 f_2(x)\equiv 0$$

因 $\lambda_1 f_1$，$\lambda_2 f_2$ 不恒等为零，第二个方程是相容的，仅当 $\rho_1=\rho_2$。这就证明了 Floquet 定理，当 $\rho_1\neq\rho_2$ 时。

因 $\rho_1\rho_2=1$，或者 $|\rho_1|=|\rho_2|=1$，或者至少 $|\rho_1|$，$|\rho_2|$ 之一超过 1。第一情况，具有稳定性，第二种情况式(10.2.2)的解不稳定，如 $\rho_1\neq\rho_2$。如 $\rho_1=\rho_2$，我们仍构造式(10.2.2)的一个解 $y_1^*(x)$，使得

$$y_1^*(x+\pi)=\mu_1 y_1^*(x)$$

因 $\rho_1=\rho_2$，$\rho_1\rho_2=1$ 推出 $\rho_1=\pm 1$，y_1^* 是周期的，周期为 π 或者 2π。为了寻找解 $y_2^*(x)$ 的性质(它和 y_1^* 线性无关)，设 $y_2(\pi)\neq 0$，则能(见式(10.2.8)和式(10.2.4))选取

$$y_1^*(x)=y_2(\pi)y_1(x)+[\rho_1-y_1(\pi)]y_2(x)$$

$$y_2^*(x)=y_2(x)$$

由 $2\rho_1=y_1(\pi)+y_2'(\pi)$ 得

$$y_2^*(x+\pi)=\rho_1 y_2^*(x)+y_1^*(x)$$

类似地，如 $y_2(x)=0$，则能选取

$$y_1^*(x)=y_2(x),y_2^*(x)=y_1(x)$$

因 $y_1(\pi)y_2'(\pi)-y_1'(\pi)y_2(\pi)=1$，从 $y_2(\pi)=0$，$y_1(\pi)+y_2'(\pi)=2\rho_1$ 得

$$y_1(\pi) = y_2'(\pi) = \rho_1$$

因此从式(10.2.6)得

$$y_1^*(x+\pi) = \rho_1 y_1^*(x)$$

$$y_2^*(x+\pi) = \rho_1 y_2^*(x) + y_1'(\pi) y_1^*(x)$$

这就证明了 Floquet 定理。

因此，设 $\rho_1 \neq \rho_2$，如 α 为实的，则存在式(10.2.2)的解的绝对值$|y(x)|$的上界 M，M 仅依赖于 y 的初值，与 x 无关。如 α 不是实的，则存在式(10.2.2)的非平凡无界解。如 $\rho_1 = \rho_2$，则对式(10.2.2)的所有解有界的充要条件是

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2, y_2(\pi) = 0, y_1'(\pi) = 0$$

当式(10.2.2)的一切解为有界的，则它们是稳定的，否则，称之为不稳定。

Floquet 定理的推论 如式(10.2.2)具有一个 $n\pi(n>2)$周期的非平凡周期解，且具周期 π 或 2π 的解不存在，则式(10.2.2)的一切解是周期的，具有周期 $n\pi$。

事实上，由我们的假设推出 $\rho_1 \neq \rho_2$ 对于式(10.2.2)的任何解具有形式

$$y = \mu f_1(x) + \nu f_2(x)$$

如果具有周期 $n\pi$ 的周期解，则 $y(x+n\pi) = \mu c f_1 + \nu \bar{c} f_2 = y(x)$，其中 $c = \exp(i\alpha n\pi)$，$\bar{c} = \exp(-i\alpha n\pi)$。因 f_1, f_2 是线性无关的，$c = \bar{c} = 1$。因此，$n\alpha$ 是偶整数，f_1, f_2 都是具有周期为 $n\pi$ 的周期函数。

稳定集：式(10.2.2)的解是稳定的，当且仅当 $y_1(\pi) + y_2'(\pi)$是实的，且

$$|y_1(\pi) + y_2'(\pi)| < \alpha$$

或

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2$$

且

$$y_2(\pi) = y_1'(\pi) = 0$$

证明：如 $\rho_1 \neq \rho_2$，则稳定性等价于 $\alpha \neq 0$。α 为实的，等价于 $y_1(\pi) + y_2'(\pi)$是实的，且它的绝对值 $< \alpha$。如 $\rho_1 = \rho_2$，则稳定性等价于 $y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2$，$y_2(\pi) = y_1'(\pi) = 0$。现考虑对称情况 $Q(x) = Q(-x)$。如式(10.2.2)，$Q(x)$为偶的，即

$$Q(x) = Q(-x) \tag{10.2.10}$$

它可能去建立 y_1, y_2, y_1', y_2' 在 $x = \pi/2$ 处的值和在 $x = \pi$ 的值关系，具有更详细的周期 π 和周期 2π 解的分类。有定理：

定理 10.2.2 如 $y_1(x), y_2(x)$为式(10.2.2)的规范解，设 $Q(x)$满足式(10.2.10)，则以下关系成立：

$$y_1(\pi) = 2y_1(\pi/2)y_2'(\pi/2) - 1 =$$

$$1 + 2y_1'(\pi/2)y_2(\pi/2) \tag{10.2.11}$$

$$y_2(\pi) = 2y_2(\pi/2)y_2'(\pi/2) \tag{10.2.12}$$

$$y_1'(\pi) = 2y_1(\pi/2)y_1'(\pi/2) \tag{10.2.13}$$

$$y_2'(\pi) = y_1(\pi) \tag{10.2.14}$$

对于一切情况，$y_1(x) = y_1(-x)$，即 $y_1(x)$为 x 的偶函数。类似地，$y_2(x) = -y_2(-x)$为 x 的奇函数。无论如何，每当一个具周期 π 或 2π 的非平凡解存在，则也存在一个偶函数解或奇函数解。因此这些周期解为规范解 $y_1(x)$或 $y_2(x)$的乘子，除非所有解均为周期解(周期 π 或 2π)。

证明：$Q(x)$是偶的，如 $y(x)$为式(10.2.2)的一个解，则 $y(-x)$也是一个解，初值条件 $y_1(-x) = y_1(x)$，类似 $y_2(x) = -y_2(-x)$。推出 $y_1(x)$是偶的，$y_2(x)$是奇的，因此从式(10.2.6)两边对 x 微分，且置 $x = -\pi/2$，可得

$$y_1'(\pi/2) = -y_1(\pi)y_1'(\pi/2) + y_1'(\pi)y_2'(\pi/2) \tag{10.2.15}$$

$$y_2'(\pi/2) = -y_2(\pi)y_1'(\pi/2) + y_2'(\pi)y_2'(\pi/2) \tag{10.2.16}$$

我们可将式(10.2.11)～式(10.2.16)式视为 $y_1(\pi), y_2(\pi), y_1'(\pi), y_2'(\pi)$的线性方程组，解这些量的方程，可得定理 10.2.2。其中

$$y_1(\pi/2)y_2'(\pi/2) - y_1'(\pi/2)y_2(\pi/2) = 1$$

如 $y(x)$ 为周期 π 或 2π，函数

$$u(x) = y(x) + y(-x), v(x) = y(x) - y(-x)$$

具有相同性质。因 u 是偶的，v 为奇的。因 u,v 是不平凡的，除非 $y\equiv 0$，定理最后断言成立。

定理 10.2.3 如定理10.2.2条件满足，则存在式(10.2.2)的一个非平凡周期解，它是

(1)偶的，周期 π，当且仅当 $y_1'(\pi/2)=0$

(2)奇的，周期 π，当且仅当 $y_2'(\pi/2)=0$

(3)偶的，周期 2π，当且仅当 $y_1'(\pi/2)=0$

(4)奇的，周期 2π，当且仅当 $y_2'(\pi/2)=0$

周期 π 或 2π 的周期解为规范解 $y_1(x),y_2(x)$ 的乘子。

证明：我们将用到这样的事实，式(10.2.2)的偶解是 $y_1(x)$ 的乘子，而奇的解必须是 $y_2(x)$ 的乘子。

为证明(1)，设 $y_1(x)$ 是非平凡的，偶的，式(10.2.2)的周期解具有周期 π，则 $y_1(x)$ 也是周期的，具有周期 π，对于 $y_1'(x)$ 也是对的。因此 $y_1'(\pi/2)=y_1'(-\pi/2)$，因 $y_1'(x)$ 为奇函数，推出 $y_1'(\pi/2)=-y_1'(-\pi/2)$，推之，$y_1'(\pi/2)=0$。反之，如 $y_1'(\pi/2)=0$，则 $y_1'(-\pi/2)=0$，$y_1(-\pi/2)=y_1(\pi/2)$。因此 $y_1(x)$ 满足相应条件在 $x=-\pi/2$，$x=\pi/2$，从这个和 $Q(x)$ 的周期性推出 $y_1(x)$ 是周期的，具有周期 π。

(2)的证明完全类似于(1)的证明。

在证明(3)中，我们将证明 $y_1(x),y_1'(x)$ 在 $x=-\pi/2$ 的值和 $y_1(x),y_1'(x)$ 在 $\pi/2$ 处的值不同号，这就表明 $y_1(x+\pi)=-y_1(x)$，因此

$$y_1(x+2\pi) = y_1(x)$$

(4)的证明类似于(3)的证明。

现考虑特征方程的值，判别式及稳定性问题。

Hill 方程具有标准形式

$$y'' + [\lambda + Q(x)]y = 0 \qquad (10.2.17)$$

其中 x 为参数，$Q(x)$ 为实的具周期的周期函数。

设 y_1,y_2 为式(10.2.17)的两个线性无关的解，且有简单的初始条件。为强调对 λ 的依赖关系，代替 y_1,y_2 为 $y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda)$。我们的主要问题之一是决定那种特征值，使式(10.2.17)的解是稳定的，其次的是决定那些 λ 值，使式(10.2.17)的解具有周期 π 或 2π 的解。Liapounaff(1907)和 Hanipt(1914)考虑了上述问题。

定理 10.2.4(振荡定理) 对于方程(10.2.17)存在两个单调增加的实数无穷序列

$$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots \qquad (10.2.18)$$

$$\lambda_1',\lambda_2',\lambda_3',\lambda_4',\cdots \qquad (10.2.19)$$

使得式(10.2.17)具有 π 周期解当且仅当 $\lambda=\lambda_n$，$n=0,1,2,\cdots$，具有 2π 周期解当且仅当 $\lambda=\lambda_n'$，$n=1,2,3,\cdots$。λ_n 与 λ_n' 满足不等式

$$\lambda_0 < \lambda_1' \leqslant \lambda_2' < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \lambda_3' \leqslant \lambda_4' < \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \cdots$$

且有关系

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^{-1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(\lambda_n')^{-1} = 0 \qquad (10.2.20)$$

式(10.2.17)的解是稳定的，在开区间内

$$(\lambda_0,\lambda_1'),(\lambda_2',\lambda_1),(\lambda_2,\lambda_3'),(\lambda_4',\lambda_3),\cdots \qquad (10.2.21)$$

在区间的端点上，式(10.2.17)的解一般是不稳定的，这对 $\lambda=\lambda_0$ 是正确的。式(10.2.17)的解对于 $\lambda=\lambda_{2n+1}$ 或 $\lambda=\lambda_{2n+2}$ 是稳定的，当且仅当 $\lambda_{2n+1}=\lambda_{2n+2}$；对于 $\lambda=\lambda_{2n+1}'$ 或 $\lambda=\lambda_{2n+2}'$ 是稳定的，当且仅当 $\lambda_{2n+1}'=\lambda_{2n+2}'$。

对于式(10.2.17)的复值永远存在不稳定解。

λ_n 是方程 $\Delta(\lambda)=2$ 的根，而 λ_n 为 $\Delta(\lambda)=-2$ 的根，其中

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi,\lambda) + y_2'(\pi,\lambda)$$

为了证明定理，先引入以下定义：

称实数 λ_n 为式(10.2.17)的第一类型特征值，而 λ_n' 为第二类

型特征值。区间式(10.2.21)在实轴上称之稳定性区间。这些区间的端点属于它且仅当式(10.2.17)具有相应 λ 值的稳定解。类似地,我们有不稳定区间,不稳定区间 $(-\infty,\lambda_0)$ 将永远地出现。我们定义它为第 0 个不稳定区间,称 (λ_1',λ_2') 为第 1 个不稳定区间,按照定理 10.2.3,既没有稳定性区间或不稳定区间能缩成一点,稳定性区间将不出现,但它们的两个解并成一个,如 $\lambda_{2n+1}=\lambda_{2n+2}$,或 $\lambda_{2n+1}'=\lambda_{2n+2}'$。

证明: 我们考虑 λ 为复值时式(10.2.17)的稳定解。设 $\lambda=\mu+i\nu$,μ,ν 为实数。$\nu\neq0$,$y=\mu+i\nu$ 为式(10.2.17)的解,具有形式

$$y(x)=e^{i\alpha x}p(x)=u+iv \tag{10.2.22}$$

其中 α 为实的,$p(x)$ 为具周期 π 的函数。按照 Floquet 定理,如果式(10.2.17)的解是稳定的,则解 $y(*)$ 存在。分开式(10.2.17)为实部和虚部得

$$\begin{cases}u''+[\mu+Q(x)]u=\nu v\\ v''+[\mu+Q(x)]v=-\nu u\end{cases} \tag{10.2.23}$$

如乘式(10.2.23)的第一个以 v,第二个以 u,相减得

$$u''v-v''u=\nu(u^2+v^2)$$

积分得

$$u'v-v'u=\nu\int_0^x[u^2(t)+v^2(t)]dt+c \tag{10.2.24}$$

其中 c 是一个常数。现从式(10.2.22)可知,一切函数 $|u|,|v|,|u'|,|v'|$ 必须对一切 x 值有界(因 $p(x)$ 是一个可微周期函数),因此存在 $|uv'-vu'|$ 的上界与 x 无关。按照式(10.2.24),对于

$$I(x)=\int_0^x[u^2(t)+v^2(t)]dt$$

的绝对值亦然。但 $|I(x)|\to\infty,x\to\infty$。因 $u^3+v^2=|p|^2$,对 $n=1,2,3,\cdots$,有

$$I(nx)=\int_0^{n\pi}[u^2(t)+v^2(t)]dt=n\int_0^{\pi}|p(t)|^2dt$$

因此,如 λ 不是实的,则不能具有形式如式(10.2.22)的解。

我们能证明以下事实:

(1) 存在实数 λ^*,使得 $\lambda\leqslant\lambda^*$,方程(10.2.2)的解是不稳定的。

(2) 如 $\lambda\leqslant\lambda^*$,则对 $x>0,\Delta=y_1(x,\lambda)+y_2'(x,\lambda)>2$。

(3) $\Delta(\lambda)-2=0,\Delta(\lambda)+2=0$ 的所有根是实的,且 $>\lambda^*$。

(4) 方程(10.2.2)具有 π 周期解,当且仅当 $\Delta(\lambda)=2$;方程(10.2.2)具有 2π 周期解,当且仅当 $\Delta(\lambda)=-2$。

(5) $\Delta^2(\lambda)-4=0$ 的根或者是单根或者是重根,如对于特殊值 $\lambda=\mu$

$$\Delta^2(\mu)=0,\Delta'(\mu)=0$$

则 $\Delta''(\mu)<0,\Delta(\mu)=2;\Delta''(\mu)>0,\Delta=-2$。

(6) 设 λ_0 为 $\Delta^2(\lambda)-4=0$ 的最小根,则 λ_0 为有单根,$\Delta'(\lambda_0)<0$;

(7) Hill 方程(10.2.2)只有两个线性无关周期解(π 或 2π),当且仅当 $\Delta^2(\lambda)-4=0$ 具有一个重根。

10.3 可积 PDE 的拓扑分类

Fomenko 研究了具有两个积分(H 和 F)的两个自由度的 Hamilton 系统。他注意到一个紧水平集 $Q:H=h$,其中 h 为"正则值",使得 Q 是一个光滑非奇异三维流形,在其上 H 没有临界点,存在一个条件 Q 为"非共振的",而(H,F)Lianvill 环在 Q 上 H 轨线有一个无限稠的"Winding",在 Q 中形成一个稠集,F 在 Q 上具有临界点。事实上,这些临界点不是孤立的,形成具有一维或大于一维的流形,还有一个条件,F 必须是"Bottean",即它的临界点集是一个在法向具有 hessian 非退化的光滑子流形。远离 F 的临界值,相连于(H,F)分量的水平集是 Q 环,两个圆的乘积。在临界值上,每个相连于水平集分量对是一个不相连的流形的并集。存在两个分类(1)临界集,完全包含在水平集中,(2)临界集等于整个水平集。在

分类(1)时,F 在水平集上,不达到它的最大或最小值,临界点集由不相连的圆的并组成,对 F 称为鞍点,水平集的剩下部分由二维流形所组成,它们的每一个同构于一个圆和一条线的乘积。这个乘积可能是平凡的或是扭曲的。称之为"sifert product"。水平集的二维片能为另一个临界鞍点(圆)所捕捉。一般来说仅有一个鞍点,水平集或者是同宿圆或者是 seifert 圆。如图 10.3.1(a)、(b)所示。

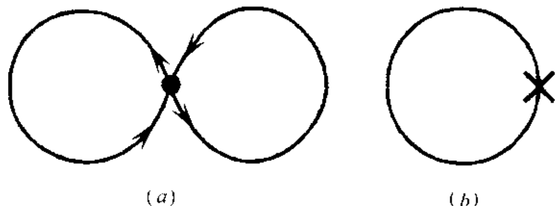


图 10.3.1　同宿圆(a)和 seifert 圆(b)

在分类(2)中,临界点等于整个水平集,在其上 F 达到极大或极小,存在三种情况:临界(水平)集是一个圆;两个环;一个 Klein 瓶。

摘要言之,临界水平由五种类型"building block"组成:

{同宿,sifert}或{S^1,T^2,Klein 瓶}

分类 1　　　　分类 2

第一、第二种类型(分类 1),临界集完全包含在它的临界水平集之中,积分 F 在临界集上,不达到最大或最小,在最后三种(分类 2)中,临界集等于整个水平集,F 在临界集中达到最大或最小。其次,Fomanko 局部地嵌入临界集为 3 - 流形,再粘上局部片,再构造等能量流形 Q,在 NLS 中,仅两种类型(同宿或 S^1)出现。首先说明这两种情况的粘合过程。

现考虑 NLS 方程的 δ 临界水平集

NLS 具周期边界条件

$$2iq_t \equiv q_{xx} + \frac{1}{2}qq^*q \qquad (10.3.1a)$$

$$q(x+l,t) = q(x,t) \qquad (10.3.1b,c)$$

是一个 Hamilton 系统,具有 Hamilton $\mathscr{H}:\mathscr{F}\to R$

$$\mathscr{H} = \int_0^l\left[q_xq_x^* - \frac{1}{2}(qq^*)^2\right]dx \qquad (10.3.2)$$

NLS 的完全可积性是由以下的 Lax 对得到的

$$L\psi = \lambda\psi$$

$$L = i\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix}0 & -q\\q^* & 0\end{pmatrix} \qquad (10.3.3)$$

这里 L 可看成 Hilbert 空间 L = $L^2(R)$上的一个算子。

$$L: D \subset L^2(R) \to L^2(R)$$

$$L^2(R) \subseteq \{\psi: R\to e^2 \mid \infty^{\infty}_{-\infty}\phi^*\cdot\varphi dx < \infty\}$$

D 是 L 的稠定义域。这里 L 仅有连续谱。因 L 是非自共轭的,它的谱不必是实的,这些谱的复曲线,在 NLS 流中是不变的。

谱 $\sigma(L)$能用解析函数 $\Delta(q,q^*;\lambda)$来表示,它又称 Floquet 判别式,它的定义为:寻求基本解矩阵 M,

$$LM = \lambda M$$

$$M(x=y,y;\lambda) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad (10.3.4)$$

Δ 用来表示

$$\Delta(q,q^*;\lambda) \equiv \mathrm{tr}M(y+l,y;q,q^*;\lambda) \qquad (10.3.5)$$

Floquet 判别式 $\Delta(q,q^*;\lambda)$在 NLS 系统下是不变的,谱 σ 定义如下

$$\sigma(L(q,q^*)) = \{\lambda\in C \mid \Delta(q,q^*;\lambda)是实的, -2\leqslant\Delta\leqslant 2\} \qquad (10.3.6)$$

两个其他的谱是重要的临界点和多重点:

$$临界点:\{\lambda\in C \mid \frac{d\Delta}{d\lambda} = 0\} \qquad (10.3.7a)$$

$$多重点:\{\lambda\in C \mid \lambda 是一个临界点, \Delta(\lambda) = \pm 2 \qquad (10.3.7b)$$

谱曲线在周期或反周期特征值{λ_j}上

$$\Delta(q,q^*;\lambda_j) = \pm 2 \qquad (10.3.8)$$

二谱曲线能连接或接触在多重点上,产生一个高空的特征值(见图 10.3.2)。

定理 10.3.1　设 $q(x)$是一个位势,$\sigma(L(q))$具有 $2N$ 个简单特征值,$2M$ 个重点离开实轴。其余的特征为重的和实的,相关的

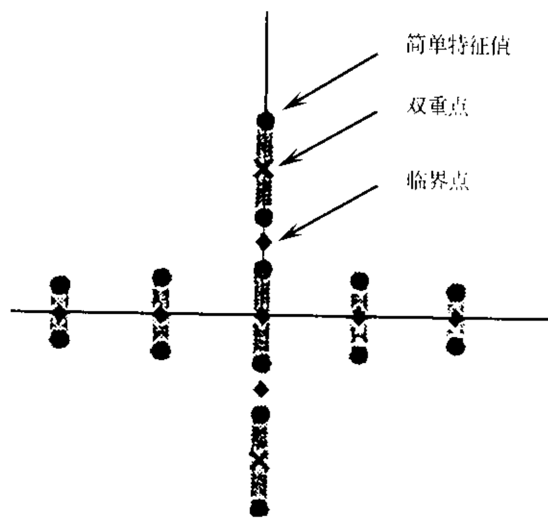


图 10.3.2 二谱曲线

临界点集是一个不相连的微分同胚于

$$T^N \times (S^1 \times R^1)^j \tag{10.3.9}$$

的流形的并集。其中 T^N 是一个实的 N 环，S^1 为圆，$0 \leqslant j \leqslant M$。

位势 Q 在式(10.3.9)中能从拟周期位势 $q \in T^N$ 中 Bäcklund 变换得到

$$Q = q + 4(\nu - \nu^*)\frac{\varphi_1\varphi_2^*}{\varphi_1\varphi_1^* + \varphi_2\varphi_2^*} \tag{10.3.10a}$$

其中 ν 为非实重点，且

$$\boldsymbol{\varphi} = \alpha\boldsymbol{\psi}^{(+)} + \beta\boldsymbol{\psi}^{(-)} \tag{10.3.10b}$$

是线性问题在 $\lambda = \nu$ 时的一般(特征函数)，$\{\boldsymbol{\varphi}^{(+)}, \boldsymbol{\varphi}^{(-)}\}$ 表示式(10.3.3)的特征函数的 Floquet 基。因此，Bäcklund 变换(10.3.10a)提供了周期 NLS 方程的一族周期 NLS 方程解，参数为 α/β，它对于 $\boldsymbol{q}$ 是等谱的。迭代形成了整体奇性层式(10.3.9)。

NLS 方程至多具有六个简单特征值，它的系数 $q(x)$ 在空间上

是偶的。这是一个具有两个自由度的 Hamilton 系统，Fomenko 分类能被应用。

在这个机制中，存在两种谱图像：所有六个特征值位于虚轴上或有两个在虚轴上，四个形成复共轭对，这些谱图形如图 10.3.3 (a)和(b)的左图所示。

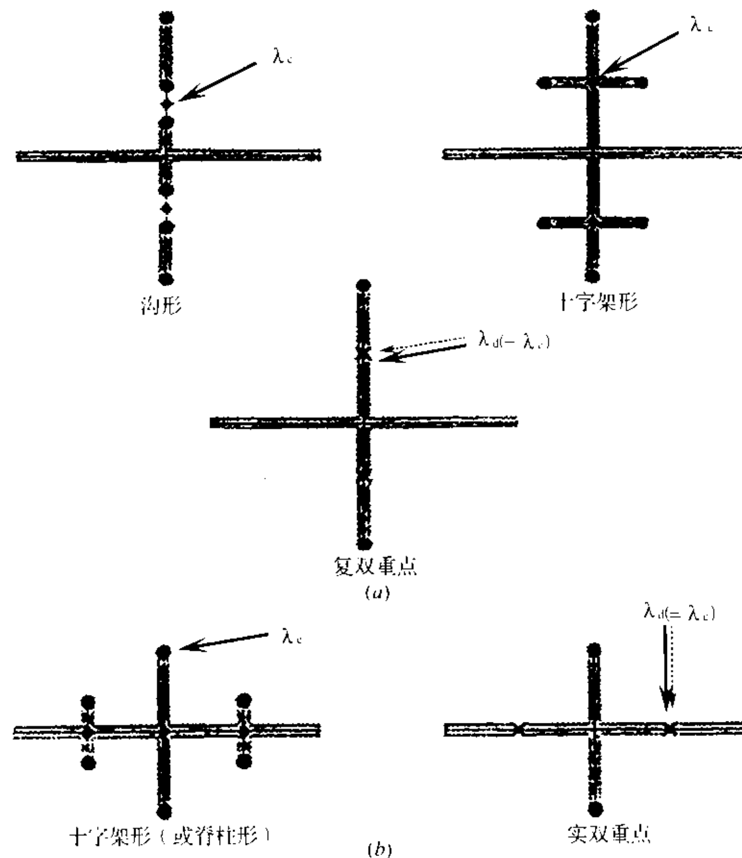


图 10.3.3 谱图形示例

参考文献

1 Ablowitz M J, and Ladik J F. A nonlinear difference scheme and inverse scattering. Stud Appl Math. 55, 1976, p213

2 Ablowitz M J, and Herbst B M. Numerically induced chaos in the NLS equation. Phys Rev Lett. 62, 1989, p2065 ~ 2065

3 Abdullaev F K. Dynamical chaos of solitons and nonlinear periodic waves. Physics Reports. 179 (1), 1989, p1-78

4 Ablowitz M J, and Herbst B M. On homoclinic structure and numerically induced chaos in the NLS equation. SIAM J Appl Math. 50, 1990, p339 ~ 351

5 Ablowitz M J, and Clarkson P A. Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge University Press. 1991

6 Arnold V I. Instabilities of dynamical systems with many degrees of freedom. Soviet Math Dokl. 5, 1964, p581 ~ 585

7 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Physics. Springer-Verlag: New York, 1978

8 Baker G L, and Gollub J P. Chaotic Dynamics: An Introduction. Cambridge Univ Press. Cambridge, 1990

9 Ball J M. Saddle point analysis for an ODE in a Banach space, and an application to dynamic bucking of a beam. Nonlinear Elasticity. 1973, p93 ~ 160

10 Bates P W, Lu K, and Zong C. Existence and persitence of invariantmanifolds for semiflow in Banach space. Men Amer Math Soc. 135, 1998, p645

11 Bates P W, Lu K, and Zong C. Invariant foliations near normally hyperbolic invariant naniflods for semiflows. Trans Amer Math Soc. in press

12 Bates P W, Lu K, and Zong C. Persistence of overflowing maniflods for semiflow. Comm Pure Appl Math. 52, 1990, p883 ~ 1046

13 Berger M S. Nonlinearity and functional Analysis. Academic Press: New York, 1977, p113

14 Birnir B, and Grauer R. An explicit description of the global attractor of the damped and driven sine-Gordon equation. Comm Math Phys. 162, 1994, p539 ~ 590

15 Birinr B, McKean H P, and Weinstein A. The rigidity of sine-Gordon breathers. Comm Pure appl Math. 47(8), 1994, p1043 ~ 1051

16 Bishop A R, Forest M G, Mclaughlin D W, and Overman Ⅱ E A. A quasiperiodic route to chaos in a near-intergable pde. Phys D. 23, 1986, p293 ~ 328

17 Bishop A R, Forest M G, Mclaughlin D W, and Overman Ⅱ E A. A quasiperiodic route to chaos in a near-integrable pde: homoclinic crossings. Phys Lett. A127, 1988, p335 ~ 340

18 Bishop A R, Mclaughlin D W, and Overman Ⅱ E A. Coherence and chaos in the driven, damped sine-Gordon equation: measurement of the soliton spectrum. Phys D. 19, 1986, p1 ~ 41

19 Bishop A R, Flesh R, Forest M G, Mclaughlin D W, and Overman Ⅱ E A. Correlations between chaos in a perturbed sine-Gordon equation and a truncated model system. SIAM J Math Anal. 15, 1990, p1511 ~ 1536

20 Bishop A R, Mclaughlin D W, and Overman E A. A model representation of chaotic for the damped driven pendulum chain. Phys Lett A. 1990, p17 ~ 25

21 Carr J. Applications of Center Manifold Theory. Applied Math Sci. 35, Springer-Verlag: New York, 1981

22 Cazenave T. An Introduction to Nonlinear Schro dinger Equations. 22, IMUFRJ Rio De Janeiro, 1989

23 Chow S, Liu X, and Lu K. Smooth invariant foliations in infinite-dimensional space. J Differential Equations. 94, 1991, p266 ~ 291

24 Chow S, and Lu K. Invariant foliations for flows in Banach space. J Differential Equations. 74, 1988, p285 ~ 317

25 Constantin P. A construction of inertial manifold, the connection between infinite-dimensional and finite-dimensional dynamical systems. Contemp Math. 99, 1989, p27 ~ 62

26 Constantin P, Foias C, Nicolaenko B, and Teman R. Integral maniflods and inertial manifolds for dissipative partial differential equations. Springer-Verlag: New York. 1989

27 Cruz-Pacheco G, Levermore C D, and Luce B P. Complex Ginzburg-Landau equations as perturbations of nonlinear Schro dinger equations: A Melnikov approach. Submitted

28 Cruz-Pacheco G, Levermore C D, and Luce B P. Complex Ginzburg-Landau equations as perturbations of nonlinear Schro dinger equations: Traveling wave persistence. submitted

29 Cruz-Pacheco G, Levermore C D, and Luce B P. Complex Ginzburg-Landau equations as perturbations of nonlinear Schro dinger equations: Quasi-periodic solutions. Preprint

30 Deng B. The Silnikov's Problem, Exponential Expansion, Strong λ - Lenna, C^1 Linearization, and Homoclinic Bifurcation. J Diff Equs. 79, 1989, p189 ~ 231

31 Deng B. On Silnikov's Homoclinic-saddle-focus Theorem. J Diff Equs. 102, 1993, p305 ~ 329

32 Dieudonne J. Foundations of Modern Analysis. Academic Press: New York. 1960

33 Doering C, Gibbon J D, Holm D D, and Nicolaenko, B. Inertial manifolds for the Ginzburg-Landau equation. Nonlinearity. 1, 1989, p279 ~ 309

34 Ercolani N M, Forest M G, and McLaughlin D W. Geometry of the modulational instability Ⅲ. Homoclinic orbits for the periodic sine-Gordon equation. Phys D. 43, 1990, p349 ~ 384

35 Ercolani N M, and Forest M G. The geometry of real sine-Gordon wavetrains. Comm Math Phys. 99, 1985, p1 ~ 49

36 Ercolani N M, and McLaughlin D W. Toward a topological classification of integrable PDEs. The geometry of Hamiltonian systems (Berkeley CA, 1989). Math Sci Res Inst Publ. 22 Springer; New York. 1991, p111 ~ 129

37 Farmer J D. Chaotic attractors of an infinite0dimensional dynamical system. Phys D. 4, 1982, p266 ~ 393

38 Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. Indiana Univ Math J. 21, 1971, p183 ~ 226

39 Fenichel N. Asymptotic stability with rate conditions. Indiana Univ Math J. 23, 1974, p1109 ~ 1137

40 Fenichel N. Asymptotic stability with rate conditions. Indiana Univ Math J. 26, 1977, p81 ~ 93

41 Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. J Differential Equations. 31, 1979, p53 ~ 98

42 Flesch R, Forest M G, and Sinha A. Numerical inverse spectral transform for the periodic sine-Gordon equation; theta function solutions and their linearized stability. Phys D. 48, 1991, p169 ~ 231

43 Forest M G, Goedde C, and Sinha A. Chaotic transport and integrable instabilities in a nearly integrable Hamiltonian, discrete sine-Gordon lattice. Phys D. 67, 1993, p347 ~ 386

44 Forest M G, and McLaughlin D W. Modulations of sine-Gordon and sinh-Gordon wavetrains. Stud Appl Math. 68, 1983, p11 ~ 59

45 Forest M G, Sheu S O, and Sinha A. Frequencey and phase locking of spatially periodic perturbed sine-Gordon breather trains. SIAM J Appl Math. 52, 1992, p746 ~ 761

46 Fornberg B, and Whitham G B. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 289, 1978, p372 ~ 404

47 Garnett J, and Trubowitz E. Gaps and bands of one dimensional periodic Schrödinger operators. Comment Math Helvetici. 59, 1984, p258 ~ 312

48 Garnett J, and Trubowitz E. Gaps and bands of one dimensional periodic Schrödinger operators. Comment Math Helvetici. 62, 1987, p18 ~ 37

49 Grauer R, and Birnir B. The center manifold and bifurcations of damped and driven sine-Gordon breathers. Phys D. 56, 1992, p165 ~ 184

50 Gruendler J. The existence of homoclinic orbits and the method of Melnikov for systems in R^n. SIAM J Math Anal. 16, 1985, p907 ~ 931

51 Guckenheimer J, and Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Appl Math Sci. 42, Springer-Verlag; New York, 1983

52 Guo B L, Jing Z J, and Lu B N. Slow timeperiodic solutions of cubic quintic Ginzburg-Landau equation(I). Prog Nat Sci. 8(4), 1998, p403 ~ 415

53 Guo B L, Jing Z J, and Lu B N. Spatiotemporal complexity of the cubic Ginzburg-Landau equation. Comm in Nonlinear Sci and Num Simul. 2(2), 1996, p7 ~ 14

54 Guo B L, and Chen H L. Homoclinic orbits for a perturbed quintic-cubic NLS equation. Comm in Nonlinear Sci and Numer Simulation. 6(4), 2001, p227 ~ 230

55 Guo B L, and Chen H L. Homoclinic orbits in a six-dimensional model of a perturbed higher-order NLS equation. Submitted

56 郭柏灵. 非线性演化方程. 上海:上海科技出版社. 1995

57 郭柏灵. 无穷维动力系统(上、下). 北京:国防工业出版社. 2000

58 郭柏灵. 非线性波和孤立子. 力学与实践. 4(2), 1982, p8 ~ 16

59 郭柏灵. 广义 Kdv 方程的守恒律和行波解结构. 北京:科学探索. 3(2), 1983, p31 ~ 40

60 郭柏灵, 庞小峰. 孤立子. 北京:科学出版社. 1987

61 郭柏灵. 具磁场效应的非线性 Schrödinger 方程组的初边值问题. 应用数学学报. 10(2), 1987, p189 ~ 202

62 Guo B L, and Wu Y H. Global existence and nonexistence of solution of a forced nonlinear Schrödinger equation. J Math Phys. 36(7), 1995, p35 ~ 55

63 Guo B L, and Chen H L. The invariant manifold for a perturbed quintic-cubic NLS equation. Submitted

64 Guo B L, Xu P C, and Chang Q S. Homoclinic orbits in NLS equation with derivative term. Preprint

65 Guo B L, and Wu Y P. Orbital stability of solitary waves of nonlinear derivative Schrödinger equations. J Diff Equs. 123(1), 1995, p35 ~ 55

66 Hale J. Ordinary Differential equations. Robert E Krieger Publishing Co; Now York, 1980

67 Haller G. Multi-dimensional homoclinic jumping and the discretized NLS equation. Comm Math Phys. 193(1), 1998, p1 ~ 46

68 Haller G. Homoclinic jumping in the perturbed NLS equation. Comm Pure Appl Math. 52(1), 1999, p1 ~ 47

69 Haller G, and Wiggins S. Orbits homoclinic to resonance; The Hamiltonian case. Phys D. 66, 1993, p298 ~ 346

70 Hirsch M W, Pugh C C, and Shub M. Invariant Manifolds. Lecture Notes in Math. 583, Springer-Verlag; New York. 1977

71 Hohenberg P C, and Shraiman B I. Chaotic behavior of an extended system. Phys D. 37, 1989, p109 ~ 115

72 Holmes P. Space and time periodic perturbations of the sine-Gordon equation. p164 ~ 191 in: Dynamical Systems and Turbulence. Warwick. 1980, Lecture Notes in Math. 898. Springer Berlin-New York, 1981

73 Holmes P, and Marsden J. A partial differential equation with infinitely many periodic orbits: chaotic oscillations of a forced beam. Arch Rational Mech anal. 76, 1981, p135 ~ 165

74 Holmes P, and Marsden J. Horseshoes in perturbations of Hamiltonian systems with two degrees of freedom. Comm Math Phys. 82, 1982, p523 ~ 544

75 Holmes P. Chaotic motions in a weakly nonlinear model for surface waves. J Fluid Mech. 162, 1986, p365 ~ 388

76 Holmes P, and Marsden J. Melnikov's method and Arnol'd diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems. J Math Phys. 23, 1982, p669 ~ 675

77 Jepson A D, and Keller H B. Steady-State and Periodic Solution Paths: Their Bifurcation and Computation. In T Kupper, H D Mittelmann, and H Webers, editors, Numerical Method for Bifurcation Problem. INSM 70, Birkauser Verlag. 1984

78 Jones C. Geometric singular perturbation theory. p44 ~ 117 in : Dynamical Systems (Montecatini Terme. 1994). Springer Berlin. 1995

79 Jones C, and Koppell N. Tracking invariant manifolds with differential forms in singularly perturbed systems. J Diff Equs. 108, 1994, p64 ~ 88

80 Kanp D J, and Newell A C. Solitons as particles, oscillators and in slowly changing media: a singular perturbation theory. Proc R Soc London. 361, 1978, p413 ~ 446

81 Kaper C J T, and Kopell N. Tracking invariant manifolds up to exponentially small errors. SIAM J Math Anal. 27, 1996, p558 ~ 577

82 Kaper T J, and Kovacic G. Multi-bump orbits homoclinic to resonance bands. Los Alamos National Laboratory Technical Report # LAUR. 1993, p2893 ~ 2918

83 Kapitula T, and Rubin J. Existence and stability of standing hole solutions to Complex Ginzburg-Landau equation. Nonlinearity. 13, 2000, p77 ~ 112

84 Kaplan J, and Yorke J. Functional Differential Equations and approximation of fixed Points. Springer-Verlag: New York, 1979

85 Kelley A. The Stable, Center, Center-Unstable, Unstable Manifolds. J Diff Equs. 3, 1967, p547 ~ 570

86 Kevrekidis I J, Nicolaenko B, and Scovel J C. Back in the Saddle Again. SIAM J Appl Math. 50(3), 1990, p760 ~ 790

87 Kodama Y, and Hasegawa A. IEEE J Quantum Electron. QE23, 1987, 510

88 Kopell N. Dynamical systems and the geometry of singularly perturbed differential equations. From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest (1993), Springer-Verlag: New York. p545 ~ 556

89 Kovacic G. Singular perturbation theory for homoclinic orbits in a class of near integrable Hamiltonian system. J Dynam Diff Equs. 5, 1993, p559 ~ 597

90 Kovacic G. Singular perturbation theory for homoclinic orbits in a class of near integrable dissipative system. SIAM J Math Anal. 26, 1995, p1611 ~ 1643

91 Kovacic G, and Wiggins S. Orbits homoclinic to resonances, with an application to chaos in a model of the forced and damped sine-Gordon equation. Phys D. 57, 1992, p185 ~ 225

92 Kovacic G. Dissipative dynamics of orbits homoclinic to a resonance band. Phys Lett A. 167, 1992, p143 ~ 150

93 Krichever I M. Perturbation theory in periodic problems for two-dimensional integrable systems. Sov Sci Rev C Math. 9, 1991

94 Lax P D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm Pure Appl Math. 21, 1968, p467

95 Li Y. Backlund Transformations and Homoclinic Structures for the Integrable Discretization of the NLS Equation. Phys Letters A. 163, 1992, p181 ~ 187

96 Li Y, Mclaughlin D W, Shatah J, and Wiggins S. Persistent homoclinic orbits for a perturbed nonlinear Schrodinger equation. Comm Pure and Appl Math. 49, 1996, p1175 ~ 1255

97 Li Y. Smale horseshoes and symbolic dynamics in perturbed nonlinear Schrodinger equations. J Nonlinear Sci. 9, 1999, 363 ~ 415

98 Li Y, and Mclaughlin D W. Morse and Melnikov functions for NLS PDEs. Comm Math Phys. 162, 1994, p175 ~ 214

99 Li Y, and Mclaughlin D W. Homoclinic orbits and chaos in discretized perturbed NLS system: Part I. Homoclinic orbits. J Nonlinear Sci. 7, 1997, p211 ~ 269

100 Li Y, and Wiggins S. Homoclinic orbits and chaos in discretized perturbed NLS system: Part II. Symbolic Dynamics. J Nonlinear Sci. 7, 1997, p315 ~ 370

101 Li Y, and Wiggins S. Invariant manifolds and their fiberations for perturbed NLS equations. Springer-Verlag: New York, 1997

102 Li Y, and Mclaughlin D W. Homoclinic Orbits and Backlund Transformations for the Doubly Periodic Davey-Stewartson Equation. Nonlinear Processes in Physics Proceedings of the III Potsdam-V Kiev Workshop at Clarkson University. Potsdam NY. 1993, p122 ~ 125

103 Lin X B. Homoclinic bifurcations with weakly expanding center manifolds. Dynamics Reported: Exposition in Dynamical Systems (New Series). 5, 1996, p99 ~ 189

104 Lin X B. Heteroclinic bifurcations and singularly perturbed boundary value problems. J Diff Equs. 84, 1990, p319 ~ 382

105 Lomdahl P S, and Smuelsen M R. Persistent breather excitations in an ac-driven sine-Gordon system with loss. Phys Rev Lett. 34, 1986, p664

106 McKean H P. The sine-Gordon and sinh-Gordon equations on the circle. Comm Pure appl Math. 34(2), 1981, p197 ~ 257

107 McLaughlin D W, and Shatah J. Homoclinic orbits for PDE's, Recent advances in partial differential equations. Venice. 1996, 281 ~ 299. Sympos Appl Math. 54, Amer Math Soc Providence R I. 1998

108 McLaughlin D W, and Shatah J. Melnikov Analysis for Pde's. Lectures in Appl Math. 31,

1996, p51 ~ 100

109 McLaughlin D W. Whiskered tori for NLS equations. p537 ~ 558 in : Important Developments in Soliton Theory. Springer Berlin. 1993

110 McLaughlin D W, and Overman Ⅱ E A. Whiskered tori for integrable PDEs: chaotic behavior in near integrable PDEs. Surveys in Appl Math. 1, Plenum New Yor. 1995, p83 ~ 203

111 McLaughlin D W, Overman Ⅱ E A, Wiggins S, and Xiong C. Homoclinic orbits in a four dimensional model of a perturbed NLS equation. Dynamics Reported: Exposition in Dynamical Systems(New Series). 5, 1996, p190 ~ 287

112 McLaughlin D W, and Schober C M. Chaotic and homoclinic behavior for numerical discretizations of NLS. Phys D. 57, 1992, p447 ~ 465

113 Moser J. Stable and Random Motion in Dynamical Systems. Princeton Univ Press: Princeton N J. 1973

114 Poschel J, and Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. Academic Press Inc: Boston. 1987

115 Robinson C. Horseshoes for autonomous Hamiltonian systems using the Melnikov integral. Ergodic Theory Dynamical Systems. 8*, 1988, p395 ~ 409

116 Sakamoto K. Invariant manifolds in singular perturbation problems for ordinary differential equations. Proc Roy Soc Edinburgh Sect, A116, 1990, p45 ~ 78

117 Sasa N, and Stasuma J. New type of soliton solution for higher-order nonlinear Schrödinger equation. J Phys Soc Japan. 60, 1991, 409 ~ 417

118 Sattinger D H, and Zurkowski V D. Gauge theory of Backlund transformations Ⅱ. Phys D. 26, 1987, p225 ~ 250

119 Shatah J, and Zeng C. Homoclinic orbits for perturbed sine-Gordon equation. Comm Pure and Appl Math. 53, 2000, p283 ~ 299

120 Segur H. An analytical model of periodic waves in shallow water. Studies in Appl Math. 73, 1984, p183 ~ 220

121 Silnikov L P. A case of the existence of a countable number of periodic motions. Sov Math Dokl. 6, 1965, p163 ~ 166

122 Silnikov L P. On a Poincare-Birkhoff Problem. Math USSR Sb. 3, 1967, p353 ~ 371

123 Silnikov L P. A contribution to the Problem of the Structure of an Extended Neighborhood of a Rough Equilibrium State of Saddle-focus Type. Math USSR Sb. 10, 1970, p91 ~ 102

124 Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull Amer Math Soc. 73, 1967, p747 ~ 817

125 Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcations Chaos and Strange Attractors. Springer-Verlag: New York. 1982

126 Strauss W A. Nonlinear invariant wave equations. p197 ~ 249 in: Invariant Wave Equations (Proc "Ettore Majorana" Internat. School of Math. Phys Erice. 1977) G Velo and A S Wightman. eds Springer-Verlag, Berlin. 1978

127 Teman R. Infinite-Dimensional Dynamical systems in Mechanics and Physics. Springer-Verlag: New York. 1988

128 Terrones G, McLaughlin D W, Overman E, and Pearlstein. Stability and bifurcation of Spatially Coherent Solutions of the Damped Driven NLS Equation. SIAM J Appl Math. 50, 1990, p791 ~ 818

129 Tin S K, Kopell N, and Jones C K R T. Invariant manifold and singularly perturbed boundary value problems. SIAM J Numer Anal. 31, 1994, p1558 ~ 1576

130 Turaev D V. On bifurcations of a homoclinic "figure eight" of a multi-dimensional saddle. Russ Math Surv. 43(5), 1988, p264 ~ 265

131 Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos, Analytic Methods. Springer-Verlag: New York. 1988

132 Wiggins S, and Holmes P J. Homoclinic orbits in slowly varying oscilldtors. SIAM J Math Anal. 18, 1987, p612 ~ 629

133 Wiggins, S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer Berlin. 1990

134 Wiggins S. Normally Hyperbolic Invariant Manifold in Dynamical Systems. Springer-Verlag: New York. 1994

135 Xu P C, Chang Q S, and Guo B L. Truncation Analysis for the Derivative Schrödinger Equation. Acta Math Sinica(English Series). 18(1), 2002, p137 ~ 146

136 Yagasaki K. The Method of Melnikov for perturbations of multi-degree-of-freedom Hamiltonian systems. Nonlinearity. 12, 1999, p799 ~ 822

137 Zakharov V E, and Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Soviet Physics JETP. 34(1), 1972, p62 ~ 69

138 Zeng C. Homoclinic orbits for perturbed nonlinear Schrödinger equation. Comm Pure and Appl Math. 53(10), 2000, p51 ~ 100

139 Hartman. Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons Inc. 1964

140 J Palis Jr, and W de Melo. Geometric theory of Dynamical Systems. Springer-Berlag: New York. 1982

141 Kovacic G. Chaos in a Model of the forced and damped sin-Gordon equation. PhD thesis California Institute of Technology. 1989

142 J Hadamard. Sur Literation et les Solution Asymptotiques des Equations Differentielles. Bull Soc Math France. 29, 1979